

01  
**Электроупругое поле шара, расположенного вблизи плоской поверхности пьезоэлектрика**

© А.С. Старков,<sup>1</sup> О.В. Пахомов,<sup>1</sup> И.А. Старков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Университет ИТМО,  
 190002 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> SIX Research Centre, Department of Radio Electronics, Brno University of Technology, Technicka 12,  
 616 00 Brno, Czech Republic  
 e-mail: oleg.cryogenics@gmail.com

(Поступило в Редакцию 16 июня 2014 г. В окончательной редакции 9 февраля 2015 г.)

Рассмотрена задача о нахождении электрического поля, создаваемого сканирующим зондовым микроскопом. Получены аналитические выражения для электроупругого поля в пьезоэлектрическом образце и электрического поля вне его в случае зонда шарообразной формы. Показано, что наличие связи между упругим и электростатическим полем в пьезоэлектрике приводит к перераспределению энергии между этими полями. В результате изменяется нормальная составляющая напряженности электрического поля на интерфейсе и емкость зонда.

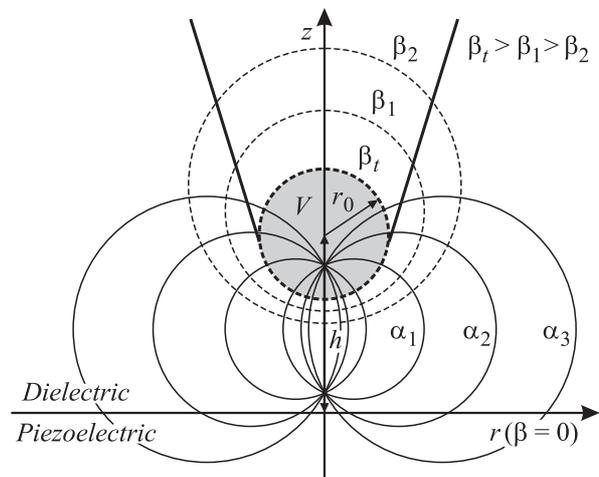
**Введение**

Перспективы использования сканирующей зондовой микроскопии требуют точного знания электрического поля, создаваемого зондом. Так как размер зонда сопоставим с размерами исследуемых объектов и составляет 10–100 nm, то приложение к нему небольшого потенциала (~ 5 V) позволяет получить напряженность электрического поля в зазоре между зондом и образцом, достигающую 10<sup>7</sup>–10<sup>8</sup> V/m. Создаваемое поле является неоднородным и сильно зависит от свойств зонда и образца. К сожалению, несмотря на множество работ, посвященных этой тематике (см., например, [1–7]), явных формул, описывающих полную физическую картину, получить не удалось. Проблема учета всех сил, действующих между зондом и образцом, является чрезвычайно сложной и можно получить только приближенные формулы, пренебрегая некоторыми второстепенными силами. Как правило, моделируют электрическое поле зонда полем сферы или даже полем от точечного источника, расположенным вблизи поверхности диэлектрика [4–11]. Если образец является сегнетоэлектриком, то данное приближение может дать только качественные оценки. Для получения более точных значений поля следует принять во внимание отличие формы зонда от сферической, наличие переходного слоя между сегнетоэлектриком и диэлектриком и доменной структуры в сегнетоэлектрике [12], а также пьезоэлектрические свойства образца. Аналитические выражения, помимо зонда сферической формы, могут быть получены только для зонда в форме гиперboloида вращения [13]. Следовательно, одной из первоочередных задач теории сканирующей зондовой микроскопии следует считать учет взаимного влияния электрического и упругого полей в образце. Цель настоящей работы — получение аналитических выражений для электроупругого поля в трансверсально-изотропном пьезоэлектрике в случае зонда шарообразной формы.

Отметим, что точные формулы для поля известны только для диэлектрического образца [8,9], а взаимодействие электрического и упругого полей описывалось только приближенно [10,11].

