

Выявление детерминированной составляющей в сигналах акустической эмиссии от механически нагруженных образцов из горных пород

© В.Л. Гиляров

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: Vladimir.Hilarov@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 18 мая 2015 г.)

С помощью теоремы Такенса проведено восстановление аттрактора для амплитуд сигналов акустической эмиссии, полученных в процессе разрушения гранитных образцов. Установлены закономерности поведения во времени динамических характеристик системы, таких как размерности вложения, фрактальные размерности, рекуррентные графики и их числовые параметры. Для предварительно водонасыщенного образца в структуре сигналов акустической эмиссии обнаружен фазовый переход порядок–беспорядок.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-05-00152-а).

1. Введение

Процесс разрушения твердых тел сопровождается комплексом идущих во времени процессов, таких как электронная и акустическая эмиссия, флуоресценция и др. Эти процессы, связанные с перестройками атомной и электронной структуры, несут информацию о том, что в данный момент происходит внутри разрушаемого тела, и поэтому могут служить индикаторами или датчиками контроля процесса разрушения. В настоящей работе исследуется процесс акустической эмиссии (АЕ). Полезная информация, которую несут сигналы АЕ, подвержена большому зашумлению, связанному с различными внешними и внутренними факторами (затухание и рассеяние при распространении от точки источника к точке наблюдения, конечность и неравномерность полосы пропускания используемых датчиков, граничные условия, стохастичность самого процесса и т.п.). Поэтому возникает вопрос о выявлении в экспериментальных данных детерминированной динамической составляющей, которую можно использовать в дальнейшем для построения модели процесса и его прогнозирования. Далее в работе для этой цели используется аппарат нелинейной динамики.

Методы нелинейной динамики часто применяются в настоящее время для анализа временных рядов различной физической природы с целью выявления в них динамических характеристик, таких как размерность вложения (определяющая число динамических параметров, необходимых для описания системы) и фрактальная размерность динамического аттрактора, если он существует. Для этого часто достаточно знать временную зависимость одной-единственной физической величины $x(t)$ и на основании теоремы Такенса [1] построить лаговое m -мерное пространство (пространство вложения), эквивалентное фазовому пространству системы, в котором множество точек, принадлежащих исходному временному ряду, обладает топологическими

свойствами аттрактора динамической системы. С этой целью для каждой точки временного ряда $x(t_i)$ строится m -мерный вектор $\mathbf{X}_i(m)$ с координатами вида

$$\mathbf{X}_i(m) = \{x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau)\}, \quad (1)$$

который определяет точку в m -мерном пространстве.

Применение такой методики для анализа временных рядов акустической эмиссии в материалах при различных физических воздействиях описано, например, в [2–8]. В большинстве работ изучается непрерывная во времени акустическая эмиссия, которая оцифровывается авторами с нужной дискретностью. Однако в физике разрушения и физике землетрясений временные ряды представляют собой обычно амплитуды (магнитуды, сейсмические моменты, энергии, пространственные координаты) сигналов, приходящих на датчики в случайные моменты времени, и полученные временные ряды не являются равноотстоящими. В этом случае построение векторов вида (1) оказывается невозможным. Чтобы обойти эту трудность вводится понятие сейсмической активности, которая рассчитывается различными способами: число сигналов, суммарная амплитуда сигналов [7], сумма кубических корней из энергий сигналов [9], взятые за заданный промежуток времени T .

В настоящей работе анализируются результаты широко известных акустоэмиссионных экспериментов [10–12] (АЕ42, АЕ43, АЕ44). Образцы из гранита Westerly высотой 190.5 mm и диаметром 72.6 mm подвергались гидростатическому давлению и одноосному сжатию. В процессе эксперимента записывались сигналы АЕ, вызванные образованием микротрещин в образце, вплоть до момента разрушения образцов. Детали эксперимента подробно описаны в [10–12]. Следует отметить, что в эксперименте АЕ44 [12] образец перед механическим нагружением был насыщен водой через торцы. В двух остальных экспериментах использовались сухие образцы.

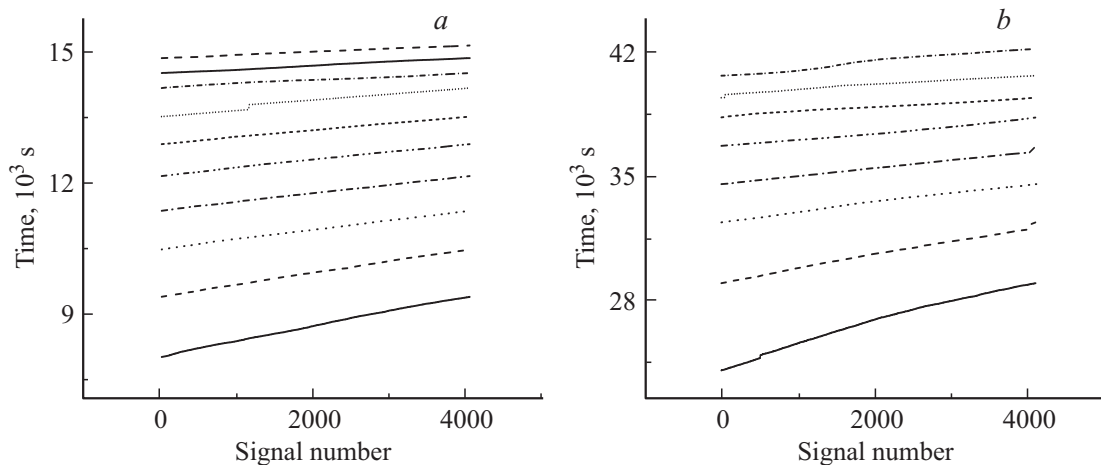


Рис. 1. Связь между номером отсчета и текущим временем в экспериментальных файлах, разбитых на участки по 4096 сигналов. *a* — эксперимент AE42, *b* — AE43.

