

12
Осцилляции электронной температуры в размерно-квантованной пленке в поперечном магнитном поле

© 3.3. Алисултанов

Институт физики им. И.М. Амирханова ДагНЦ РАН,
Махачкала, Россия
Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
Москва, Россия
Дагестанский государственный университет,
Махачкала, Россия
E-mail: zaur0102@gmail.com

(Поступила в Редакцию 14 апреля 2015 г.
В окончательной редакции 6 июня 2015 г.)

Рассмотрен осциллирующий магнетокалорический эффект в размерно-квантованной диамагнитной пленке в поперечном магнитном поле. Получены выражения для термодинамического потенциала и энтропии. Показано, что изменение энтропии есть осциллирующая функция напряженности магнитного поля. Природа этого эффекта такая же, как для эффекта де Гааза–ван Альфена. Показано также, что изменение энтропии является осциллирующей функцией толщины пленки. Проведено сравнение со случаями 3D- и 2D-систем. Дана качественная интерпретация полученных результатов.

Работа поддержана грантом Президента РФ МК-4471.2015.2 для государственной поддержки молодых российских ученых-кандидатов наук (конкурс МК-2015), грантом РФФИ № 15-02-03311а, а также проектом № 3.1262.2014 Министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности.

Автор благодарит также фонд „Династия“ за финансовую поддержку.

1. Введение

Магнетокалорический эффект (МКЭ), впервые открытый Варбургом в 1881 г. [1], является одним из основных объектов исследования современной физики конденсированного состояния [2]. МКЭ связан с изменением энтропии магнитной подсистемы S_m при включении магнитного поля [3]. При адиабатическом процессе ($\Delta S = 0$) это приводит к изменению энтропии других подсистем, в частности тепловой, что ведет к изменению температуры. МКЭ наиболее сильно проявляется в магнитоупорядоченных системах (ферромагнетики [4–6], мультиферроики [7] и т.д.) вблизи температуры Кюри, так как вблизи этой температуры происходит наиболее сильное изменение энтропии. Однако недавно был исследован осциллирующий МКЭ в диамагнитных материалах [8–11]. Природа осцилляций такая же, как в известном эффекте де Гааза–ван Альфена. Этот эффект был исследован в 2D- и 3D-нерелятивистских материалах [8,9,12], а также в графене [10,11]. Получен интересный результат: температура, при которой наблюдается пик изменения магнитной энтропии в графене, почти в 50 раз больше, чем в нерелятивистских материалах. В [13] исследовались осцилляции адиабатического изменения температуры в графене. Также осциллирующий МКЭ был исследован для двумерной наноленты [14] и

многослойного графена [15]. В недавней работе [16], где исследовался осциллирующий МКЭ в перестраиваемом бислое графена, был предложен новый электрокалорический эффект, основанный на перестройке уровней Ландау с помощью напряжения на затворе. Конечно, МКЭ в диамагнитных материалах намного слабее, чем МКЭ в магнитоупорядоченных материалах. Однако осциллирующий МКЭ интересен в основном как новый эффект, с помощью которого можно получить дополнительную информацию о системе, в частности об энергетическом спектре носителей. Действительно, по характеру осцилляций можно судить о фундаментальных особенностях системы по аналогии с такими эффектами, как эффект де Гааза–ван Альфена или эффект Шубникова–де Гааза. Кроме того, с помощью исследований осцилляций энтропии можно получить информацию о фундаментальных квантовых константах (постоянная Планка, квант магнитного потока). В настоящей работе исследуется МКЭ в диамагнитной размерно-квантованной пленке и анализируется влияние на этот эффект размерного квантования. Случай, который мы исследуем, является промежуточным между 3D и 2D. Поскольку любая пленка обладает конечной толщиной (кроме графена), ее нельзя считать идеально 2D-системой. Следовательно, существенную роль могут сыграть эффекты размерного квантования.

2. Термодинамический потенциал размерно-квантованной пленки в поперечном магнитном поле

Для энергии электронов зоны проводимости пленки, расположенной в плоскости XY , имеем

$$E_i(p) = (2m)^{-1}(p_x^2 + p_y^2) + \varepsilon_i, \quad (1)$$

где $p = (p_x, p_y)$ — двумерный импульс электронов пленки, m — эффективная масса электрона, ε_i — энергия электронов в направлении OZ , $i = 1, 2, \dots$. В магнитном поле H для спектра имеем

$$E_{n,i} = \varepsilon_i + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (2)$$

где $\omega_c = eH/mc$ — циклотронная частота.