**Постановка задачи**

В декартовой системе координат (x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>) рассмотрим пьезоэлектрическое полупространство x<sub>3</sub> < 0, граничащее с диэлектрическим полупространством x<sub>3</sub> > 0, в котором на высоте h помещен проводящий шар радиуса r<sub>0</sub> (см. рисунок). Поверхность шара поддерживается при постоянном потенциале V. Требуется найти электрическое поле в диэлектрике и электроупругое поле в пьезоэлектрике. Для описания электрического поля будем использовать потенциал φ, напряженность E, электрическую индукцию D. Эти величины в пьезоэлектрике



Конфигурация поверхности шара и поверхности раздела в бисферической системе координат.

и диэлектрике будем снабжать индексами  $p$  и  $d$  соответственно. Упругое поле пьезоэлектрика будем описывать вектором смещения  $\mathbf{u} = \{u_1; u_2; u_3\}$ , а также тензорами деформаций  $u_{ij}$  и напряжений  $\sigma_{ij}$ . Будем рассматривать трансверсально-изотропный (аксиально-симметричный) пьезоэлектрик. В этом случае для нахождения полей используется 10 постоянных. В их число входят 5 упругих постоянных ( $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ ), измеренных при постоянном электрическом поле, 3 пьезоэлектрических постоянных ( $e_{31}, e_{33}, e_{15}$ ) и две диэлектрические проницаемости ( $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ ).

При нахождении полей наряду с декартовой системой координат будем также использовать цилиндрическую систему  $(r, \theta, z)$ , причем оси аппликат в этих системах совпадают. Введенные величины связаны между собой обычными соотношениями [13]

$$E_i = -\varphi_i, \quad u_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{kl} - e_{kij}E_k, \quad \mathbf{D} = e_{ikl}u_{kl} + \varepsilon_{ik}E_k. \quad (1)$$

Здесь используется правило Эйнштейна: по повторяющимся индексам производится суммирование. Индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей декартовой координате. Основные уравнения электростатики и упругости имеют вид

$$D_{ij} = 0, \quad \sigma_{ij,j} = 0. \quad (2)$$

Наличие аксиальной симметрии у рассматриваемой системы позволяет ограничиться у векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{u}$  только двумя компонентами — радиальной и осевой. Естественно предполагать, что указанные вектора от угла  $\theta$  не зависят. При сделанных предположениях выпишем соотношения (1) в цилиндрической системе координат. Начнем с ненулевых компонент тензора деформации

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$u_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (3)$$

и тензора напряжений

$$\sigma_{rr} = c_{11}u_{rr} + c_{12}u_{\theta\theta} + c_{13}u_{zz} - e_{31}E_r,$$

$$\sigma_{rz} = c_{44}u_{rz} - e_{51}E_r,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = c_{12}u_{rr} + c_{11}u_{\theta\theta} + c_{13}u_{zz} - e_{33}E_r,$$

$$\sigma_{zz} = c_{13}(u_{rr} + u_{\theta\theta}) + c_{33}u_{zz} - e_{33}E_z. \quad (4)$$

Затем выпишем компоненты вектора электрической индукции

$$D_r = \varepsilon_{11}E_r + e_{51}u_{rr},$$

$$D_z = \varepsilon_{33}E_z + e_{31}(u_{rr} + u_{\theta\theta}) + e_{33}u_{zz}. \quad (5)$$

Уравнения (1)–(5) описывают электроупругое поле в пьезоэлектрике. Для диэлектрика уравнения выглядят значительно проще

$$\mathbf{D} = \varepsilon_d \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \Delta \varphi = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа, а  $\varepsilon_d$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость диэлектрика. Предполагается, что диэлектрик не обладает пьезоэлектрическими свойствами, и упругое поле в нем отсутствует.

Помимо уравнений (1)–(6) перечисленные величины должны удовлетворять граничным условиям на границе раздела  $z = 0$

$$\varphi_d = \varphi_p, \quad D_{dz} = D_{pz}, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad (7)$$

а также условию на поверхности шара

$$\varphi_d = V. \quad (8)$$

Граничные условия (7) выписаны в предположении, что граница  $z = 0$  свободна от напряжений. Для решения поставленной задачи (1)–(8) будем использовать метод потенциалов, изложенный в следующем разделе.

