

03

Дозвуковое обтекание тонкого профиля при наличии внешних воздействий на поток

© В.С. Сухомлинов

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: v_sukhomlinov@mail.ru

(Поступило в Редакцию 21 мая 2014 г. В окончательной редакции 12 декабря 2014 г.)

Работа посвящена разработке физической модели и аналитической теории расчета параметров дозвукового невязкого течения около тонкого профиля под малым углом атаки, в тонком приповерхностном слое которого существуют внешние воздействия на поток — силовое (например, МГД-воздействие) и энергетическое (например, за счет плазменных образований). В первом приближении теории малых возмущений получено аналитическое решение уравнения для двумерного потенциала скорости для профиля произвольной формы. Показано, что при условии малости толщины слоя воздействия по сравнению с длиной профиля наличие внешних воздействий эквивалентно замене реального профиля на некоторый „эффективный“. Его форма определяется пространственным распределением внешних воздействий и формой реального профиля. Результаты могут быть использованы для оптимизации аэродинамического обтекания тонкого профиля, в том числе и за счет влияния внешнего невязкого течения на течение в пограничном слое.

Введение и постановка задачи

Настоящая работа продолжает исследования методов управления аэродинамическим обтеканием за счет внешних силового и энергетического воздействий на набегающий поток, локализованных вблизи поверхности тела [1,2]. Как показано в многочисленных работах других авторов [3–6], таким образом возможно решение ряда оптимизационных задач плазменной аэродинамики. При разработке плазменных методов управления обтеканием важную роль играют вопросы энергетической эффективности. Исследования показывают, что для ее увеличения необходимо использовать плазменное энергетическое и силовое воздействия на поток по возможности локально, в областях течения, изменение параметров в которых заметно влияет на аэродинамические характеристики обтекаемых тел. Например, это может быть тонкий по сравнению с поперечными размерами обтекаемого тела приповерхностный слой. Такая задача ранее была решена в случае сверхзвукового течения для тонкого тела вращения и тонкого профиля [1,2]. В настоящей работе предпринимается попытка решить подобную задачу для тонкого профиля, обтекаемого дозвуковым потоком сжимаемой жидкости (газа) при больших числах Рейнольдса. Отметим, что результаты подобного исследования могут быть использованы, в том числе и при решении задачи о направленном изменении параметров течения в пограничном слое за счет соответствующего влияния на внешнее невязкое течение, поскольку именно из решения невязкой задачи для внешнего течения и берется продольный градиент давления на границе пограничного слоя.

1. Вывод основных соотношений

Следуя работе [2], положим, что тонкий профиль, расположенный под малым углом атаки θ , обтекается набегающим из $-\infty$ потоком сжимаемой невязкой жидкости (рис. 1). Положим также, что в тонком приповерхностном слое толщиной $\delta_{pl} \ll L$ на единицу объема жидкости действует сила $\mathbf{F}(x, y)$ и в единице объема выделяется мощность $Q(x, y)$ (здесь L — длина профиля в направлении массовой скорости потока). Тогда, действуя аналогично работе [2], можно показать, что в рамках линейного по возмущениям приближения течение описывается следующим уравнением:

$$B_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{(\gamma - 1)Q(x, y)}{\rho_0 c^2} - \frac{\gamma M F(x, y)}{\rho_0 c^2} \equiv \frac{\Phi_1(x, y)}{L^2}, \quad (1)$$

где c, ρ_0, γ, Φ — скорость звука, плотность, отношение теплоемкостей газа и потенциал возмущения скоростей соответственно, $F \equiv |\mathbf{F}|$, $v_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} |\mathbf{v}|$ (\mathbf{v} — массовая скорость), $M = v_1/c$, $B_0^2 = 1 - M^2 > 0$. При выводе уравнения (1) использовались те же предположения, что и при решении задачи, описанной в [2]: $1 - M > 0$ и порядка или больше M , $\omega = \max(|u|/v_1, |v|/v_1) \ll 1$, $\frac{\max |\mathbf{F}| L}{\rho v_1^2} = O(\omega)$,

$$\frac{|Q|L}{\rho_0 c} = O(\omega), \quad (2)$$

где u, v — возмущение продольной и поперечной скоростей потока соответственно. Уравнение (1) дополняется известными граничными условиями непротекания

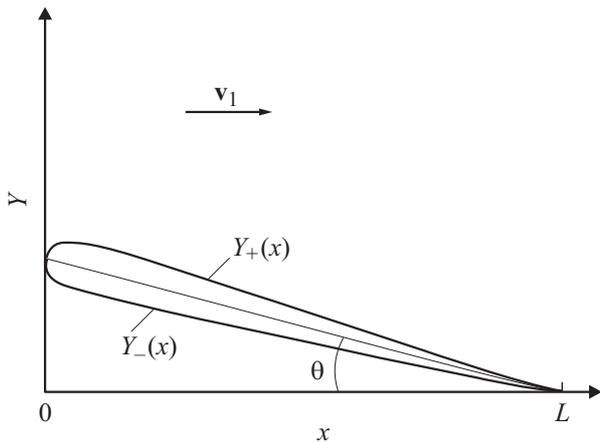


Рис. 1. Схема расположения профиля в дозвуковом потоке.