2. Восстановление динамического аттрактора

На первом этапе обработки результатов эксперимента была предпринята попытка определить размерность аттрактора системы. Для этого использовалась стандартная процедура расчета корреляционного интеграла Грассбергера–Прокаччи [13] в лаговых пространствах увеличивающейся размерности m

$$C(m, r) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N \Theta(r - |\mathbf{X}_i(m) - \mathbf{X}_j(m)|). \quad (2)$$

Здесь $r_{ij} = |\mathbf{X}_i(m) - \mathbf{X}_j(m)|$ — расстояние между двумя точками в лаговом пространстве, Θ — функция Хевисайда. Для самоподобных систем $C(m, r) \propto r^{D(m)}$, где $D(m)$ — корреляционная фрактальная размерность в m -мерном пространстве. Последовательно увеличивая размерность пространства m и строя кривые зависимости $D(m)$, можно обнаружить насыщение этой зависимости, т.е. при дальнейшем росте m величина $D(m)$ не изменяется. Тогда величина $m = n_{\text{phase}}$ отражает размерность фазового пространства системы, а величина $D_2 = D(n_{\text{phase}})$ — корреляционную размерность динамического аттрактора. Если величина D_2 дробная, то аттрактор принято называть странным.

Реальные временные ряды, получаемые в эксперименте, содержат помимо динамической составляющей значительную долю внешних шумов. Стохастичность процесса, обусловленная этими шумами, существенно отличается от динамического хаоса, возникающего в нелинейных динамических системах. Динамический хаос проявляется в конечномерных системах, как правило, невысокой размерности и занимает лишь часть многомерного фазового пространства, в то время как в стохастическом процессе фазовый поток размазан по всему фазовому пространству (в случае процесса с перемешиванием) либо, слабо меняя форму, заметает

большую часть фазового пространства (в случае эргодического процесса) [14]. Поэтому зависимость $D(m)$ для стохастического процесса насыщения не имеет.

Представляет интерес проследить, как изменяются параметры D_2 и n_{phase} по мере развития процесса разрушения. Для этого необходимо иметь их зависимости от времени, а это в свою очередь накладывает ограничение на число сигналов в эксперименте, которое должно быть достаточно большим. Согласно наиболее широко используемому критерию Цониса [15], число точек временного ряда должно удовлетворять соотношению

$$N > 10^{2+0.4D_2}, \quad (3)$$

т.е. с ростом D_2 величина N быстро растет. Чтобы исследовать закономерность процесса в различные моменты времени, весь банк акустоэмиссионных данных нужно разделить на отдельные участки. Однако, как уже отмечалось, временной ряд не является равноотстоящим. Если ввести сейсмическую активность указанными выше способами, результаты оказываются сильно зависящими от промежутка времени T , в течение которого происходит усреднение данных. Если величина T мала ($T \approx 0.2$ s для эксперимента AE42), то в него может не попасть ни одного события (особенно на начальных этапах процесса), и это существенно сказывается на поведении статистических величин. Если же T увеличить до приемлемых величин ($T \approx 0.5$ s), то условие (3) требует разбиения банка данных на временные интервалы NT , слишком длинные для того, чтобы можно было изучить временные зависимости D_2 и n_{phase} . Поэтому с учетом того, что на не слишком больших временных интервалах текущий номер сигнала в банках данных примерно пропорционален текущему времени (рис. 1), т.е. $t \propto i$, банки данных были разбиты на интервалы по 4096 событий (процесс стационарен на этих временных масштабах). На каждом из этих интервалов проводился расчет зависимости $D(m)$. Скачки на рис. 1 обусловлены