## Метод потенциалов для задач электроупругости

Хорошо известно, что в случае изотропной теории упругости напряжения и деформации могут быть выражены через два скалярных потенциала, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Для электроупругого поля в трансверсально-изотропной среде число потенциалов увеличивается до четырех [14,15]. Основная задача данного раздела — получение уравнений для этих четырех потенциалов и формул, связывающих их с потенциалом электрического поля, а также со смещениями, деформациями и напряжениями.

Для вывода последующих формул будем использовать декартову систему координат. Представим основные неизвестные в виде

$$u_1 = \Phi_{,1} - \Phi_{,2}, \quad u_2 = \Phi_{,2} - \Phi_{,1},$$

$$u_3 = k_1 \Phi_{,3}, \quad \varphi = k_2 \Phi_{,3}, \quad (9)$$

где  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  и  $\Phi_0(x_1, x_2, x_3)$  являются искомыми потенциальными функциями, а  $k_1, k_2$  — постоянные, подлежащие определению. При подстановке (9) в (2) получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 \Phi_0 + \lambda_0 \Phi_{0,33} &= 0 \\ c_{11} \Delta_2 \Phi + (c_{44} + k_1 c_1 + k_2 e_1) \Phi_{j,33} &= 0 \\ (c_1 + k_1 c_{44} + k_2 e_{15}) \Delta_2 \Phi + (k_1 c_{33} + k_2 e_{33}) \Phi_{j,33} &= 0 \\ (e_1 + k_1 e_{15} - k_2 \varepsilon_{11}) \Delta_2 \Phi + (k_1 e_{33} - k_2 \varepsilon_{33}) \Phi_{j,33} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Здесь  $\Delta_2$  — двумерный оператор Лапласа

$$\Delta_2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2},$$

и введены обозначения

$$c_1 = c_{13} + c_{44}, \quad \lambda_0 = \frac{2c_{44}}{e_{11} - c_{12}}, \quad e_1 = e_{15} + e_{31}.$$

Если выполнены условия пропорциональности коэффициентов при различных слагаемых в трех последних уравнениях системы (10)

$$\frac{c_{44} + k_1 c_1 + k_2 e_1}{c_{11}} = \frac{k_1 c_{33} + k_2 e_{33}}{c_1 + k_1 c_{44} + k_2 e_{15}} = \frac{k_1 e_{33} + k_2 e_{33}}{e_1 + k_1 e_{15} - k_2 e_{11}} = \lambda, \quad (11)$$

то эти уравнения сводятся к одному

$$\Delta_2 \Phi + \lambda \Phi_{,33} = 0. \quad (12)$$

Условия (11) перепишем в виде системы

$$\Lambda K = 0, \quad (13)$$

где трехэлементный вектор-столбец  $K$  определяется равенством  $K = (k_1, k_2, 1)^T$ , значок  $tr$  означает транспонирование, а матрица  $\Lambda$  имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} c_1 & e_1 & c_{44} - \lambda c_{11} \\ c_{33} - \lambda c_{44} & e_{33} - \lambda e_{15} & -\lambda c_1 \\ e_{33} - \lambda e_{15} & e_{33} - \lambda e_{11} & -\lambda e_1 \end{pmatrix}.$$

В систему (13) входят три уравнения и два неизвестных. Для ее решения необходимо обращение определителя в нуль

$$\det \Lambda = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) является уравнением третьей степени относительно  $\lambda$ , явный вид которого мы не выписываем в силу его громоздкости [15].

Будем предполагать, что оно имеет три различных корня  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Соответственно имеется три набора решений системы (13) при  $\lambda = \lambda_j, j = 1, 2, 3$ , которые обозначим через  $k_{ij}, i = 1, 2$ . По известным значениям корней  $\lambda_j$  коэффициенты  $k_{ij}$  находятся из уравнений (13) и могут быть записаны в виде

$$k_{1j} = \frac{(c_{11}\lambda_j - c_{44})(e_{33} - \lambda_j e_{11}) - \lambda_j e_1^2}{(e_{15}\lambda_j - e_{33})e_1 + c_1(e_{33} - \lambda_j e_{11})},$$

$$k_{2j} = \frac{(c_{44} - c_{11}\lambda_j)(e_{33} - \lambda_j e_{11}) + \lambda_j e_1 c_1}{(e_{15}\lambda_j - e_{33})e_1 + c_1(e_{33} - \lambda_j e_{11})}.$$