на поверхности профиля [7]. Вид решения зависит от того является ли обтекаемый профиль симметричным или нет. Действительно, если профиль симметричный, то при переходе с верхней поверхности профиля на нижний терпит разрыв скорость v , если же профиль несимметричный (но тонкий) — то скорость u .

Рассмотрим сначала случай симметричного профиля $y = \pm \bar{Y}(\bar{x})$. В этом случае очевидно, что должно выполняться

$$\Phi_1^+ = \Phi_1^- = \Phi_1, \quad (2a)$$

где знаками „+“ и „-“ отмечены функции воздействий на верхней и нижней поверхности профиля, соответственно. Введем безразмерные координаты $\bar{x} = x/L$, $\bar{y} = y/L$. Для потенциала скорости имеем [8]

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{x}, \bar{y}) = & -\frac{L}{\pi} \int_0^1 u(\xi, Y(\xi)) \ln \left[\frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \xi)^2 + B_0^2 \bar{y}^2}} \right] d\xi \\ & - \frac{1}{2\pi B_0^2} \int_0^1 \int_{Y(\xi)}^{Y(\xi) + B_0 \bar{\delta}_{pl}} \bar{\Phi}_1(\xi, \eta) \\ & \times \ln \left[\frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \xi)^2 + B_0^2 (\bar{y} - \eta)^2} \sqrt{(\bar{x} - \xi)^2 + B_0^2 (\bar{y} + \eta)^2}} \right] d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (2b)$$

При $\bar{y} = \bar{Y}(\bar{x})$ в предположении, что функция $\bar{\Phi}_1(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \bar{\Phi}_1(x/L, x/L)$ не зависит в пределах тонкого слоя воздействия от координаты \bar{y} , для возмущения продольной скорости $u(\bar{x}) = \partial \Phi(\bar{x}, \bar{y}) / L \partial \bar{x}_{\bar{y}=\bar{Y}(\bar{x})}$ из (2б) можно получить следующее решение:

$$u(\bar{x}) = u_0(\bar{x}) - \frac{1}{2\pi B_0^2 L} \int_0^1 \bar{\Phi}_1(\xi) G(\bar{x}, \xi) d\xi. \quad (3)$$

Здесь $u_0(\bar{x})$ — решение уравнения (1) при $\bar{\Phi}_1(x, y) \equiv 0$, а второе слагаемое — частное решение этого уравнения.

Для функции $G(x, \xi)$ справедливо выражение

$$\begin{aligned} G(x, \xi) = & \operatorname{arctg} \left(\frac{2\bar{Y}(\xi)B_0}{\bar{x} - \xi} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\bar{\delta}_{pl}B_0}{\bar{x} - \xi} \right) \\ & - \operatorname{arctg} \left(\frac{2\bar{Y}(\xi)B_0 + \bar{\delta}_{pl}B_0}{\bar{x} - \xi} \right), \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\bar{\delta}_{pl} = \frac{\delta_{pl}}{L} \ll 1. \quad (3b)$$

При выполнении (3б) и одного из условий $\bar{\delta}_{pl} \ll \bar{Y}$, $\bar{Y}(\bar{x}) \ll 1$ выражение для функции $G(x, \xi)$ имеет вид

$$G(x, \xi) = -2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\bar{\delta}_{pl}B_0}{\bar{x} - \xi} \right). \quad (4)$$

Для градиента возмущения давления на поверхности профиля имеем

$$\frac{1}{P_0} \frac{d\Delta P}{d\bar{x}} = \left[-\frac{\gamma M^2}{L} \frac{\partial^2 \Phi(\bar{x}, \bar{y})}{\partial^2 \bar{x}} + \frac{L}{P_0} F(\bar{x}) \right]_{\bar{y}=\bar{Y}(\bar{x})}, \quad (5)$$

где P_0 — давление при отсутствии возмущений.

Как известно, в случае симметричного обтекания для функции $u_0(\bar{x})$ справедливо [9]

$$u_0(\bar{x}) = \frac{cM}{\pi B_0} \int_0^1 \bar{Y}'(\xi) \frac{(\bar{x} - \xi)}{[(\bar{x} - \xi)^2 + B_0^2 \bar{Y}(\bar{x})^2]} d\xi, \quad (6)$$

а при выполнении неравенства $\bar{Y}(\bar{x}) \ll 1$

$$u_0(\bar{x}) = \frac{cM}{\pi B_0} \int_0^1 \bar{Y}'(\xi) \frac{1}{(\bar{x} - \xi)} d\xi. \quad (7)$$