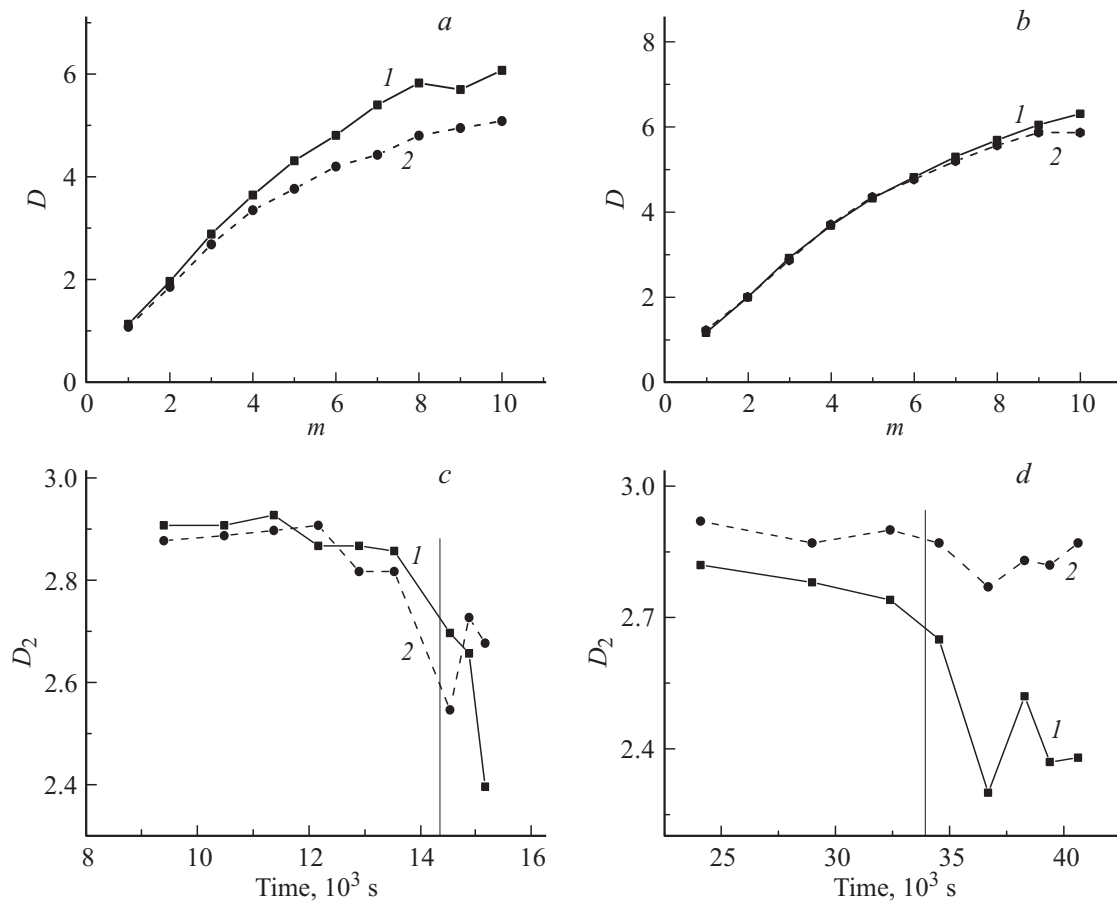


Рис. 2. Зависимости $D(m)$ для экспериментов AE42 (a), AE43 (b) на начальных (1) и конечных стадиях (2) процесса разрушения. c, d — зависимости корреляционной фрактальной размерности от времени для экспериментов AE42 и AE43 соответственно. Кривые 1 построены по точкам источников сигналов, кривые 2 восстановлены по амплитудам. Вертикальными линиями отмечен конец стационарной стадии приложения нагрузки.

паузами в регистрации сигналов в процессе эксперимента и легко могут быть исключены.

Для расчетов использовалось свободно распространяемое программное обеспечение TISEAN [16], а также программа Fractan, разработанная в институте математических проблем биологии В. Сычевым. Поскольку полученные в обоих программных продуктах данные практически идентичны, далее обсуждаются результаты, относящиеся к пакету TISEAN.

Временные зависимости $D(m)$ для экспериментов AE42 и AE43 приведены на рис. 2, a и b соответственно. Эксперимент AE44 содержит всего 2186 экспериментальных точек и в связи с этим для анализа зависимости $D(m)$ при больших значениях непригоден, поскольку соотношение (3) заведомо не выполняется. Расчеты проводились для $m = 1-10$. Расчет при $m > 10$ не имеет смысла, поскольку неравенство (3) перестает выполняться. Как видно из рис. 2, кривые $D(m)$ не имеют насыщения, характерного для маломерного хаоса, но отклоняются при больших значениях m от линейной зависимости, присущей полностью стохастическому процессу, причем при приближении к моменту разрушения отклонение становится сильнее. Это свидетельствует о

стремлении процесса к детерминизму при приближении образцов к разрушению. Расчет проводился при помощи пакета TISEAN, автоматизированного Меклером [17]. Величина лага выбиралась равной единице (использование автоматического лага, рассчитанного на основании положения первого локального минимума функции взаимной информации [17], на результаты практически не влияло). Для компенсации небольшой длины временного ряда использовалось автоматическое определение окна Тейлера [16,18], реализованное в [17].

Для экспериментов AE42 и AE43 известны координаты источников сигнала. Исходя из них в [19–21] были рассчитаны временные зависимости корреляционной фрактальной размерности D_2 в трехмерном пространстве. Эти зависимости приведены на рис. 2, c, d для экспериментов AE42 и AE43 соответственно. На этих же рисунках представлены аналогичные зависимости, рассчитанные на основании теоремы Такенса для амплитуд сигналов по данным рис. 2, a, b. Видно хорошее согласие пространственных и амплитудных данных (коэффициент корреляции равен 0.73 для AE42 и 0.83 для AE43), что подтверждает применимость амплитуд сигналов для анализа нелинейной динамики процесса.

