

03:04

## Моделирование эволюции плазменного следа пары цилиндров под действием электрического разряда

© Г.В. Гембаржевский<sup>1,2</sup>, А.К. Леднев<sup>1</sup>, К.Ю. Осипенко<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

<sup>2</sup> МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, Москва

<sup>3</sup> Национальный исследовательский московский государственный строительный университет, Москва  
E-mail: gvgemb@ipmnet.ru

Поступило в Редакцию 30 июня 2015 г.

Рассматривается ближний след за парой цилиндров при числе Рейнольдса  $Re \sim 1000$ , определенном по диаметру цилиндра, и при малом аспектном отношении цилиндров  $H/D \approx 3.5$ . Крупномасштабная структура такого следа представляет собой течение типа двух взаимодействующих дорожек Кармана и соответственно моделируется двумя связанными осцилляторами Ван-дер-Поля. Взаимное влияние близкорасположенных дорожек Кармана учитывается посредством нелинейного (квадратичного, общего вида) члена в уравнениях осцилляторов, кроме того, уравнения обобщаются в плане явного учета зависимости частоты осцилляций от их амплитуды. В рамках такой трехпараметрической модели обнаружено пять коллективных мод следа за двумя цилиндрами, причем имеются области параметров модели, где реализуются качественно различные режимы перемежающегося следа.

Отрывные течения широко распространены во многих областях современной техники, и продолжают находить новые применения, например [1], причем актуальна задача управления отрывом потока, в том числе с помощью электрических разрядов [2–4]. Типичный пример отрывных течений — это след за параллельными цилиндрами [5,6]. Нас интересует подобное течение, в первую очередь, как модель турбулентного плазменного потока в мощных электроразрядных лазерах, где многофакторная оптимизация параметров турбулентности необходима для одновременного обеспечения высокой мощности в сочетании с высоким качеством луча лазера, работающего в непрерывном режиме [7]. Ранее

нами была экспериментально обнаружена перестройка под действием тлеющего разряда следа за двумя цилиндрами (установленными в разрядной камере лазера), интерпретированная как переход от коллективной моды к перемежающемуся течению [8]. В целях объяснения и дальнейшего использования этого эффекта была построена простая двухпараметрическая модель следа [9,10]. Первые данные, полученные в рамках обобщенной трехпараметрической модели, были представлены на международной конференции ВМСППС-2015 [11] и в развернутом виде приводятся ниже.

Две дорожки Кармана, составляющие след, моделируются соответственно двумя нелинейно взаимодействующими осцилляторами Ван-дер-Поля (ВдП) согласно системе уравнений (1), (2), где переменные  $X_i$  отождествляются с поперечной составляющей скорости в характерных точках следа каждого цилиндра (за зоной формирования дорожек):

$$(1 + \Delta(\rho^2 - 4)) \frac{d^2 X_1}{dt^2} + X_1 - \varepsilon [1 - X_1^2 - \lambda X_2^2 - l X_1 X_2] \frac{dX_1}{dt} = h_1, \quad (1)$$

$$(1 + \Delta(r^2 - 4)) \frac{d^2 X_2}{dt^2} + X_2 - \varepsilon [1 - X_2^2 - \lambda X_1^2 - l X_1 X_2] \frac{dX_2}{dt} = h_2. \quad (2)$$

В модели (1), (2) использованы осцилляторы ВдП, как это принято и в какой то мере обосновано в имеющихся публикациях, например в статье [12] и в монографии [13], а также в имеющихся там ссылках. Правые части уравнений  $h_{1,2}$  — это случайные процессы, некоторый аналог сил Ланжевена, моделирующие возникновение стохастичности в следе. В отличие от сходной модели [12] здесь посредством квадратичной формы общего вида в квадратных скобках в (1) и (2) учтено нелинейное взаимодействие между дорожками-осцилляторами и, с помощью выражения в круглых скобках, явно учтена зависимость частоты осцилляций от их амплитуды —  $\rho$  и  $r$ . Всего система (1), (2) содержит четыре параметра  $\Delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $l$ , причем наследуемый параметр осцилляторов ВдП считаем малым  $\varepsilon \rightarrow 0$  согласно экспериментальным данным [14]; таким образом, наша модель — трехпараметрическая. Учитывая отмеченную малость параметра  $\varepsilon$ , применяем известный в теории нелинейных колебаний метод Крылова–Боголюбова [15] и ищем решение (1), (2) в форме осцилляций на основной частоте с медленно