Таким образом, существует 4 потенциальные функции  $\Phi_i, i = 1, 2, 3$ , которые удовлетворяют обобщенным уравнениям Лапласа

$$\Delta_2 \Phi_i + \lambda_i \Phi_{i,33} = 0, \quad i = 0, \dots, 3. \quad (15)$$

После растяжения координат  $z_i = z/\sqrt{\lambda_i}$  уравнение (15) преобразуется в обычное уравнение Лапласа, решение которого находятся намного проще, чем решения исходной задачи (2)–(5). Отметим, что возникновение обобщенного уравнения Лапласа является естественным в задачах для анизотропных сред. Так, электростатическое поле в отсутствие упругого поля для трансверсально-изотропной среды удовлетворяет уравнению (15) при  $\lambda_i = \epsilon_{33}/\epsilon_{11}$ .

Смещения и электрический потенциал выражаются через потенциальные функции следующим образом:

$$u_1 = \sum_{i=1}^3 \Phi_{i,1} - \Phi_{0,2}, \quad u_2 = \sum_{i=1}^3 \Phi_{i,2} - \Phi_{0,1},$$

$$u_3 = \sum_{i=1}^3 k_{1i} \Phi_{i,3}, \quad \varphi = \sum_{i=1}^3 k_{2i} \Phi_{i,3}. \quad (16)$$

При наличии аксиальной симметрии системы (т.е. при отсутствии зависимости от полярного угла  $\theta$ ) можно обойтись тремя потенциалами, так как в этом случае  $\Phi_0 \equiv 0$ . Выпишем для этого случая в цилиндрической системе координат выражения для упругого смещения

$$u_r = \sum_{i=1}^3 \partial \Phi_i / \partial r, \quad \text{компонент тензора напряжений}$$

$$\sigma_{zz} = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}, \quad \sigma_{rz} = \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z \partial r},$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{i=1}^3 c_{11} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} + \frac{c_{12}}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + (c_{13} k_{1i} + e_{31} k_{2i}) \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} \quad (17)$$

и компонент вектора электрического смещения

$$D_z = \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}, \quad D_r = \sum_{i=1}^3 d_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r \partial z}. \quad (18)$$

Здесь введены обозначения

$$a_i = -\lambda_i c_{13} + c_{33} k_{1i} + e_{33} k_{2i},$$

$$b_i = c_{44}(1 + k_{1i})/2 + e_{33} k_{2i},$$

$$c_i = -\lambda_i c_{31} + e_{33} k_{2i} + e_{33} k_{2i},$$

$$d_i = e_{51}(1 + k_{1i})/2 + e_{11} k_{2i}.$$

Полученные соотношения (17), (18) позволяют существенно упростить и граничные условия, записав их через три потенциальные функции. Таким образом, решение исходной задачи (2)–(8) свелось к решению обобщенного уравнения Лапласа (15) при сравнительно простых граничных условиях.

## Бисферическая система координат

Для решения уравнения Лапласа (15) предлагается использовать бисферическую систему координат. Основным ее преимуществом для данной задачи является то, что в рассматриваемой конфигурации поверхность шара и плоскость раздела являются координатными (см. рисунок). Значит, можно использовать метод разделения переменных. Введем набор из 4 бисферических систем координат  $(\alpha_i; \beta_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  [9,16,17]:

$$z_i = \frac{L \operatorname{sh} \beta_i}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha_i}, \quad r = \frac{L \sin \alpha_i}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha_i},$$

$$z_0 = z, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad -\infty < \beta < \beta_i.$$

Здесь  $L$  — масштабный множитель, определенный ниже. Бисферическую систему координат для  $i = 0$  будем использовать в диэлектрике, а системы с  $i = 1, 2, 3$  в пьезоэлектрике. В дальнейшем индекс 0 у переменных будем опускать. Граница пьезоэлектрик/диэлектрик во всех четырех системах координат задается уравнением  $\beta_i = 0$ . На ней цилиндрические и бисферические координаты связаны соотношением  $r = L \operatorname{ctg}(\alpha/2)$ ,  $\alpha_i = \alpha$ . Поверхность шара задается уравнением  $\beta = \beta_i$ , где

$$\beta_i = \operatorname{arccch} \left( \frac{h}{2} \right), \quad h = L \operatorname{ctg}(\beta_i), \quad r_0 = \frac{L}{\operatorname{sh} \beta_i}.$$

Из этих соотношений определяется масштабный множитель  $L = \sqrt{h^2 - r_0^2}$ . При  $h = r_0$ , т.е. при касании зонда и образца, множитель  $L = 0$  и, следовательно, бисферическая система координат неприменима. В этом случае следует использовать вырожденную систему бисферических координат [9].