Получим выражение для термодинамического потенциала. Термодинамический потенциал пленки (на единицу объема) в магнитном поле определяется выражением

$$\Omega(H) = -\frac{2eHk_B T}{\pi\hbar c L} \sum_i \sum_{n=0} \ln \left(1 + \exp \frac{\mu - E_{n,i}}{k_B T} \right), \quad (3)$$

где L — толщина пленки, T — температура, μ — химический потенциал, k_B — постоянная Больцмана. Мы здесь рассматриваем случай электронного допирования, т.е. $\mu > 0$. Используя формулу Пуассона для суммирования, получим

$$\begin{aligned} \Omega(H) = & -\frac{2eH}{\pi\hbar c L} \sum_i \int_0^\infty f(\varepsilon_i + \varepsilon - \mu) n(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{4eHk_B T}{\pi\hbar c L} \\ & \times \operatorname{Re} \sum_i \sum_{k \neq 0} \int_0^\infty \ln \left(1 + \exp \frac{\mu - E_{n,i}}{k_B T} \right) \exp(2\pi i k n) dn. \end{aligned} \quad (4)$$

Проводя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \Omega_H = & -\frac{2eH}{\pi\hbar c L} \sum_i \int_0^\infty f(\varepsilon_i + \varepsilon - \mu) n(\varepsilon) d\varepsilon \\ & - \frac{2eHk_B T}{\pi^2 \hbar c L} \sum_i \sum_{k \neq 0} \frac{\sin 2\pi k n}{k} \ln \left(1 + \exp \frac{\mu - \varepsilon - \varepsilon_i}{k_B T} \right) \Big|_0^\infty \\ & - \frac{2eH}{\pi^2 \hbar c L} \operatorname{Re} \sum_i \sum_{k \neq 0} \int_0^\infty \frac{1}{ik} [f(\varepsilon + \varepsilon_i - \mu)] e^{2\pi i k n} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

Нас будет интересовать магнитная часть термодинамического потенциала. Вводя переменную $\varepsilon = E_{n,i}$, получим

$$\Omega_H = \Omega_H^1 + \Omega_H^2 + \Omega_H^3, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_H^1 = & \frac{2\gamma e H k_B T}{\pi \hbar c L} \sum_i \ln \left(e^{\frac{\varepsilon_i}{k_B T}} + 1 \right), \\ \Omega_H^2 = & -\beta \sum_i \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} f(\varepsilon_i - \varepsilon_F) \cos(k\pi), \\ \Omega_H^3 = & \beta \operatorname{Re} \sum_i \sum_{k \neq 0} e^{-ik\pi \left(1 - \frac{2m\varepsilon_i c}{\hbar e H} \right)} \\ & \times \frac{1}{k^2} B \left(\exp \frac{-\varepsilon_i}{k_B T} + 1 \right)^{-1} (1 + ik\alpha, 1 - ik\alpha), \\ \beta = & \frac{e^2 H^2}{\pi^3 m c^2 L}, \quad \alpha = \frac{2\pi m c k_B T}{\hbar e H}, \end{aligned}$$

$B_x(a, b)$ — неполная бета-функция Эйлера. Магнитный момент определяется с помощью известного соотношения

$$M = -\frac{\partial \Omega_H}{\partial H}.$$

Мы воспользуемся следующими свойствами неполной бета-функции Эйлера:

$$B_0(a, b) = 0, \quad B_1(a, b) = B(a, b),$$

где $B(a, b)$ — полная бета-функция Эйлера. Тогда функцию Ω_H^3 ввиду условия $\varepsilon_F \gg k_B T$ можно переписать в следующем виде:

$$\Omega_H^3 \approx \beta \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{n_F} \sum_{k \neq 0} e^{ik\pi \left(1 - \frac{2m\varepsilon_i c}{\hbar e H} \right)} \frac{1}{k^2} B(1 + ik\alpha, 1 - ik\alpha), \quad (7)$$