изменяющимися амплитудами и фазами

$$\begin{aligned} X_1 &= \rho \cos\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{1 + \Delta(\rho^2 - 4)}} + \theta\right), \\ X_2 &= r \cos\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{1 + \Delta(r^2 - 4)}} + \psi\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Усредняя по быстрым колебаниям, получаем систему „укороченных“ уравнений (4)–(6) при нулевых правых частях системы (1), (2). Упрощение вида множителей в угловых скобках до (7) требует еще допущения о малости параметра  $\Delta \rightarrow 0$  при условии ограниченности амплитуд  $\rho^2 \approx r^2 \leq 4 - 8$ :

$$\langle \Phi_\rho \rangle \frac{d\rho^2}{dt} = \varepsilon \rho^2 \left[ 1 - \frac{\rho^2 + \lambda r^2 (2 - \cos(2P)) + l\rho r \cos(P)}{4} \right], \quad (4)$$

$$\langle \Phi_r \rangle \frac{dr^2}{dt} = \varepsilon r^2 \left[ 1 - \frac{r^2 + \lambda \rho^2 (2 - \cos(2P)) + l\rho r \cos(P)}{4} \right], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta(\rho^2 - 4)}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta(r^2 - 4)}} \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{8} \left[ \lambda \left( \frac{r^2}{\langle \Phi_\rho \rangle} + \frac{\rho^2}{\langle \Phi_r \rangle} \right) \sin(2P) + l\rho r \left( \frac{1}{\langle \Phi_\rho \rangle} + \frac{1}{\langle \Phi_r \rangle} \right) \sin(P) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} P &= \int_0^t \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta(\rho^2 - 4)}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta(r^2 - 4)}} \right) d\tau + \theta - \psi; \\ \langle \Phi_\rho \rangle &= 1 + \Delta(0.5\rho^2 - 4), \quad \langle \Phi_r \rangle = 1 + \Delta(0.5r^2 - 4). \end{aligned} \quad (7)$$

Сформулированная динамическая модель (4)–(7) позволяет найти глобальные моды следа как устойчивые относительно малых возмущений стационарные точки системы (4)–(6). В этой задаче наибольшую сложность представляет расчет асимметричной моды  $AS_{\rho r}$  с неравными

амплитудами колебаний  $\rho \neq r$  осцилляторов. Здесь следует перейти к коллективным переменным [9,10]  $R^2, D, P$  посредством преобразования  $R^2 = \rho^2 + r^2, D = 0.5[1 - 2\rho r / (\rho^2 + r^2)]$ ; и в преобразованной системе уравнений следует удерживать только члены, пропорциональные малой  $N = \sqrt{D(1-D)} \ll 1$ . (Допущение о малости  $N$  для моды  $AS_{\rho r}$  оправдывается формой решения (11) при учете малости параметра модели  $\varepsilon$ , причем считаем порядок малости  $\varepsilon$  выше порядка малости  $\Delta$ .) В результате получаем систему приближенных уравнений

$$\frac{dP}{dt} = - \frac{\Delta R^2 N}{(1 - 4\Delta + 0.5\Delta R^2)^{3/2}} - \frac{\varepsilon R^2 [\lambda \sin(2P) + l \sin(P)]}{8(1 - 4\Delta + 0.25\Delta R^2)}, \quad (8)$$