Отметим, что для выполнения гипотезы Жуковского–Чаплыгина необходимо выполнение равенства

$$\bar{Y}'(1) = 0.$$

Можно показать, что с учетом неравенства (3б) во втором слагаемом формулы (3) функцию $G(x, \xi)$ можно заменить на

$$G_1(\bar{x}, \xi) = \frac{2\bar{\delta}_{pl}B_0}{\xi - \bar{x}}. \quad (8)$$

Таким образом, соотношение (3) в случае выполнения (3б) для симметричного профиля можно переписать

$$u(\bar{x}) = \frac{cM}{\pi B_0} \int_0^1 \left[\bar{Y}'(\xi) + \frac{\bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_1(\xi)}{MLc} \right] \frac{1}{(\bar{x} - \xi)} d\xi. \quad (9)$$

Интеграл в правой части (9) следует понимать в смысле главного значения по Коши. Отметим, что гипотеза Жуковского–Чаплыгина требует выполнения равенства

$$\bar{\Phi}_1(\bar{x}) = 0.$$

Теперь рассмотрим обтекание несимметричного профиля. В этом случае сначала рассмотрим задачу для „дужки“, которая описывается уравнением

$$\bar{y} = Y(\bar{x}). \tag{9a}$$

Под дужкой будем понимать профиль, у которого верхний контур — выпуклый, нижний — вогнутый и оба этих контура описываются одной и той же функцией. При несимметричном дозвуковом обтекании в отсутствие воздействий при переходе через дужку непрерывной является скорость $v(\bar{x})$, а скорость $u(\bar{x})$ терпит разрыв, т.е. $u^+(\bar{x}) = -u^-(\bar{x})$ [9]. Поэтому в этом случае в качестве решения уравнения (1) следует взять потенциал

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{x}, \bar{y}) = & -\frac{L}{\pi} \int_0^1 u^+(\xi) \operatorname{arctg} \left(\frac{B_0 \bar{y}}{\bar{x} - \xi} \right) d\xi - \frac{1}{2\pi B_0^2} \\ & \times \int_0^1 \int_{Y(\xi)}^{Y(\xi)+B_0 \bar{\delta}_{pl}} \bar{\Phi}_1(\xi, \eta) \ln \frac{\sqrt{(\bar{x} - \xi)^2 + B_0^2(\bar{y} + \eta)^2}}{\sqrt{(\bar{x} - \xi)^2 + B_0^2(\bar{y} - \eta)^2}} d\eta d\xi. \end{aligned} \tag{10}$$

Вычисляя из (10) составляющие скоростей для нормальной составляющей на дужке с учетом (36) имеем

$$v^+(\bar{x}) = -\frac{B_0}{\pi} \int_0^1 u^+(\xi) \frac{1}{\bar{x} - \xi} d\xi - \frac{\bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_1^+(\xi)}{L}. \tag{11}$$

Для нахождения функции $u^+(\bar{x})$, которая определяет распределение давления по дужке, нужно воспользоваться граничным условием непротекания [7]:

$$\begin{aligned} cMY'(\bar{x}) + \frac{B_0}{\pi} \int_0^1 u^+(\xi) \frac{1}{(\bar{x} - \xi)} d\xi + \frac{\bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_1^+(\bar{x})}{L} = 0; \\ 0 < \bar{x} < 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Решение данного сингулярного уравнения, ограниченное при $\bar{x} = 1$ (согласно гипотезе Жуковского–Чаплыгина), и аналогичное соотношение для нижней поверхности дужки имеют вид [8]

$$\begin{aligned} u^\pm(\bar{x}) = & \pm \frac{cM\sqrt{1-\bar{x}}}{\pi B_0 \sqrt{\bar{x}}} \int_0^1 \left[Y'(\xi) \pm \frac{\bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_1^\pm(\xi)}{McL} \right] \\ & \times \frac{\sqrt{\xi}}{(\bar{x} - \xi)\sqrt{1-\xi}} d\xi. \end{aligned} \tag{13}$$

При $\bar{\Phi}_1^+(\bar{x}) \equiv 0$ формула (13) совпадает с полученной в [9]. Уравнение (12) имеет и решение, ограниченное на всем промежутке $0 \leq \bar{x} \leq 1$ [8]. Однако мы выбрали решение, неограниченное при $\bar{x} = 0$ и ограниченное при $\bar{x} = 1$, из следующих соображений. Как известно, решение задачи о дозвуковом обтекании тонкого крыла,

полученное из теории малых возмущений, несправедливо вблизи передней критической точки, поскольку в этой точке возмущение не является малым [10] (т.е. с точки зрения теории малых возмущений стремится к бесконечности при $\bar{x} = 0$). С другой стороны, на ограниченное при $0 \leq \bar{x} \leq 1$ решение накладывается условие, которое требует его знакопеременности [8]. Как известно, при дозвуковом обтекании реальное возмущение давления над профилем тонкого крыла для его оптимальной формы строго неположительно и не может удовлетворять упомянутому выше условию. Исходя из этих соображений мы будем считать, что полученные в настоящей работе результаты справедливы везде, кроме точек на дужке вблизи $x = 0$.