где величина n_F находится из условия $\varepsilon_{n_F} = \varepsilon_F$. При этом мы предполагаем, что $|\varepsilon_{n_F} - \varepsilon_{(n_F \pm 1)}| \gg k_B T$. Итак, окончательно имеем

$$\Omega_H = \Omega_H^{\text{nosc}} + \Omega_H^{\text{osc}}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_H^{\text{nosc}} = & \frac{m\omega_c}{\pi L} \sum_i \left(\frac{k_B T}{\hbar} \ln \left(e^{\frac{\varepsilon_F - \varepsilon_i}{k_B T}} + 1 \right) + \frac{\omega_c}{12} f(\varepsilon_i - \varepsilon_F) \right), \\ \Omega_H^{\text{osc}} = & \frac{2m\omega_c k_B T}{\pi \hbar L} \sum_{i=1}^{n_F} \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k \cos \left(\frac{2\pi k (\varepsilon_F - \varepsilon_i)}{\hbar \omega_c} \right)}{\sinh \pi k \alpha}, \end{aligned}$$

где мы использовали формулу

$$\sum_{k \neq 0} \cos(\pi k) / k^2 = -\pi^2 / 12.$$

Только часть Ω_H^{osc} является осциллирующей. Она будет представлять для нас наибольший интерес.

3. Осцилляции энтропии и адиабатического изменения температуры

МКЭ определяется изменением энтропии $\Delta S = S^{\text{total}}(T, H) - S(T, 0)$. Используя для энтропии известное выражение из термодинамики, получим

$$S = -\frac{\partial \Omega_H}{\partial T} = S_H^{\text{nosc}} + S_H^{\text{osc}}. \quad (9)$$

Беря производную и пренебрегая малыми членами, окончательно получим

$$S_H^{\text{nosc}} = \frac{m\omega_c^2}{12\pi L k_B T^2} \sum_i \frac{\varepsilon_F - \varepsilon_i}{2 \cosh^2\left(\frac{\varepsilon_F - \varepsilon_i}{2k_B T}\right)}, \quad (10)$$

$$S_H^{\text{osc}} = -\frac{2k_B m \omega_c}{\hbar \pi L} \frac{\pi \alpha \coth \pi \alpha - 1}{\sinh \pi \alpha} \sum_{i=1}^{n_F} \cos\left(\frac{2\pi(\varepsilon_F - \varepsilon_i)}{\hbar \omega_c}\right), \quad (11)$$

где мы, следуя работам [8–11], ограничились лишь одним первым членом $k = 1$, что справедливо, вообще говоря, в пределе низких температур. Заметим, что $S_H^{\text{nosc}} \ll S_H^{\text{osc}}$. Из (11) видно, что энтропия есть осциллирующая функция магнитного поля. Период осцилляций по переменной $1/H$ для одной подзоны определяется величиной

$$\Delta\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{\hbar e}{(\varepsilon_F - \varepsilon_i) m c}. \quad (12)$$

Эта величина зависит от толщины пленки через функцию ε_i . Это означает, что знак энтропии должен зависеть не только от напряженности магнитного поля, но и от толщины пленки. Более того, так как изменение энтропии определяется суммой по всем подзонам (см. (11)), период осцилляций будет зависеть и от величины магнитного поля (сумма разных косинусов

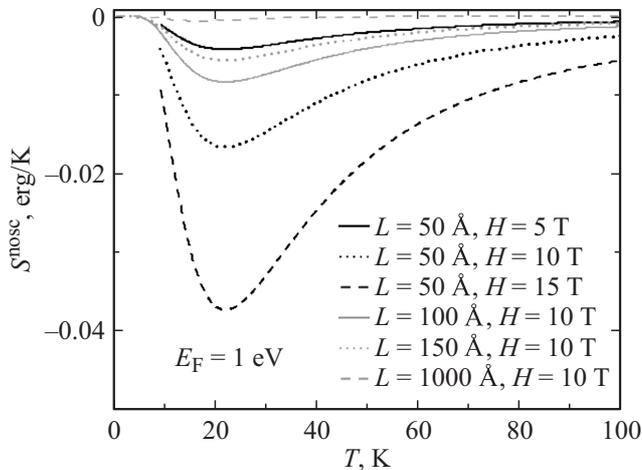


Рис. 1. Неосциллирующая часть магнитной энтропии как функция температуры при различных значениях магнитного поля и толщины пленки.