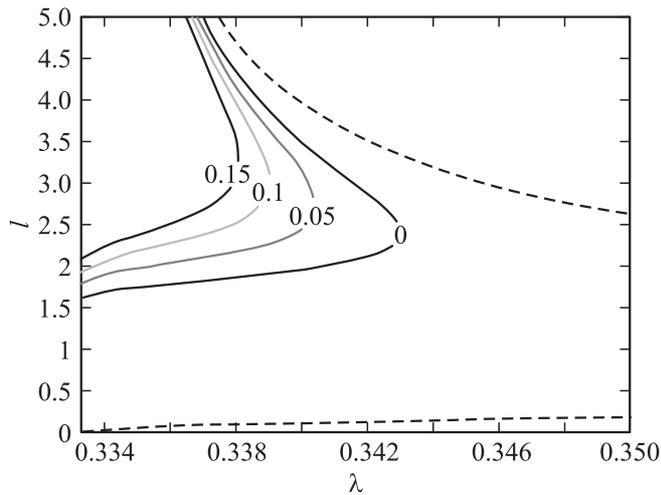
$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = N \frac{\varepsilon R^2}{4(1 - 4\Delta + 0.25\Delta R^2)} \left\{ \frac{\lambda(2 - \cos(2P)) - 1}{2} \right. \\ \left. + \frac{\Delta [-1 + 0.125(1 + l \cos(P) + \lambda(2 - \cos(2P)))R^2]}{(1 - 4\Delta + 0.25\Delta R^2)} \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dR^2}{dt} = \frac{\varepsilon R^2}{(1 - 4\Delta + 0.25\Delta R^2)} \\ \times \left\{ 1 - 0.125 [1 + l \cos(P) + \lambda(2 - \cos(2P))] R^2 \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Согласно системе (8)–(10) имеем форму моды следа  $AS_{\rho r}$  и исследуем ее устойчивость относительно малых возмущений с помощью критерия Рауса–Гурвица. При этом наиболее жестким оказывается условие  $a_1 a_2 - a_3 > 0$  в обозначениях [16], иллюстрируемое рис. 1. Оказывается, что область устойчивости моды  $AS_{\rho r}$  сужается при уменьшении параметра модели  $\Delta$ , полностью исчезая при значении  $\Delta = 0$ . Данные численного расчета эволюции моды  $AS_{\rho r}$  по „точным“ уравнениям (4)–(6) представлены на рис. 2.

Аналогично в рамках „точной“ модели (4)–(6) определяются другие моды следа, и анализируется их устойчивость. Результаты следующие: в рамках трехпараметрической модели след двух цилиндров может существовать в форме пяти различных глобальных мод.

I. Асимметричная мода  $AS$  с полным подавлением дорожки Кармана за одним из цилиндров:  $\rho^2 = 4, r = 0$  или  $r^2 = 4, \rho = 0$ . Область существования моды:  $\lambda > 0.5$ .



**Рис. 1.** Область существования моды следа  $AS_{\rho r}$  на плоскости параметров модели  $l, \lambda$  для случая  $\Delta = 0.125$ . Кривые — линии уровня критерия устойчивости моды  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ ; пунктир — границы формального существования моды, без учета устойчивости.

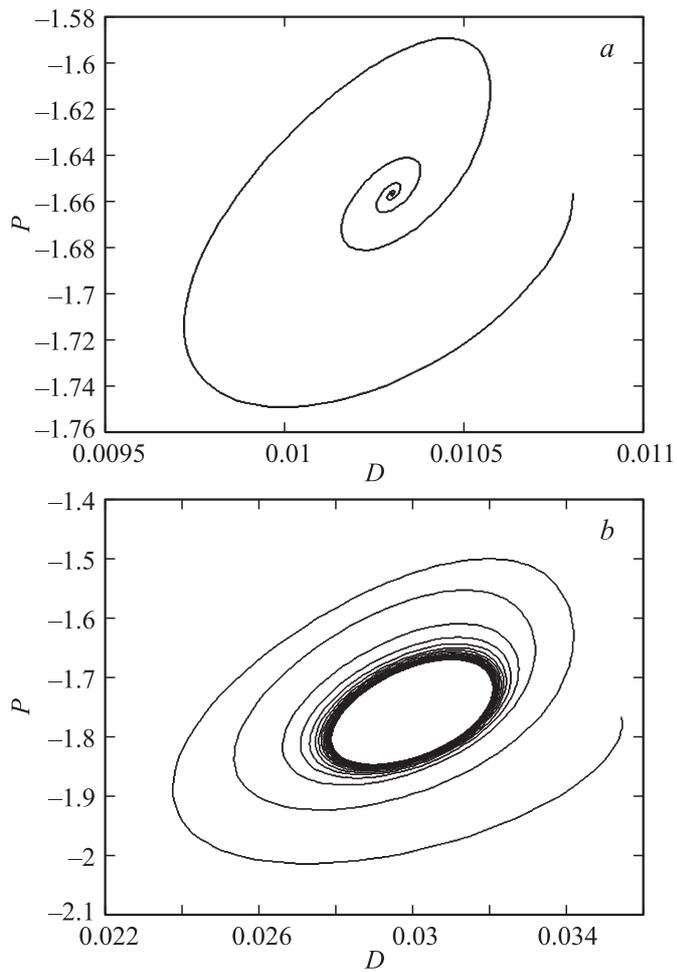
II. Симметричная мода  $S_0$  одинаковых, синфазно синхронизованных дорожек Кармана:  $\rho^2 = r^2 = 4/(1 + \lambda + l)$ ,  $P = 0$ . Область существования моды:  $\lambda < 1$ ,  $l > -2\lambda$ .