Для того чтобы перейти от тонкой дужки к реальному тонкому профилю можно, следуя [8], описать произвольный тонкий профиль $\bar{y} = Y_p(\bar{x})$ тремя функциями:

$$Y_p(\bar{x}) = \pm Y_0(\bar{x}) + Y_c(\bar{x}) - \theta(\bar{x} - 1), \tag{14}$$

где первое слагаемое в правой части описывает симметричный профиль под нулевым углом атаки, второе — изгиб средней линии профиля и последнее — наклон к оси абсцисс под углом θ (рис. 1). Представим функцию воздействия на верхней и нижней поверхностях профиля, определенную формулой (14), в виде

$$\bar{\Phi}_1^\pm = \frac{\bar{\Phi}_1^+ + \bar{\Phi}_1^-}{2} \pm \frac{\bar{\Phi}_1^+ - \bar{\Phi}_1^-}{2} \equiv \bar{\Phi}_{1S} \pm \bar{\Phi}_{1A}. \tag{14a}$$

Как видно, первое слагаемое одинаково для верхней и нижней поверхностей, а второе — меняет знак при переходе с одной на другую. Будем считать, что в тонком приповерхностном слое около симметричного профиля $Y_0(\bar{x})$ воздействия описываются функцией $\bar{\Phi}_{1S}$, а около несимметричного профиля, описываемого двумя другими слагаемыми в правой части формулы (14), — функцией $\bar{\Phi}_{1A}$.

Тогда для тонкого контура произвольной формы, который описывается формулой (14), с учетом (14a) будем иметь

$$\begin{aligned} u^\pm(\bar{x}) = & \frac{cM}{\pi B_0} \int_0^1 \left[\bar{Y}'_0(\xi) + \frac{\bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_{1S}(\xi)}{MLc} \right] \frac{1}{(\bar{x} - \xi)} d\xi \\ & \pm \frac{cM\sqrt{1-\bar{x}}}{\pi B_0 \sqrt{\bar{x}}} \int_0^1 \left[Y'_c(\xi) + \frac{\bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_{1A}(\xi)}{MLc} \right] \\ & \times \frac{\sqrt{\xi}}{(\bar{x} - \xi)\sqrt{1-\xi}} d\xi \pm \frac{cM\theta}{B_0} \frac{\sqrt{1-\bar{x}}}{\sqrt{\bar{x}}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим теперь решение обратной задачи. Пусть за счет внешних воздействий требуется обеспечить заданное распределение давления на поверхности профиля

$$\frac{1}{P_0} \Delta P_{pl} = f(\bar{x}). \tag{16}$$

Найдем, каким при этом должно быть распределение внешних воздействий вокруг профиля. Сначала рас-

смотрим задачу для симметричного профиля (пусть $f^\pm(\bar{x}) = f_S(\bar{x})$). Легко показать, что распределение воздействий удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\int_0^1 \bar{\Phi}_{1S}(\xi) \frac{1}{(\xi - \bar{x})} d\xi = \frac{\pi B_0 L c}{M \bar{\delta}_{pl} \gamma} f_S(\bar{x}). \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет точное решение, ограниченное при $\bar{x} = 1$ и неограниченное при $\bar{x} = 0$ [8]:

$$\bar{\Phi}_{1S}(\bar{x}) = -\frac{B_0 L c}{\pi \gamma M \bar{\delta}_{pl}} \sqrt{\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} f_S(\xi) \frac{d\xi}{(\xi - \bar{x})}. \quad (18)$$

Если рассматривать случай, когда необходимо оптимизировать распределение давления на отрезке $x \in [a, a + \varepsilon]$, где $\varepsilon \ll a$ (т.е. $f_S(\bar{x}) = 0$ при $x < a$, $x > a + \varepsilon$), то из (18) получаем

$$\bar{\Phi}_{1S}(\bar{x}) = -\frac{B_0 L c}{\pi \gamma M \bar{\delta}_{pl}} \frac{f_S(a)}{(a - \bar{x})} \sqrt{\frac{(1-\bar{x})a}{\bar{x}(1-a)}} [\varepsilon + O(\varepsilon^2)]. \quad (18a)$$

Интеграл в (18) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Теперь предположим, что профиль не симметричный и $f^\pm(\bar{x}) = f_A^\pm(\bar{x})$. Аналог уравнения (17) имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1-\bar{x}}}{\sqrt{\bar{x}}} \int_0^1 \bar{\Phi}_{1A}^\pm(\xi) \frac{\sqrt{\xi}}{(\xi - \bar{x})\sqrt{1-\xi}} d\xi = \frac{B_0 L c}{\gamma \bar{\delta}_{pl}} f_A^\pm(\bar{x}). \quad (19)$$

Откуда, воспользовавшись (17), (18), получаем

$$\bar{\Phi}_{1A}^\pm(\bar{x}) = -\frac{B_0 L c}{\gamma M \bar{\delta}_{pl}} \int_0^1 f_A^\pm(\xi) \frac{1}{(\xi - \bar{x})} d\xi. \quad (20)$$