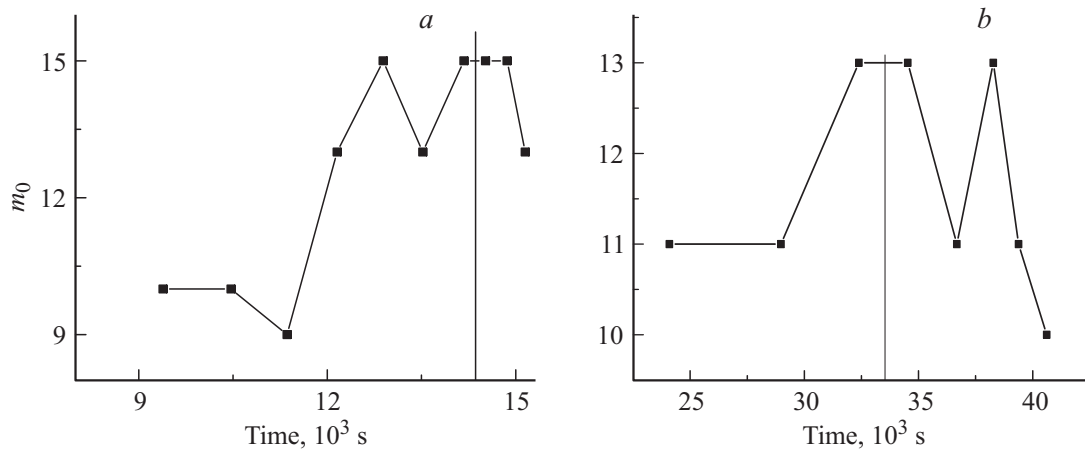


Рис. 3. Зависимость размерности вложения аттрактора от времени. *a* — эксперимент AE42, *b* — AE43. Вертикальными линиями отмечен конец стационарной стадии приложения нагрузки.

Вертикальные линии на рис. 2, *c*, *d* показывают конец квазистационарной стадии, когда система обратной связи управления механической нагрузкой [10] существенно эту нагрузку сбрасывала, тем самым меняя естественный ход процесса.

Для определения минимальной размерности фазового пространства, в которое укладывается динамический аттрактор $m_0 = n_{\text{phase}}$, была использована процедура подсчета [22] числа ложных ближайших соседей (false nearest neighbors) в лаговом пространстве. Действительно, если аттрактор уложен в фазовое пространство $m = n_{\text{phase}}$, это означает, что его топология в лаговом пространстве соответствует топологии фазового пространства, т. е. ближайшее окружение заданной точки в одном пространстве отображается в ближайшее окружение отображения этой точки в другом пространстве (отображение гомеоморфно). Попытка уложить аттрактор в пространство меньшей размерности приводит к тому, что топологическая структура аттрактора нарушается. Ближайшее окружение заданной точки может попасть в окрестность отображения совсем другой точки. Такие точки называются ложными соседями. Процедура исключения ложных соседей описана в [16] и реализована в пакете TISEAN. Для этой цели рассчитывается число ложных ближайших соседей N_f в лаговых пространствах увеличивающейся размерности m . По мере увеличения m число N_f быстро уменьшается. Выбирая в качестве критерия малости отношение числа ложных соседей к полному числу соседей $N_f/N_{\text{all}} < 0.01$, находим минимальную размерность $m_0 = n_{\text{phase}}$ лагового пространства, в которое укладывается аттрактор. Здесь нас интересует лишь зависимость размерности m_0 от времени, которая приведена на рис. 3, поэтому конкретная величина приведенного выше отношения N_f/N_{all} не существенна. Как видно, при приближении к моменту разрушения величина m_0 увеличивается (по крайней мере, на стационарном участке — до тех пор, пока внешняя механическая нагрузка сохраняется приблизительно постоянной, отмечено вертикальными линиями

на рис. 3). Увеличение размерности фазового пространства отражает рост со временем числа участвующих в процессе степеней свободы системы, что подтверждает сделанное ранее предположение [23] о том, что процесс развивается по механизму стремления к самоорганизованному критическому состоянию [24].

Рассмотренная методика восстановления динамического аттрактора в многомерном лаговом пространстве требует большого размера временных рядов. Поэтому на втором этапе обработки экспериментальных данных был применен метод рекуррентных графиков и количественного рекуррентного анализа (recurrence plots — RP, recurrence quantification analysis — RQA), который не требует столь большого числа отсчетов временного ряда (достаточно нескольких десятков точек).

3. Метод рекуррентных графиков для процесса акустической эмиссии

Метод рекуррентных графиков был разработан в [25]. Он основан на анализе близости точек в лаговом пространстве $\mathbf{X}(t_i) = \mathbf{X}_i$; $\mathbf{X}(t_j) = \mathbf{X}_j$, понимаемой в смысле Грассбергера–Прокаччи:

$$R_{i,j}(r, m) = \Theta(\varepsilon_i - \|\mathbf{X}_i(m) - \mathbf{X}_j(m)\|). \quad (4)$$

Однако вместо евклидовой нормы вектора L_2 , используемой при вычислении корреляционного интеграла (2), здесь для увеличения скорости расчета чаще используют другие виды норм [26]. Мы использовали максимальную норму (L_∞):

$$\|\mathbf{X}\| = \max |x_i|, \quad (5)$$

т. е. в качестве нормы вектора выбирался максимальный из модулей его проекций. Рекуррентный график представляет собой двумерное множество точек, отвечающих соотношению (4), состоящее из нулей и единиц, причем близкие (рекуррентные) точки принято