III. Симметричная мода  $S_\pi$  одинаковых, противофазно синхронизованных дорожек:  $\rho^2 = r^2 = 4/(1 + \lambda - l)$ ,  $P = \pi$ . Область существования моды:  $\lambda < 1$ ,  $l < 2\lambda$ .

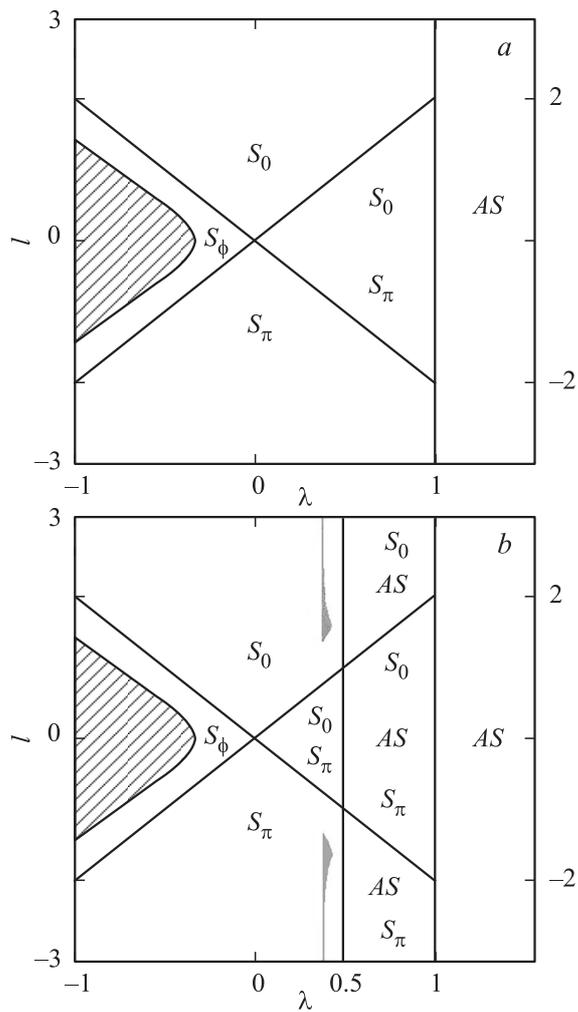
IV. Симметричная мода  $S_\Phi$  дорожек, синхронизованных под варьируемым углом, отличным от  $0$  и  $\pi$ :  $\rho^2 = r^2 = 4/(1 + 3\lambda - l^2/\lambda)$ ,  $P = (+/-) \arccos(-l/2\lambda)$ . Область существования моды:  $-1/3 < \lambda < 0$ ,  $|l| < -2\lambda \cup \lambda < -1/3$ ,  $\sqrt{\lambda(1 + 3\lambda)} < |l| < -2\lambda$ .

V. Асимметричная мода  $AS_{\rho r}$  двух дорожек Кармана различной амплитуды:

$$R^2 \approx 8/(2 - |\cos(P)|), \quad P = (-l/|l|) \arccos\left(\frac{-l/|l|}{\sqrt{1.5 - 0.5/\lambda}}\right),$$



**Рис. 2.** Динамика следа в окрестности моды  $AS_{pr}$  в проекции на плоскость коллективных динамических переменных  $P, D$ : *a* — для случая  $\varepsilon = 0.05$ ,  $\Delta = 0.125$ ,  $\lambda = 0.335$ ,  $l = 2$  — устойчивый фокус; *b* —  $\varepsilon = 0.07$ ,  $\Delta = 0.125$ ,  $\lambda = 0.342$ ,  $l = 2.5$  — устойчивый предельный цикл.