Если мы имеем произвольный профиль и хотим обеспечить за счет внешних воздействий некоторую зависимость относительного давления от продольной координаты $f^+(\bar{x})$, $f^-(\bar{x})$, то в качестве функций $f_S(\bar{x})$, $f_A(\bar{x})$ следует взять

$$f_S(\bar{x}) = \frac{f^+(\bar{x}) + f^-(\bar{x})}{2}, \quad f_A^\pm(\bar{x}) = \frac{f^+(\bar{x}) - f^-(\bar{x})}{2}. \quad (21)$$

Для примера рассчитаем, в результате какого внешнего воздействия $\bar{\Phi}_1^\pm(\bar{x})$ подъемная сила тонкой пластины, расположенной под углом атаки θ к дозвуковому потоку, увеличится в k раз. Необходимое для этого возмущение давления за счет внешнего силового и энергетического воздействий дается формулой [10]

$$f(\bar{x}) = f_A^\pm(\bar{x}) = \mp \theta \gamma M^2 (k-1) \sqrt{\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}}. \quad (22)$$

Тогда из соотношения (20) получим для величины возмущений

$$\bar{\Phi}_{1A}^\pm(\bar{x}) = \mp \frac{\theta B_0 M L c (k-1)}{\bar{\delta}_{pl}}. \quad (23)$$

Этот же результат напрямую следует из формулы (13). Суммарные затраты энергии в единицу времени на реализацию энергетического и силового воздействий на единицу длины размаха составляют

$$W_Q = \left| \frac{\delta_{pl} P_0}{\gamma (\gamma - 1) L} \int_0^1 [\bar{\Phi}_1^+(x) + \bar{\Phi}_1^-(x)]_{F=0} dx \right|, \\ W_F = \left| \frac{\delta_{pl} P_0}{M L \gamma} \int_0^1 [\bar{\Phi}_1^+(x) + \bar{\Phi}_1^-(x)]_{Q=0} dx \right| \quad (24)$$

соответственно. Для случая плоской пластины под углом атаки θ , при условии, что на нижней поверхности существует энергетическое воздействие (давление следует увеличить), а на верхней — силовое, ускоряющее поток (давление следует уменьшить), из (23) с учетом (24) имеем суммарные затраты энергии в единицу времени на единицу длины размаха

$$W_F + W_Q = \theta B_0 P_0 L c \frac{(k-1)}{\gamma} \left[1 + \frac{M}{(\gamma-1)} \right]. \quad (25)$$

В заключение разд. 1 настоящей работы отметим, что вычисление главного значения по Коши интегралов типа (9), (20) наталкивается на известные трудности. Для проведения расчетов при различных видах подынтегральной функции в этих интегралах можно прибегнуть к следующему приему. Введем некоторый малый параметр $\beta \ll 1$ и рассмотрим функции

$$F(\bar{x}) = \int_0^1 \bar{\Phi}_1(\xi) \frac{1}{\bar{x} - \xi} d\xi, \\ F_1(\bar{x}, \beta) = \frac{1}{\beta} \int_0^1 \bar{\Phi}_1(\xi) \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{\bar{x} - \xi} \right) d\xi,$$

где $F(\bar{x})$ понимается в смысле главного значения по Коши. Нетрудно показать, что при малом параметре $\beta \ll 1$ и непрерывности функции $\bar{\Phi}_1(\bar{x})$ будет выполняться

$$\frac{|F(\bar{x}) - F_1(\bar{x}, \beta)|}{F(\bar{x})} = O(\beta).$$

В нашем случае в качестве параметра $\beta \ll 1$ можно взять величину $\bar{\delta}_{pl} B_0$. На рис. 2 для примера приведены расчеты величин $F(\bar{x})$ и $F_1(\bar{x})$ при $\bar{\delta}_{pl} B_0 = 0.05$ для функции $\bar{\Phi}_1(\bar{x}) = \bar{x}$. Разница функций составляет около 5%. Исключение составляет узкая область возле точки, являющейся корнем уравнения $F(\bar{x}) = 0$. Таким образом, главное значение по Коши интегралов типа (9), (19) можно для любых функций $\bar{\Phi}_1(\bar{x})$ вычислять численно.

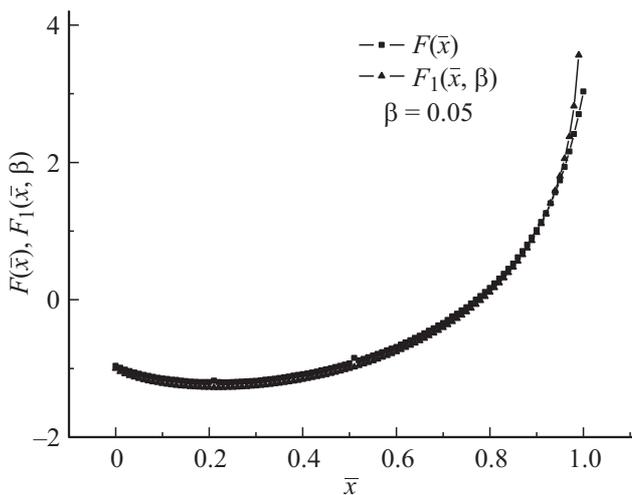


Рис. 2. Сравнение функций $F(\bar{x})$ и $F_1(\bar{x}, \beta)$ при $\bar{\Phi}_1(\bar{x}) = \bar{x}$ и $\beta = \bar{\delta}_{pl} B_0 = 0.05$.