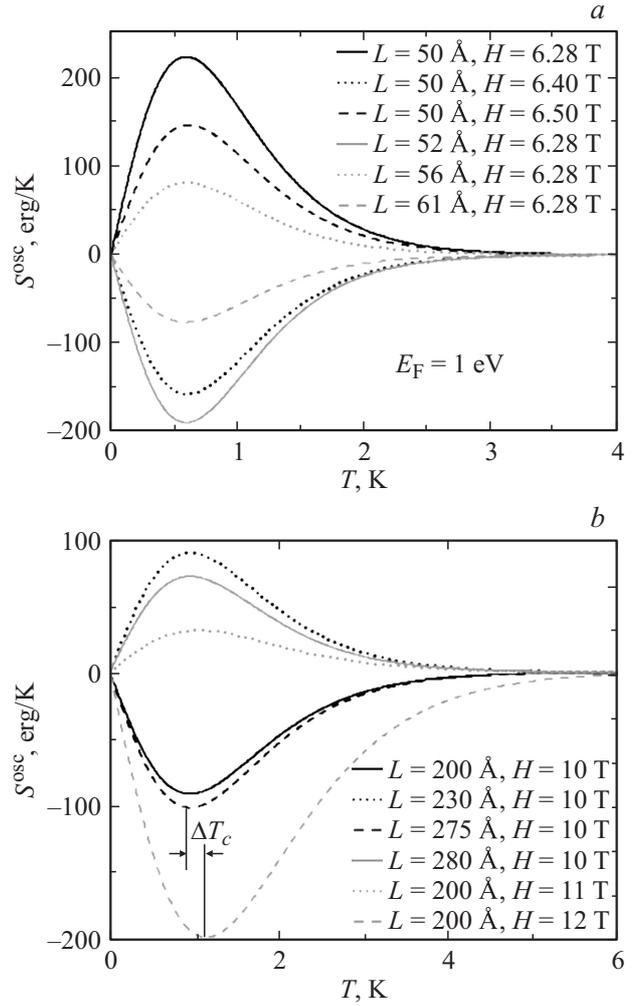


Рис. 2. Осциллирующая часть магнитной энтропии как функция температуры при различных значениях магнитного поля и толщины пленки. *a* — для малых значений толщины, *b* — для больших значений толщины. Энтропия меняет знак как при изменении магнитного поля, так и при изменении толщины пленки. Энтропия принимает максимальное значение при некоторой температуре, которая увеличивается при возрастании магнитного поля (часть *b*).

не является периодической функцией с постоянным периодом). Отметим, что в случае 2D- и 3D-систем период осцилляций не зависит от магнитного поля.

На рис. 1, 2 представлены зависимости осциллирующей и неосциллирующей частей энтропии от температуры при различных значениях напряженности магнитного поля и толщины пленки. При построении кривых мы положили $\varepsilon_i = \pi^2 \hbar^2 i^2 / 2mL^2$, $m = 10^{-27}$ г. Из рис. 2 видно, что энтропия меняет знак не только при изменении магнитного поля, но и при изменении толщины пленки. Физика этих осцилляций обсуждается далее.

Чтобы убедиться в том, что период осцилляций в случае размерно-квантованной пленки зависит от магнитного поля, на рис. 3 приведен осциллирующий фактор для различных толщин пленки. Из рисунка видно, что

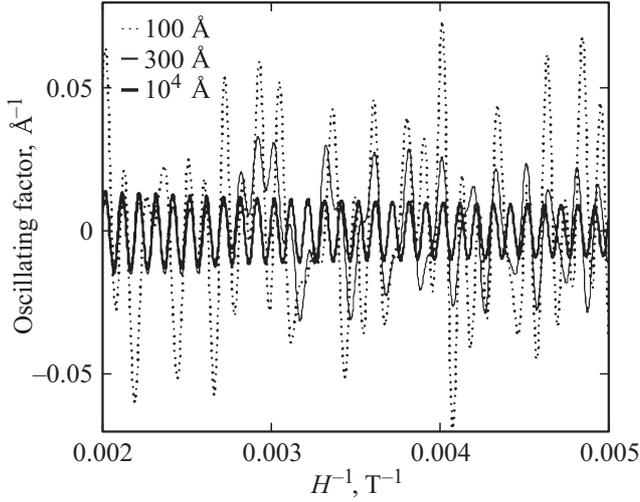


Рис. 3. Осциллирующий фактор в энтропии как функция обратного магнитного поля. При большой толщине пленки период осцилляций не зависит от магнитного поля.