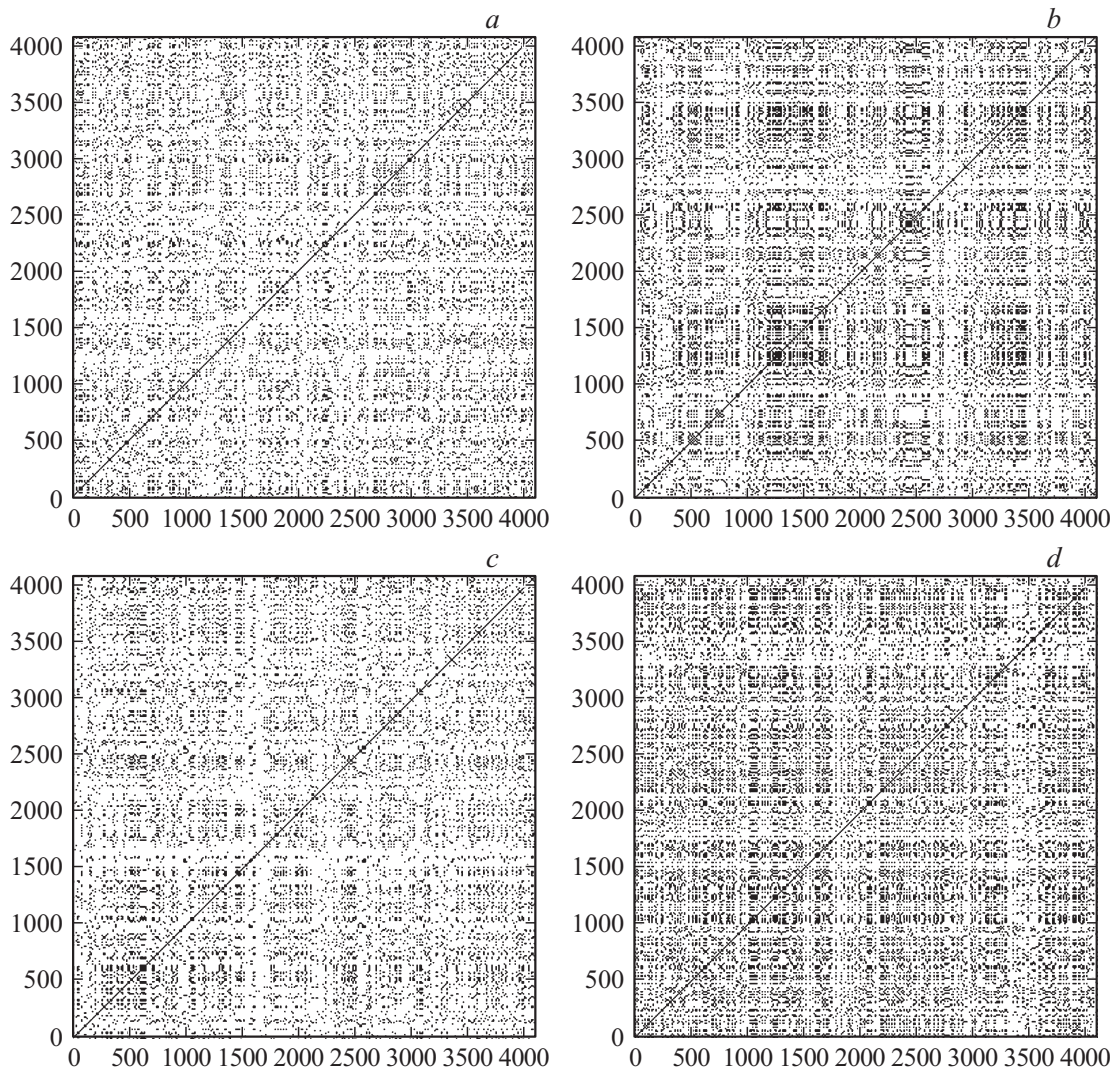


Рис. 4. Рекуррентные графики на начальных (*a, c*) и конечных (*b, d*) стадиях процесса разрушения для экспериментов АЕ42 (*a, b*) и АЕ43 (*c, d*).

отображать черным цветом, а далекие — белым. Близость точек определяется параметром ε_i . Если выбрать его слишком большим, то точки в основном окажутся близкими друг к другу, и график будет представлять собой поле черного цвета, а если слишком малым, то рекуррентных точек практически не будет. Отсюда следует, что способ выбора величины порога ε_i весьма важен для анализа конечного результата. Этот способ обсуждается в ряде работ (например, [26,27]), поэтому здесь на нем подробно останавливаться нет смысла. Отметим только, что для расчета были выбраны параметры $m = 1$, $\varepsilon_i = 0.1$. Выбранная величина порога, одинаковая для всех точек, не превышала десятых, а иногда и сотых долей максимального диаметра фазового пространства, как предлагалось в [28].

Для построения RP и расчета RQA использовался свободно распространяемый пакет программ CRP Toolbox [27]. На рис. 4 приведены рекуррентные графики процесса разрушения для экспериментов АЕ42 и АЕ43,

построенные по 4096 точкам процесса. Рис. 4, *a, c* соответствуют начальным стадиям процесса, а рис. 4, *b, d* — процессу ближе к концу разрушения. Диагональные темные линии (главные диагонали) отражают лишь тот факт, что точка i всегда рекуррентна самой себе. Точки на рис. 4, *a, c* представляются равномерно распределенными, что отвечает стохастическому процессу. Однако на рис. 4, *b, d* видна структурированность, что указывает на то, что по мере приближения к моменту разрушения в процессе проявляется детерминированность. На рис. 5, *a* приведен рекуррентный график для эксперимента АЕ44. На этом графике отчетливо проявляется фазовый переход порядок—беспорядок на начальной стадии процесса, причем упорядоченная фаза обладает ярко выраженным самоподобием. На рис. 5, *b* представлены зависимости от времени внешней осевой механической нагрузки и амплитуд сигналов акустической эмиссии. Вертикальными линиями на рис. 5, *b* отмечена область существования упорядоченной фазы. Корреляционная