2. Обсуждение полученных результатов

Отметим, что при отсутствии воздействий формула (15) с точностью до обозначений совпадает с полученной в [9]. Из этой же формулы следует, что в результате внешних воздействий произвольный контур как бы деформируется, а именно его симметричная часть становится равной $\pm \bar{Y}'_0(\bar{x}) \pm \bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_{1S}(\bar{x}) / MLc$, а часть, описывающая изгиб и наклон контура, — равной $Y'_c(\bar{x}) - \theta(\bar{x} - 1) + \bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_{1S}(\bar{x}) / MLc$. Очевидно, что это является следствием малости толщины слоя воздействия по сравнению с длиной контура, в результате чего источник возмущения параметров потока как бы перемещается на поверхность контура. Из формулы (15) следует одно нетривиальное утверждение. Если требуется за счет внешних воздействий изменить давление только на одной, например, верхней поверхности, то необходима организация воздействий и около нижней поверхности. Действительно, пусть выполняется равенство $f^-(\bar{x}) \equiv 0$. Тогда, согласно (21), имеем

$$f_s(\bar{x}) = \frac{f^+(\bar{x})}{2}, \quad f_A^\pm(\bar{x}) = \pm \frac{f^+(\bar{x})}{2}. \quad (26)$$

В соответствии с соотношениями (18) и (20) получим, что необходимое воздействие вблизи верхней и нижней поверхностей профиля описывается соотношениями

$$\bar{\Phi}_1^\pm(\bar{x}) = \frac{B_0 Lc}{2\pi\gamma M \bar{\delta}_{pl}} \left(\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} f^+(\xi) \frac{d\xi}{(\xi-\bar{x})} \pm \int_0^1 f^+(\xi) \frac{1}{(\xi-\bar{x})} d\xi \right).$$

Отсюда видно, что $\bar{\Phi}_1^-(\bar{x}) \neq 0$. Аналогично из формулы (15) следует, что в случае выполнения (26) возмущение продольной скорости на нижней поверхности из-за внешних воздействий на верхней отлично от нуля. Физически же это обусловлено тем, что при дозвуковом обтекании возмущения давления вблизи верхней поверхности (в том числе вызванные и внешними воздействиями) распространяются к концам обтекаемого профиля, где за счет разности давлений около нижней и верхней поверхностей начинают влиять на параметры потока на нижней поверхности профиля, подобно механизму формирования „подсасывающей силы“ [10]. Для компенсации этих возмущений и требуется некоторое дополнительное внешнее воздействие вблизи нижней поверхности. Отметим также, что, как следует из полученных результатов, величина изменения давления за счет внешних воздействий не зависит от формы профиля. Однако для получения за счет внешних воздействий заданной зависимости давления от продольной координаты на поверхности произвольного тонкого профиля необходимо знать форму профиля в виде (14).

На рис. 3 приведены результаты расчетов скоростей $u^+(\bar{x})$ (прерывистая кривая), $v^+(\bar{x})$ (сплошная кривая) в произвольных единицах для гауссовской формы источника тепла $Q(\bar{x})$ при $F(x) = 0$ на верхней и нижней стороне в случае, когда обтекается тонкая пластина под нулевым углом атаки при числе Маха $M = 0.7$. Относительная полуширина контура энергоподвода — 0.05, положение центра контура — 0.3. В этом случае присутствует только составляющая возмущения параметров потока, относящаяся к симметричному контуру. На рис. 4 — аналогичные расчеты градиента давления $d\Delta P / P_0 d\bar{x}$ в произвольных единицах для этой же формы и положения области энергоподвода. Из данных рис. 3 видно, что, как и следовало ожидать, сначала в результате нагрева газа и распространения зоны повышенного

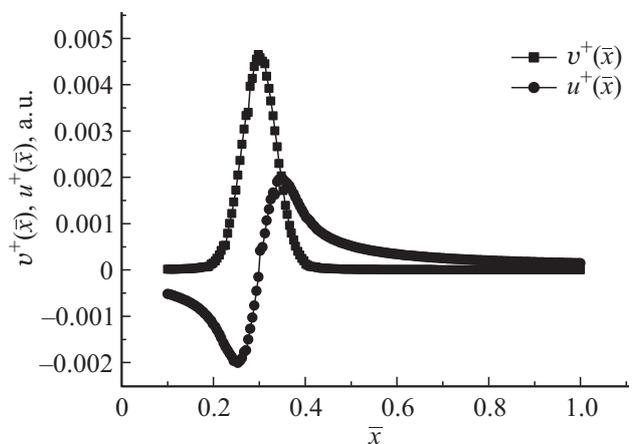


Рис. 3. Зависимость от координаты \bar{x} продольной $u(\bar{x})$ и поперечной $v(\bar{x})$ скоростей на поверхности тонкой пластины, расположенной под нулевым углом атаки. Область энерговыделения имеет гауссовскую форму с центром при $\bar{x} = 0.03$, полуширина контура 0.05, $M = 0.7$.