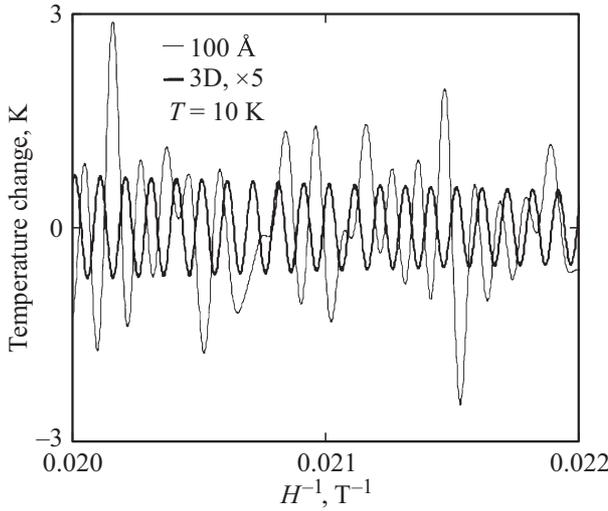


Рис. 4. Осцилляции температуры в размерно-квантованной пленке и трехмерном электронном газе. Чтобы наглядно изобразить обе кривые, мы умножили кривую для трехмерного случая на 5.

при большой толщине (3D-случай) период осцилляций не зависит от магнитного поля в согласии с данными работ [8,9,12].

Изменение энтропии нельзя экспериментально измерить прямыми методами, так как эта величина не является наблюдаемой. Обычно для этих целей используют косвенные методы (например, через намагниченность). В связи с этим оценим адиабатическое изменение температуры, что является наблюдаемым явлением. В адиабатическом процессе изменение полной энтропии равно нулю, т.е. $\Delta S^{\text{total}} = 0$. Это условие дает

$$\Delta S(T, 0) = -S_H(T), \quad (13)$$

т.е. изменение тепловой части энтропии, которое определяет изменение температуры, равно магнитной части энтропии, взятой со знаком минус. Из (5) для $S(T, 0)$ получаем

$$S(T, 0) \approx \frac{mk_B^2 T}{3\hbar^2} \left(\frac{\sqrt{2m\varepsilon_F}}{\hbar} - \frac{\pi}{2L} \right), \quad (14)$$

где мы опять воспользовались условием $|\varepsilon_{\text{int } n_F} - \varepsilon_{\text{int } (n_F \pm 1)}| \gg k_B T$ (получение выражения (14) приведено в Приложении). Тогда

$$\Delta S(T, 0) = \frac{mk_B^2}{3\hbar^2} \left(\frac{\sqrt{2m\varepsilon_F}}{\hbar} - \frac{\pi}{2L} \right) \Delta T. \quad (15)$$

Тогда с помощью (11) и (13) окончательно получаем

$$\Delta T \approx \frac{12\pi\hbar T}{L\sqrt{2m\varepsilon_F}} \frac{L(\pi\alpha)}{\sinh \pi\alpha} \sum_{i=1}^{\text{int } n_F} \cos \left(\frac{2\pi(\varepsilon_F - \varepsilon_i)}{\hbar\omega_c} \right), \quad (16)$$

где $L(x) = \coth x - 1/x$ — функция Ланжевена. Осцилляции температуры приведены на рис. 4. Из рис. 4 видно, что в размерно-квантованной пленке амплитуда осцилляций температуры почти на порядок больше, чем в трехмерной системе. Этот факт делает размерно-квантованную пленку более удобной системой для экспериментального наблюдения осциллирующего МКЭ.