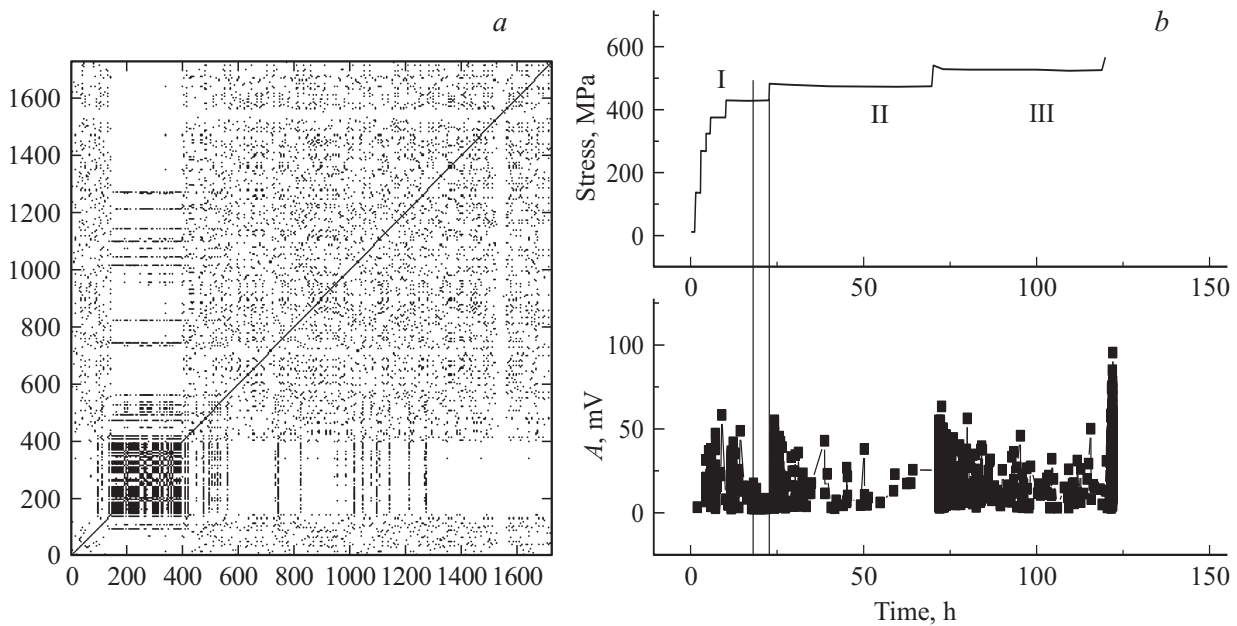


Рис. 5. *a*) Рекуррентный график для эксперимента АЕ44. *b*) Временные зависимости внешней приложенной нагрузки (вверху) и амплитуд акустической эмиссии (внизу). Вертикальными линиями выделена область существования упорядоченной структуры, показанной на части *a*.

фрактальная размерность, рассчитанная по координатам точек источников в упорядоченной фазе ($D_2 \approx 1.29$), оказывается значительно ниже, чем во всем остальном временном диапазоне ($D_2 \approx 2.59$ на участке II и на участке III). Как следует из рис. 5, *b*, упорядоченная структура разрушается при ступенчатом увеличении внешней нагрузки, а образуется без всякого видимого изменения внешнего воздействия. Анализ различных структур, проявляющихся на рекуррентных графиках, можно найти в работах [26,29,30].

Несмотря на наглядность рекуррентных графиков, представляет интерес знать количественные характеристики для их анализа и выявления изменений во времени. Для этой цели в [31] был разработан метод количественного рекуррентного анализа. В настоящей работе использованы следующие характеристики рекуррентных графиков [27].

1. Уровень возврата (recurrence rate — RR):

$$RR(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^T R_{ij}(r, m). \quad (6)$$

Эта величина представляет собой плотность рекуррентных точек на графике.

2. Детерминизм

$$DET = \frac{\sum_{i,j=1}^N D_{ij}}{\sum_{i,j=1}^N R_{ij}}, \quad (7)$$

где $D_{ij} = 1$, если точки (i, j) и $(i + 1, j + 1)$ или $(i - 1, j - 1)$ рекуррентны, и $D_{ij} = 0$ в противоположном случае. Таким образом, величина DET является

отношением числа рекуррентных точек, формирующих диагональные линии, параллельные главной диагонали, к полному числу рекуррентных точек. В случае хаотических, слабо коррелированных процессов либо вообще нет диагональных линий, либо эти линии очень короткие, в то время как для детерминированных процессов имеют место более длинные диагонали и меньшее число изолированных рекуррентных точек. В качестве меры детерминизма можно вводить также среднюю длину диагонали рекуррентного графика или длину максимальной диагонали l_{max} . В работе [32] отмечается, что l_{max} пропорциональна обратной величине наибольшего положительного показателя Ляпунова. Однако в [27] показано, что эта величина скорее связана с нижним пределом суммы положительных показателей Ляпунова.