Решения обобщенного уравнения Лапласа (15) в бисферической системе координат можно отыскивать по методу разделения переменных в виде

$$\varphi_d(\alpha, \beta) = V_{sph}(\alpha, \beta) \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{nc} \operatorname{ch} \beta_{ni} + \varphi_{ns} \operatorname{sh} B_{ni}) P_n(\cos \alpha_i), \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = V_{sph}(\alpha, \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^i e^{B_{ni}} P_n(\cos \alpha_i). \quad (20)$$

Здесь введены обозначения  $B_{ni} = (n + 1/2)\beta_i$ ,  $V_{sph}(\alpha, \beta) = V \sqrt{2(\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha)}$ , а  $\varphi_{nc}$ ,  $\varphi_{ns}$ ,  $\Phi_n^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $n = 1, 2, \dots$  — искомые коэффициенты Фурье потенциальных функций относительно системы полиномов Лежандра  $P_n(\cos \alpha)$ . При любом выборе коэффициентов Фурье ряды (19), (20) будут являться решениями уравнений (15). Заметим, что для упрощения последующих выкладок мы ищем разложение не для самих потенциальных функций, а для их производных по  $z$ . Это допустимо, так как производная по  $z$  является решением того же уравнения, что и исходная функция. К тому же в граничные условия входят не сами потенциальные функции, а их производные по  $z$ .

При выборе потенциальных функций в виде рядов (19), (20) условия ограниченности на бесконечности (при  $\beta \rightarrow \infty$ ) выполняются автоматически. Для определения коэффициентов Фурье обратимся к граничным условиям. Начнем с условий на поверхности шара. Выпишем известное из теории полиномов Лежандра разложение [9,16]

$$\frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha)}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\beta} P_n(\cos \alpha). \quad (21)$$

С учетом равенства (21) граничное условие на поверхности шара приводит к соотношениям

$$\varphi_{nc} \operatorname{ch} B_{ni} + \varphi_{ns} \operatorname{sh} B_{ni} = e^{-B_{ni}}. \quad (22)$$

Перейдем теперь к граничным условиям (17) на границе раздела сред. Для этого выпишем предварительно формулы дифференцирования по  $z$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1 - \cos \alpha}{L \sqrt{\lambda_i}} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_i}$$

и заметим, что производные по  $r$  в выражении для  $\sigma_{nc}$  также можно отбросить. С учетом вышесказанного граничные условия при  $z = 0$  имеют вид

$$\varphi_{nc} = \sum_{i=1}^3 k_{2i} \Phi_n^i, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{\sqrt{\lambda_i}} \Phi_n^i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 b_i \Phi_n^i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{\sqrt{\lambda_i}} \Phi_n^i = -\varepsilon_d \varphi_{nc}. \quad (23)$$

Совокупность уравнений (22), (23) представляет собой систему пяти линейных уравнений относительно пяти неизвестных функций  $\Phi_n^i$ ,  $\varphi_{nc}$  и  $\varphi_{ns}$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Полученные соотношения позволяют вычислить емкость шара  $C$  по формуле

$$C = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left( r \frac{\partial \varphi_d}{\partial \beta} \right) \Big|_{\beta=\beta_i} d\alpha. \quad (24)$$

В результате вычислений интеграла (24) с использованием равенства (21) и ортогональности полиномов Лежандра получаем следующее выражение для емкости:

$$C = L \left[ \frac{1}{2 \operatorname{sh} \beta_t} + \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{nc} \operatorname{ch} B_{nt} + \varphi_{ns} \operatorname{sh} B_{nt}) e^{-(2n+1)\beta_t} \right]. \quad (25)$$