4. Сравнение с 2D- и 3D-системами

Прежде всего заметим, что в случае 3D- ($\varepsilon_i \rightarrow p_z^2/2m$) и 2D- ($\varepsilon_i \rightarrow 0$) материалов термодинамические потенциалы Ω_H^1 и Ω_H^2 при условии $\varepsilon_F \gg k_B T$ не зависят от температуры. Следовательно, $S^1 = S^2 = 0$. Однако в случае размерно-квантованной пленки это условие не выполняется из-за наличия члена ε_i , по которому ведется суммирование. Действительно, в 2D- и 3D-случаях при $\varepsilon_F \gg k_B T$ можно использовать в Ω_H^1 и Ω_H^2 следующие приближения:

$$\ln \left(1 + \exp \frac{\varepsilon_F}{k_B T} \right) \approx \frac{\varepsilon_F}{k_B T}, \quad \frac{1}{e^{-\frac{\varepsilon_F}{k_B T}} + 1} \approx 1, \quad (17)$$

чего нельзя делать для случая размерно-квантованной пленки. Таким образом, в размерно-квантованной пленке $S^2 \neq 0$.

Некоторые сравнения были проведены в предыдущем разделе. Здесь мы обратим внимание на некоторые качественные моменты. Для того чтобы понять качественные различия между разными случаями, вспомним элементарное объяснение осцилляционного эффекта. Осцилляционный эффект связан с тем, что степень вырождения γ уровней Ландау зависит от величины магнитного поля. Если это число больше, чем полное число электронов N , то все они уместятся на уровне с $n = 0$. При уменьшении магнитного поля степень вырождения этого уровня уменьшается и может стать меньше N , тогда часть электронов переместится на

уровень с $n = 1$ и т.д. Поэтому магнитные свойства электронов должны периодически изменяться с изменением величины магнитного поля, а магнитный момент будет изменять не только величину, но и знак, что и проявляется в эффекте де Гааза–ван Альфена (в нашем случае в осциллирующем МКЭ).

В 2D-случае имеем полностью дискретный спектр $\hbar\omega_c(n + 1/2)$. По мере уменьшения магнитного поля все большее число уровней заполняется электронами, как было отмечено выше. В случае 3D-системы спектр имеет вид $p_z^2/2m + \hbar\omega_c(n + 1/2)$. В этом случае сначала будет заполняться уровень $n = 0$, а потом непрерывный промежуток $\hbar\omega_c/2 < p_z^2/2m < 3\hbar\omega_c/2$. Только затем начнется заполнение уровня $n = 1$. Число электронов, заполняющих непрерывный промежуток $\hbar\omega_c/2 < p_z^2/2m < 3\hbar\omega_c/2$, равно $\sqrt{2m\hbar\omega_c L/\pi\hbar}$ (оно одинаково для всех промежутков $\hbar\omega_c(n + 1)/2 < p_z^2/2m < (n + 2)\hbar\omega_c/2$). Если $N > \gamma + \sqrt{2m\hbar\omega_c L/\pi\hbar}$, то начнется заполнение уровня $n = 1$, и т.д. Таким образом, 3D-случай отличается от 2D-случая, что сказывается на осцилляциях (см. [8,12]): амплитуда осцилляций в 3D-системе убывает по мере уменьшения магнитного поля, в 2D-системе амплитуда — величина постоянная. Легко показать, что период осцилляций в обоих случаях одинаков. Рассмотрим теперь случай размерно-квантованной пленки. В этом случае спектр полностью квантован (2), но состоит из двух разных частей: размерное квантование и уровни Ландау. Поэтому первоначально заполняется тот уровень, которому соответствует меньшая энергия. Если, например, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \hbar\omega_c$, то сначала заполняется уровень $\varepsilon_1 + \hbar\omega_c/2$, а затем начнется заполнение уровня $\varepsilon_2 + \hbar\omega_c/2$. Если $N < \gamma + 2$, то все электроны будут занимать уровень $\varepsilon_1 + \hbar\omega_c/2$. При уменьшении магнитного поля часть электронов переместится на уровень $\varepsilon_2 + \hbar\omega_c/2$, и т.д. Понятно, что все эти переходы между уровнями определяются самими уровнями независимо от их природы (размерное квантование или уровни Ландау) и соотношением между последними. Этим и объясняется зависимость величины и знака энтропии от толщины пленки.