На рис. 6 приведены зависимости от времени уровня возврата RR и детерминизма DET для экспериментов АЕ42 (*a*) и АЕ43 (*b*). Отчетливо видно, что по крайней мере на стационарной стадии процесса эти величины растут, что и означает увеличение роли детерминированной составляющей АЕ в процессе разрушения. Границы области стационарности отмечены вертикальными линиями. Более того, рост величины DET, определяемой рекуррентными точками, образующими диагональные линии, означает увеличение доли периодической компоненты детерминированной составляющей сигнала [30]. На рис. 6, *c* эти же характеристики приведены для эксперимента АЕ44, в котором образец пропитывался водой перед механическими испытаниями. Как следует из этого рисунка, закономерности временного поведения RR и DET совершенно иные. Основные изменения этих величин происходят при скачкообразном измене-

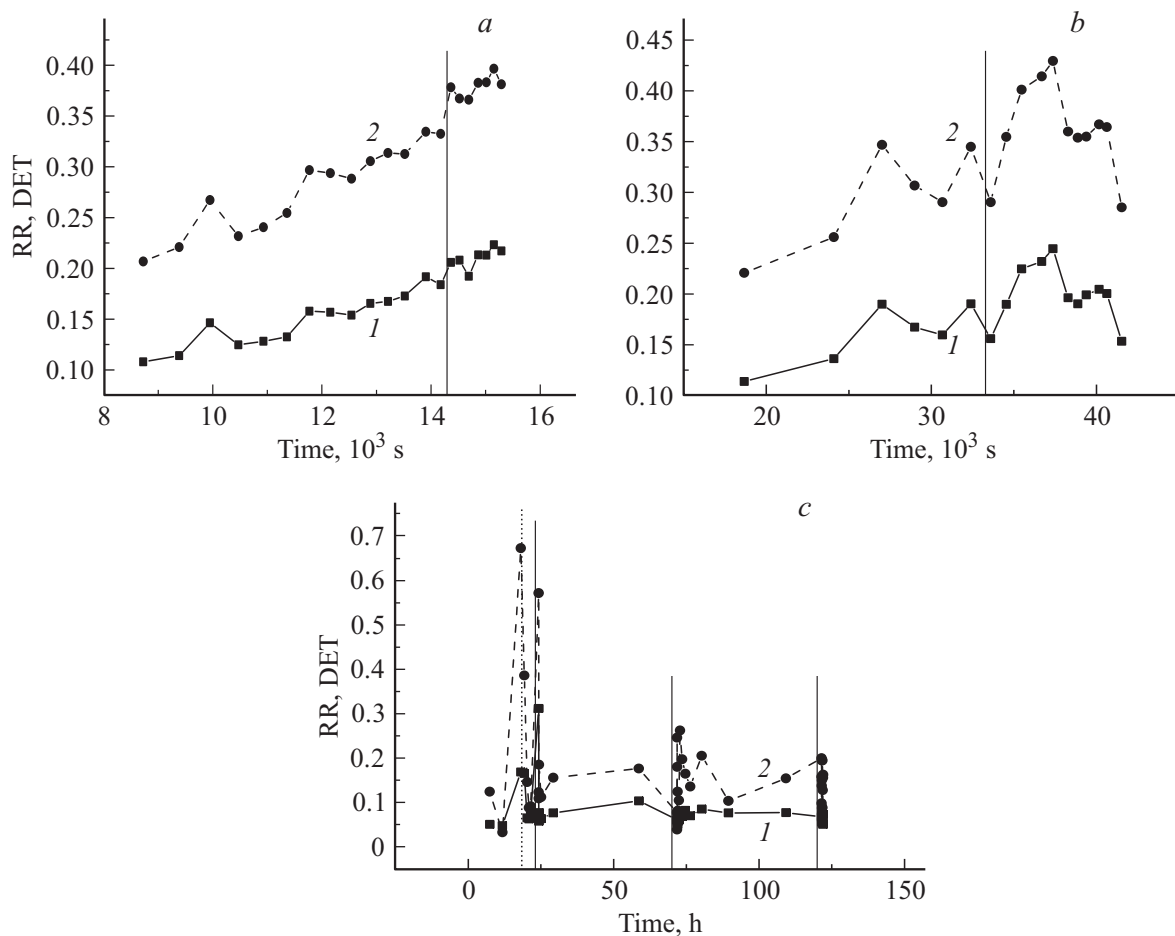


Рис. 6. Временные зависимости параметров рекуррентных графиков RR (1) и DET (2) для экспериментов AE42 (a), AE43 (b), AE44 (c). Вертикальные линии на частях a, b отмечают конец стационарной стадии приложения нагрузки.

нии механической нагрузки, которое отмечено на рисунке сплошными вертикальными линиями. Между этими точками величины RR и DET имеют те же тенденции, что и в экспериментах с сухими образцами: рост детерминированности по мере развития процесса. Начало фазового перехода, отмеченное на рис. 6, с штриховой вертикальной линией, также характеризуется скачкообразным увеличением RR и DET, хотя никаких изменений внешней нагрузки в этой точке не происходило.

4. Заключение

Изучены особенности динамического поведения амплитуд сигналов акустической эмиссии при разрушении гранитных образцов. Для сухих образцов выявлено отклонение корреляционной фрактальной размерности от размерности лагового пространства $D(m)$, увеличивающееся по мере приближения материала к разрушению, что указывает на увеличение динамического (детерминированного) вклада в процесс по сравнению со стохастическим. Об этом же свидетельствуют появление структурированности рекуррентных графиков и временное поведение описывающих их параметров.