Для случая диэлектрического пространства, когда все пьезомодули равны 0, формула (25) принимает вид

$$C_d = \sqrt{h^2 - r_0^2} \times \left[ \frac{1}{2 \operatorname{sh} \beta_t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon_d \operatorname{ch} B_{nt} + \varepsilon_f \operatorname{sh} B_{nt})}{(\varepsilon_f \operatorname{ch} B_{nt} + \varepsilon_d \operatorname{sh} B_{nt})} e^{-(2n+1)\beta_t} \right], \quad (26)$$

где  $\varepsilon_f = \sqrt{\varepsilon_{33} \varepsilon_{11}}$ ,  $B_{nt} = (n + 1/2)\beta_t$ . Формула (26) отличается по виду от формулы, полученной в [9] по методу изображений, но описывает точно такую же

зависимость. Основным преимуществом метода изображений является простота и наглядность результатов. Тем не менее метод изображений применим только к электростатическим задачам с плоской или сферической границей. Для расчета более сложных систем следует использовать другой метод. В качестве такого метода в настоящей работе используется метод разделения переменных.

Сравнение формул (25) и (26) показывает, что при возрастании расстояния  $h$  до центра шара обе формулы стремятся к емкости шара в неограниченном пространстве. В этом случае влияние образца является малым и его свойства слабо влияют на емкость иглы. При уменьшении этого расстояния различие в формулах (25), (26) монотонно увеличивается и достигает максимума при  $h = 0$ , т.е. при касании зондом образца. Разница в величинах емкости для диэлектрического и сегнетоэлектрического образцов может составлять до 50%, что говорит о необходимости при расчете электрического поля принимать во внимание пьезоэлектрические свойства образца.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке со стороны РФФИ 14-32-50615 мол\_нр, базовой части государственного задания и финансовой поддержки ведущих университетов РФ (субсидия 074-U01).

## Список литературы

- [1] Kalinin S.V., Bonnell D.A. // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 65. N 12. P. 125–408.
- [2] Wang B., Woo C.H. // J. Appl. Phys. 2003. Vol. 94. N 6. P. 4053–4059.
- [3] Анкундинов А.В., Тутков А.Н. // ФТТ. 2005. Т. 47. Вып. 6. С. 1110–1117.
- [4] Rosenman G., Urenski P. // Appl. Phys. Lett. 2003. Vol. 82. N 1. P. 103–105.
- [5] Molotskii M. // J. Appl. Phys. 2005. Vol. 97. N 1. P. 014109.
- [6] Волк Т.Р., Симагина Л.В., Гайнутдинов Р.В. и др. // ФТТ. 2011. Т. 53. Вып. 12. С. 2345–2351.
- [7] Волк Т.Р., Гайнутдинов Р.В., Боднарчук Я.В., Ивлева Л.И. // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 97. Вып. 8. С. 554–560.
- [8] Van der Zwan G., Mazo R.M.J. // Chem. Phys. 1985. Vol. 82. P. 3344–3350.
- [9] Smythe W.R. Static and Dynamic Electricity. Ser. A. Summa book. Hemisphere Publ. Corp. 1989. 623 p.
- [10] Kalinin S.V., Karapetian E., Kachanov M. // Phys. Rev. B. 2004. Vol. 70. P. 184101–184124.
- [11] Soergel E. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2011. Vol. 44. N 46. P. 464003.
- [12] Starkov A.S., Starkov I.A. // International Symposium on Applications of Ferroelectrics. Aveiro, Portugal, 2012. P. 1–4.
- [13] Балагуров Д.В., Ключник А.В., Лозовик Ю.Е. // ФТТ. 2000. Т. 42. Вып. 2. С. 361–366.
- [14] Nye J.F. // Physical properties of crystals. London: Oxford University Press, 1957. P. 329.
- [15] Shang F., Kuna M., Kitamura T. // Theor. Appl. Fract. Mech. 2003. Vol. 40. P. 237–246.
- [16] Starkov A.S., Pakhomov O.V., Starkov I.A. // Ferroelectrics. 2013. Vol. 442. P. 10–17.
- [17] Morse P.M., Feshbach H. // Methods of Theoretical Physics. Pt I. NY: McGraw-Hill, 1953. P. 997.