5. Заключение

В настоящей работе мы показали, что энтропия в размерно-квантованной диамагнитной пленке является осциллирующей функцией не только магнитного поля, но и толщины пленки. Естественно, этот факт необходимо учитывать при анализе экспериментальных данных по исследованию МКЭ в тонких пленках, т.е. недостаточно рассмотреть случай 2D-системы (как в работе [12], в которой полученные для 2D-системы, результаты были применены к пленке золота).

В работах [8–12] мало внимания уделялось обсуждению поведения энтропии как функции температуры. Здесь мы отметим следующий наиболее интересный,

на наш взгляд, результат этих исследований. Из рис. 2 (см. также аналогичные рисунки из работ [8–12]) видно, что изменение энтропии имеет максимум при некотором значении температуры. Заметим, что в магнитоупорядоченных материалах такое поведение энтропии не наблюдается. В данном случае имеется принципиальное отличие от случая магнитоупорядоченных систем, для которой энтропия делится на две части: магнитную и тепловую. Магнитная часть энтропии связана со спинами частиц, а тепловая — с их тепловым движением. Приложение магнитного поля упорядочивает спины, тем самым уменьшая их энтропию. Увеличение температуры приводит к увеличению интенсивности теплового движения и нарушению ориентации спинов. Как следствие, энтропия системы возрастает. Дальнейшее увеличение температуры приведет к еще большему возрастанию тепловой части энтропии, в то время как магнитная часть будет идти к насыщению (состоянию с максимально хаотической ориентацией спинов или с нулевым магнитным моментом). Обратимся теперь к случаю диамагнитной системы в квантующем магнитном поле. Рассмотрим для простоты двумерный случай, когда энергия электронов полностью квантована. В квантующем магнитном поле электроны занимают определенное количество уровней Ландау и создают магнитный момент системы. При повышении температуры электроны получают дополнительную энергию. Но электроны не могут изменить свою кинетическую энергию, пока тепловая энергия не будет превосходить разность между уровнями Ландау. Поэтому повышение температуры приведет только к разупорядочению моментов (закон Кюри–Бриллюэна). Как следствие, магнитная часть энтропии увеличится. Когда тепловая энергия становится больше разности между уровнями Ландау, у электронов появляется возможность покинуть данный уровень и перейти на другой, т.е. тепловая энергия расходуется в основном на изменение энергии электронов и в меньшей степени на нарушение взаимной ориентации магнитных моментов. В системе восстанавливается магнитный порядок, т.е. магнитная часть энтропии уменьшается. Понятно, что температура, при которой энтропия принимает максимальное значение, будет тем больше, чем больше расстояние между уровнями Ландау. Этот факт, что в графене эта температура в несколько десятков раз больше, чем в нерелятивистских материалах [10], свидетельствует только в пользу данного объяснения. В заключение отметим, что представляет большой интерес рассмотреть осциллирующий МКЭ в размерно-квантованной пленке в продольном магнитном поле. В этом случае возникают специальные краевые состояния, что скажется на энергетическом спектре электронов, а следовательно, и на квантовых осцилляциях.

Автор выражает благодарность М. Реису (Бразилия) за интересное обсуждение работы и ценные советы.

Приложение

Для тепловой части термодинамического потенциала из формулы (5) получим

$$\Omega(T, 0) = -\frac{2m}{\pi\hbar^2 L} \sum_i \int_0^\infty f(\varepsilon_i + \varepsilon - \mu) \varepsilon d\varepsilon, \quad (\text{П1})$$

откуда для энтропии получаем

$$S(T, 0) = \frac{m}{2\pi\hbar^2 L k_B T^2} \sum_i \int_0^\infty \frac{\varepsilon_i + \varepsilon - \mu}{\cosh^2 \frac{\varepsilon_i + \varepsilon - \mu}{2k_B T}} \varepsilon d\varepsilon. \quad (\text{П2})$$

Переходя к переменной $z = (\varepsilon_i + \varepsilon - \mu)/2k_B T$, получаем

$$S(T, 0) = \frac{mk_B}{\pi\hbar^2 L} \sum_i \int_{\frac{\varepsilon_i - \mu}{2k_B T}}^\infty \frac{z(2k_B T z + \mu - \varepsilon_i)}{\cosh^2 z} dz. \quad (\text{П3})$$