**Рис. 3.** Карта режимов следа на плоскости параметров модели  $l, \lambda$ :  $a$  — случай  $\Delta = 0$ ;  $b$  — случай  $\Delta \neq 0$ , где область существования моды  $AS_{pr}$  закрашена серым цветом.

$$\sqrt{D(1-D)} \approx \frac{\varepsilon(1-4\Delta+0.5\Delta R^2)^{3/2}}{8\Delta(1-4\Delta+0.25\Delta R^2)} \sqrt{\frac{(1/\lambda)-1}{2}} (|l| - \sqrt{6\lambda^2-2\lambda}), \quad (11)$$

$$\rho^2 = R^2(0.5 + \sqrt{D(1-D)}), \quad r^2 = R^2(0.5 - \sqrt{D(1-D)}).$$

Подчеркнем, что в отличие от результатов нашей двухпараметрической модели [9,10] в обобщенной трехпараметрической модели частоты осцилляций различных мод расщепились  $\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\Delta(\rho^2-4)}} + \frac{d\theta}{dt}$  из-за различия в значениях амплитуд мод  $\rho$ . Это и требовалось от усовершенствованной модели, имея в виду сопоставление ее выводов с экспериментальными данными по спектрам осцилляций.

Карта областей существования всех реализующихся мод представлена на рис. 3 как для двухпараметрической модели, так и для обобщенной трехпараметрической модели. Из приведенных данных следует, что в обоих вариантах есть области параметров, где существует перемежающееся течение. Однако, если в случае  $\Delta = 0$  модель вмещает всего один такой режим перемежаемости (между модами синфазно и противофазно синхронизованных дорожек Кармана), то в расширенной модели  $\Delta \neq 0$  подобных различных режимов перемежающегося следа несколько. Среди них есть режим трех перемежающихся коллективных мод:  $AS$ ,  $S_0$  и  $S_\pi$ . Насколько нам известно, такого широкого набора глобальных мод и режимов перемежающегося следа за двумя цилиндрами не удастся получить в рамках маломерного моделирования следа с линейным представлением взаимодействия между дорожками Кармана [17,18]. Известно, что режимы перемежаемости, как и неравновесные диссипативные структуры, существенно влияющие на процессы переноса, типичны для развитых турбулентных течений [19] и представляют особый интерес в случае плазменных течений в условиях разряда. Отметим, что изучение сложных перемежающихся режимов в рамках маломерного моделирования привлекает внимание исследователей [20].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-01-00742.

## Список литературы

- [1] Ефимов А.А., Иванов В.В., Багазеев А.В., Бекетов И.В., Волков И.А., Щербинин С.В. // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. В. 23. С. 51–57.
- [2] Sosa R., Artana G., Benard N., Moreau E. // *Exp. Fluids*. 2011. V. 51. P. 853–860.
- [3] Исаев С.А., Баранов П.А., Судаков А.Г., Ермаков А.М. // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. В. 2. С. 49–57.
- [4] Терешонок Д.В. // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. В. 3. С. 83–89.
- [5] Sumner D. // *J. Fluids Structures*. 2010. V. 26. P. 849–899.
- [6] Alam MdM., Zhou Y., Wang X.W. // *J. Fluid Mech*. 2011. V. 669. P. 432–471.
- [7] Huang H., Wang Y. // *Opt. Engineering*. 2011. V. 49. N 11. P. 114 201.
- [8] Гембаржевский Г.В. // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. В. 5. С. 95–102.
- [9] Gembarzhevskii G.V., Lednev A.K. // *Proceedings of 12th Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics* / Ed. V.A. Bituryn. Moscow, IHT RAS, 26–28 March 2013. P. 67.
- [10] Gembarzhevskii G.V. // *J. Modern Physics*. 2015. V. 6. N 1. P 46–57.
- [11] Гембаржевский Г.В., Осипенко К.Ю. // *Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам*. 24–31 мая 2015 г. Алушта. С. 404.
- [12] Рябинин А.Н. // *Мат. моделирование*. 1997. Т. 9. N 7. С. 26–35.
- [13] Симиу Э., Сканлан Р. *Воздействие ветра на здания и сооружения*. М.: Стройиздат, 1984. 360 с.
- [14] Gembarzhevskii G.V. // *Contributed papers of VI Int. conf. Plasma Physics and Plasma Technology*. Minsk, Belarus, September 29–October 2, 2009. V. 1. P. 27.
- [15] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука, 1974. 503 с.
- [16] Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике*. М.: Наука, 1973.
- [17] Peschard I., Le Gal P. // *Phys. Rev. Lett*. 1996. V. 77. N 15. P. 3122–3125.
- [18] Ланда П.С. *Нелинейные колебания и волны*. М.: Наука, 1997.
- [19] Будаев В.П., Савин С.П., Зеленый Л.М. // *УФН*. 2011. Т. 181. N 9. С. 905–952.
- [20] Москаленко О.И., Короновский А.А., Журавлев М.О., Храмов А.Е. // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. В. 1. С. 36–42.