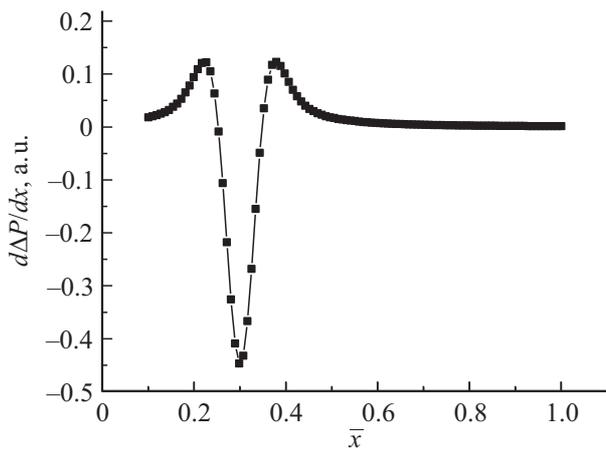


Рис. 4. Зависимость относительного градиента давления $d\Delta P/P_0\bar{x}$ на поверхности тонкой пластины, расположенной под нулевым углом атаки. Область энерговыделения имеет гауссовскую форму с центром при $\bar{x} = 0.03$, полуширина контура 0.05, $M = 0.7$.

давления вверх по потоку растет давление, газ замедляется и появляется поперечная скорость, направленная от поверхности пластины. В результате ухода газа в области энергоподвода образуется зона разрежения, что вызывает падение давления. Это в свою очередь приводит к ускорению газа и уменьшению поперечной скорости. При дальнейшем сдвиге вниз по течению все возмущения затухают.

Из данных рис. 4 можно заключить, что наряду с небольшими зонами повышения давления по краям области энерговыделения имеется сравнительно широкая зона, где давление падает. Как известно [11], наличие таких зон препятствует отрыву потока. Следует отметить, что такая картина принципиально отличается от случая сверхзвукового обтекания, для которого энергоподвод вблизи поверхности в форме гауссовского распределения приводит к аналогичному по форме росту давления в области энерговыделения с некоторым сдвигом вниз по течению [2]. Указанное отличие является прямым следствием того, что в сверхзвуковом потоке (в отличие от дозвукового) возмущения давления не распространяются вверх по потоку от источника этих возмущений. В результате имеет место известный закон обратных воздействий [12], согласно которому одно и то же внешнее воздействие (подвод или отвод энергии, совершение работы над газом и т.п.) в сверх- и дозвуковом потоке приводит к изменениям параметров потока разного знака.

На рис. 5 приведены расчеты функции $\gamma M \bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_1^+(\bar{x})/B_0 Lc$, которая обеспечивает относительное падение давления вниз по потоку на верхней поверхности тонкой пластины $0.1[(1 - \bar{x})^2 - 1]$. Видно, что для этого необходимо как положительное воздействие (подвод энергии), так и отрицательное — ускорение потока.

В сверхзвуковом потоке для реализации такой зависимости необходимо строго отрицательное воздействие [2]. Указанное различие является также следствием закона обратных воздействий. На рис. 6 показана зависимость величины воздействий от продольной координаты на нижней поверхности, которая формируется вследствие соответствующего воздействия на верхней поверхности. Видно, что оно отлично от нуля, хотя и значительно меньше, чем воздействие на верхней поверхности.

Как видно, рассчитанные на рис. 5 и 6 величины $\gamma M \bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_1^+(\bar{x})/B_0 Lc$ расходятся в точке $\bar{x} = 0$. Это является следствием того, что, как отмечалось, полученные решения несправедливы вблизи переднего конца обтекаемого профиля.

Известно, что в плазменной аэродинамике важную роль играют вопросы энергетической эффективности. Отметим, что применительно к рассмотренной задаче

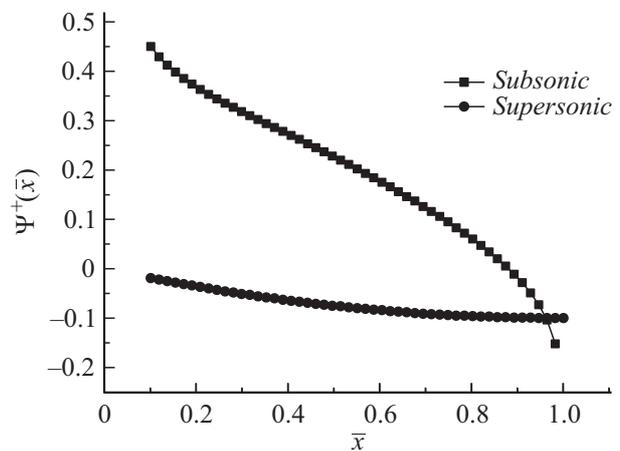


Рис. 5. Зависимость интенсивности внешних воздействий $\gamma M \bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_1^+(\bar{x})/B_0 Lc$ при дозвуковом и сверхзвуковом обтеканиях соответственно, которые обеспечивают зависимость давления на верхней поверхности $\Delta P_{pl}^+/P_0 = 0.1[(1 - \bar{x})^2 - 1]$.