Сумму в последнем выражении представим в виде

$$\sum_i F_i = \sum_{i=1}^{n_F-1} F_i + F_{n_F} + \sum_{i=n_F}^\infty F_i. \quad (\text{П4})$$

Используя условия $|\varepsilon_{\text{int } n_F} - \varepsilon_{\text{int } (n_F \pm 1)}| \gg k_B T$ и $\mu \gg k_B T$, из-за быстрой сходимости подынтегрального выражения в (П3) можем положить

$$\frac{\varepsilon_i - \mu}{2k_B T} \approx \begin{cases} -\infty, & i < n_F, \\ 0, & i = n_F, \\ \infty, & i > n_F. \end{cases} \quad (\text{П5})$$

Тогда

$$S(T, 0) \approx \frac{mk_B}{\pi\hbar^2 L} \times \left[\sum_{i=1}^{n_F-1} \int_{-\infty}^\infty \frac{z(2k_B T z + \mu - \varepsilon_i)}{\cosh^2 z} dz + \int_0^\infty \frac{2k_B T z^2}{\cosh^2 z} dz \right]. \quad (\text{П6})$$

Используя интегралы [17]

$$\int_{-\infty}^\infty \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{ch}^2 z} dz = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \pi^2/6 \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\infty \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{ch}^2 z} dz = \begin{pmatrix} 1 \\ \ln 2 \\ \pi^2/12 \end{pmatrix}, \quad (\text{П7})$$

получим

$$S(T, 0) \approx \frac{m\pi k_B^2 T}{3\hbar L} \left(n_F - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{П8})$$

Учитывая, что $n_F = \sqrt{2m\varepsilon_F L}/\pi\hbar$, окончательно получаем

$$S(T, 0) \approx \frac{mk_B^2 T}{3\hbar^2} \left(\frac{\sqrt{2m\varepsilon_F}}{\hbar} - \frac{\pi}{2L} \right). \quad (\text{П9})$$

При $L \rightarrow \infty$ приходим к энтропии трехмерной системы.

Список литературы

- [1] E. Warburg. Ann. Phys. **13**, 141 (1881)
- [2] A.M. Tishin, Y.L. Spichkin. The magnetocaloric effect and its applications. Institute of Physics Publ., Bristol-Philadelphia (2003). 480 p.
- [3] N.A. de Oliveira, P.J. von Ranke. Phys. Rep. **489**, 89 (2010).
- [4] V.K. Sharma, M.K. Chattopadhyay, S.B. Roy. J. Phys. D **40**, 1869 (2007).
- [5] I.K. Kamilov, A.G. Gamzatov, A.M. Aliev, A.B. Batdalov, A.A. Aliverdiev, Sh.B. Abdulvagidov, O.V. Melnikov, O.Yu. Gorbenko, A.R. Kaul. J. Phys. D **40**, 4413 (2007).
- [6] L. Li, K. Nishimura, W.D. Hutchison, K. Mori. J. Phys. D **41**, 175 002 (2008).
- [7] M.M. Vopson. J. Phys. D **46**, 345 304 (2013).
- [8] M.S. Reis. Appl. Phys. Lett. **99**, 052 511 (2011).
- [9] M.S. Reis. Solid State Commun. **152**, 921 (2012).
- [10] M.S. Reis. Appl. Phys. Lett. **101**, 222 405 (2012).
- [11] M.S. Reis. Solid State Commun. **161**, 19 (2013).
- [12] M.S. Reis. J. Appl. Phys. **113**, 243 901 (2013).
- [13] L.S. Paixao, Z.Z. Alisultanov, M.S. Reis. J. Magn. Magn. Mater. **368**, 374 (2014).
- [14] Z.Z. Alisultanov, R.P. Meilanov, L.S. Paixao, M.S. Reis. Physica E **65**, 44 (2015).
- [15] Z.Z. Alisultanov, L.S. Paixao, M.S. Reis. Appl. Phys. Lett. **105**, 232 406 (2014).
- [16] Z.Z. Alisultanov, M.S. Reis. Solid State Commun. **206**, 17 (2015).
- [17] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. Элементарные функции. Наука, М. (1981). 798 с.