Установлено согласие поведения в зависимости от времени величины $D(m=3)$ с корреляционной фрактальной размерностью D_2 , рассчитанной по координатам точек источников сигналов, что позволяет судить о поведении этой важной характеристики процесса разрушения [6,22] лишь на основании сведений об амплитудах сигнала, не имея данных пространственной локации их источников.

Для сухих образцов выявлено увеличение размерности вложения динамического аттрактора по мере приближения к моменту разрушения, что указывает на увеличение числа степеней свободы системы, участвующих в процессе, и еще раз подтверждает сделанное ранее предположение [23] о механизме разрушения таких материалов как эволюции к самоорганизованному критическому состоянию.

Для пропитанного водой перед механическими испытаниями гранитного образца сигналы акустической эмиссии выявляют ярко выраженный фазовый переход порядок–беспорядок, в процессе которого формируется фрактальная структура с размерностью $D_2 \approx 1.29$. Эта структура разрушается при ступенчатом увеличении внешнего механического напряжения.

Список литературы

- [1] F. Takens. In: Dynamical systems and turbulence / Eds D.A. Rand, L.S. Young. Lecture notes in Math. Springer, Heidelberg–N. Y. (1981). V. 898. P. 366.
- [2] А.В. Новиков. В сб.: Тр. 49-й науч. конф. МФТИ „Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук: аэрофизика и космические исследования“. МФТИ, М. (2006). С. 188.
- [3] Р.К. Хисматуллин. Нефтегазовое дело 2, 1 (2006).
- [4] S. Wanqing, Y. Jianguo, Q. Chen. In: Proc. of the 2007 Int. Conf. on computational science and its applications (ICCSA-2007). Springer (2007). Pt. 1. P. 469.
- [5] J. Xi, W. Han, Y. Liu. Third Int. Workshop on advanced computational intelligence. Suzhou Jiangsu, China (2010). P. 612.
- [6] S. Kacimi, S. Laurens. J. Appl. Phys. **106**, 024909 (2009).
- [7] В.С. Захаров. Нелинейный мир **8**, 234 (2010).
- [8] Е.Н. Бурдасов, М.Ю. Сариллов. Изв. Самар. науч. центра РАН **14**, 1, 344 (2012).
- [9] В.В. Адушкин, С.Б. Турунтаев. Техногенные процессы в земной коре (опасности и катастрофы). ИНЭК, М. (2005). 552 с.
- [10] D.A. Lockner, J.D. Byerlee, V. Kuksenko, A. Ponomarev, A. Sidorin. In: Fault mechanics and transport properties of rocks / Eds B. Evans, T.-F. Wong. Academic Press, London (1992). P. 3.
- [11] D.A. Lockner, J.D. Byerlee, V. Kuksenko, A. Ponomarev, A. Sidorin. Nature **350**, 39 (1991).
- [12] S.A. Stanchits, D.A. Lockner, A.V. Ponomarev. Bull. Seismol. Soc. Am. **93**, 4, 1803 (2003).
- [13] P. Grassberger, I. Procaccia. Phys. Rev. Lett. **50**, 346, (1983).
- [14] Р. Балеску. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Мир, М. (1978). Т. 2. 400 с.
- [15] A.A. Tsonis, J.B. Elsner, K.P. Georgakakos. J. Atmos. Sci. **50**, 2549 (1993).
- [16] R. Hegger, H. Kantz. Chaos. **9**, 413, (1999).
- [17] А.А. Меклер. Вестн. новых медицинских технологий **14**, 73, (2007).
- [18] J. Theiler. Phys. Rev. A **34**, 2427 (1986).
- [19] В.Л. Гиляров. ФТТ **36**, 2247 (1994).
- [20] В.Б. Смирнов, А.В. Пономарев, А.Д. Завьялов. Физика Земли **1**, 38 (1995).
- [21] V.L. Hilarov. Mod. Simul. Mater. Sci. Eng. **6**, 337 (1998).
- [22] B. Kennel, R. Brown, H.D.I. Abarbanel. Phys. Rev. A **45**, 3403 (1992).
- [23] В.Л. Гиляров. ФТТ **47**, 808, (2005).
- [24] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld. Phys. Rev. A **38**, 364, (1988).
- [25] J.-P. Eckmann, S.O. Kampoost, D. Ruelle. Europhys. Lett. **4**, 973 (1987).
- [26] Н.В. Золотова, Д.И. Понявин. Уч. зап. СПбГУ № 438. Вопр. геофизики **38**, 203 (2005).
- [27] N. Marwan, M.C. Romano, M. Thiel, J. Kurths. Phys. Rep. **438**, 237 (2007).
- [28] G.M. Mindlin, R. Gilmore. Physica D **58**, 229 (1992).
- [29] N. Marwan, J. Kurths. Phys. Lett. A **336**, 349 (2005).
- [30] A. Fabretti, M. Ausloos. Int. J. Mod. Phys. C **16**, 671 (2005).
- [31] J.P. Zbilut, C.L. Webber. Phys. Lett. A **171**, 199 (1992).
- [32] L.L. Trulla, A. Giuliani, J.P. Zbilut, C.L. Webber. Phys. Lett. A **233**, 255 (1996).