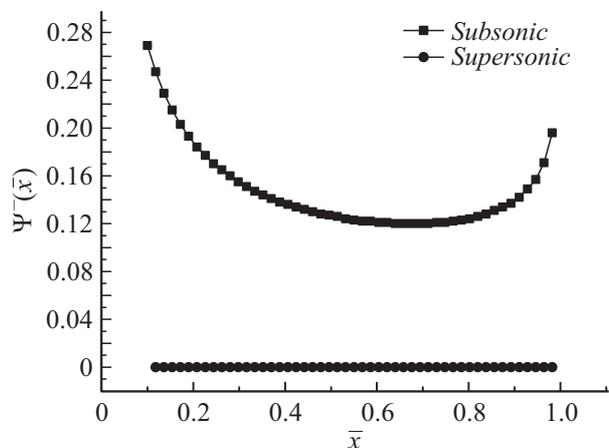


Рис. 6. Зависимость интенсивности внешних воздействий $\gamma M \bar{\delta}_{pl} \bar{\Phi}_1^-(\bar{x})/B_0 Lc$, которые формируются вблизи нижней поверхности вследствие реализации воздействий на верхней поверхности.

попытки напрямую снизить лобовое сопротивление тонкого профиля за счет внешних воздействий в тонком приповерхностном слое оказываются энергетически не выгодными. Дело в том, что при безотрывном обтекании профиля, а именно эту ситуацию мы рассматриваем, сила сопротивления (подсасывающая сила [10]) пропорциональна θ^2 . В то же время затраты на компенсацию возмущения давления пропорциональны θ . Что касается возможности напрямую увеличить за счет внешних воздействий подъемную силу крыла, меняя давление по всей его площади, то такой способ требует значительных энергетических затрат. Так, оценка по формуле (25) для $\theta = 0.017$, $\gamma = 1.4$, $M = 0.5$, $P_0 = 2.65 \cdot 10^4$ Па, $k = 1.1$ (угол атаки 1° , высота 10 км, увеличение подъемной силы на 10%) дает величину около 19 kW/m^2 .

Тем не менее перестройка структуры потока за счет энергетического и силового воздействий, особенно в области пограничного слоя, может привести к улучшению аэродинамического качества, особенно в условиях, когда возможно предотвратить отрыв потока.

Заключение

В заключение сформулируем основные полученные результаты. В рамках линейной по возмущениям параметров потока теории найдено аналитическое решение задачи об обтекании тонкого профиля дозвуковым потоком при условии, что в тонком приповерхностном слое (который много толще пограничного слоя) существуют внешние энергетическое и силовое воздействия на поток (которые можно реализовать с помощью плазменных образований и МГД-воздействия). Задача решена для профиля произвольной формы и произвольного пространственного распределения внешних воздействий. Полученное решение справедливо везде, кроме окрестности точки $x = 0$. Аналогично решена и обратная задача — нахождение пространственного распределения внешних силового и энергетического воздействий, обеспечивающих заданное возмущение давления. Это открывает возможность, в том числе и за счет управления свойствами внешнего невязкого течения, влиять на параметры течения в погранслое и, таким образом, оптимизировать аэродинамическое обтекание.

Список литературы

- [1] Герасимов Н.А., Сухомлинов В.С. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 1. С. 34–40.
- [2] Герасимов Н.А., Сухомлинов В.С. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 6. С. 25–30.
- [3] Gordeev V.P., Krasilnikov A.V., Lagutin V.P., Otmennikov V.N. // Fluid Dyn. 1996. Vol. 36. N 2. P. 313–317.
- [4] Adamovich I.V., Subramaniam V.V., Lempert W.R., Rich J.W. // 2nd Weakly Ionized Gases Workshop. Norfolk. VA, 1998. P. 1–13.
- [5] Auslender A. // Workshop on Weakly Ionized Gases Wave propagation in weakly ionized Plasmas Environment. USAF Academy. Colorado. 1997. Section DD.
- [6] Герасимов Н.А., Сухомлинов В.С. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 11. С. 6–10.
- [7] Witham G.B. Linear and nonlinear waves. John Willey & Sons, 1974. P. 219.
- [8] Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. Точные решения. М.: Факториал, 1998. С. 203.
- [9] Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1994. С. 380.
- [10] Краснов Н.Ф. Аэродинамика 1. Основы теории. Аэродинамика профиля и крыла. М.: Высшая школа, 1976. С. 239.
- [11] Schlichting H., Gersten K. Boundary Layer Theory. 8th ed. Springer-Verlag, 2004. 801 p.
- [12] Вулус Л.А. Термодинамика газовых потоков. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1950. 304 с.