01

О вычислении интенсивности излучения электромагнитной энергии неподвижной ферромагнитной сферической частицей, находящейся в постоянном и однородном магнитном поле

© С.О. Гладков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) МАИ,
125993 Москва, Россия
e-mail: sglad@newmail.ru

(Поступило в Редакцию 27 марта 2014 г. В окончательной редакции 9 декабря 2014 г.)

Решена классическая задача о вычислении энергии ЭМ-излучения ферромагнитной сферической частицей в условиях, когда направления спонтанной намагниченности **M** ферромагнетика и внешнего постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0$ не совпадают. Получена зависимость интенсивности ЭМ-излучения в виде функции от произведения κR, где $\kappa = \omega_0/c$ — волновой вектор, R — радиус частицы, а $\omega_0 = \gamma_e H_0$ — частота прецессии поперечной составляющей вектора намагниченности $\mathbf{M}_\perp$ $(\mathbf{M} = (\mathbf{M}_\perp, \mathbf{M}_z))$.

Как выяснилось из знакомства с оригинальным и литературными источниками (см., например, [1–6]), в настоящее время отсутствуют какие-либо теоретические расчеты и экспериментальные измерения, касающиеся исследования интенсивности излучения переменного ЭМ-поля неподвижной ферромагнитной частицей радиуса R, находящейся под воздействием внешнего постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Например, в работе [1] исследовалось поглощение переменного магнитного поля ферромагнитным материалом и вычислялась продольная магнитная восприимчивость. В сравнительно недавней монографии [6] известным физиком-теоретиком в области магнетизма Р. Уайтом приведено множество теоретических и экспериментальных результатов по различным физическим свойствам магнитных веществ, однако нет ни одной ссылки на какие-либо работы, посвященные исследованию излучения ЭМ-поля неподвижными магнитными телами [2–5]. В работе [7] изучаются явления, связанные с вращением ферромагнитной сферической частицы в ЭМ-поле и вблизи нагретой поверхности, а вот процесс, скажем так, вторичного переизлучения ЭМ-поля частицей не исследуется, к сожалению.

Отмеченные обстоятельства заставили нас рассмотреть вопрос о возможном излучении ЭМ-поля неподвижной сферической частицей, находящейся под воздействием постоянного магнитного поля, и найти решение этой классической задачи.

Как было отмечено в [8], если направления $\mathbf{H}_0$ и спонтанной намагниченности $\mathbf{M}_0$ не совпадают, то будет иметь место дополнительное излучение переменного ЭМ-поля на частоте $\omega_0 = \gamma_e H_0$. Курс электродинамики [8] (как, впрочем, и остальной курс теоретической физики) построен таким образом, что по мере изложения основного материала после очередных параграфов приводится несколько задач по теме и их краткое решение со ссылкой на оригинальный источник. Поскольку задача об излучении ЭМ-поля неподвижной сферической частицей не изложена в [8] и не даны соответствующие ссылки, то это лишний раз (косвенно, конечно) подтверждает тот факт, что подобная задача еще не решалась. Решение дается только для случая, если направления $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{M}_0$ совпадают.

Мы будем решать эту задачу в том случае, если направления внешнего постоянного магнитного поля и намагниченности не совпадают, и в более простом случае, когда ферромагнитная сферическая частица неподвижна. Оси координат выберем следующим образом: внешнее магнитное поле направим вдоль оси z, а спонтанную намагниченность $\mathbf{M}_0$ — вдоль оси анизотропии ферромагнетика. В условиях прецессии поперечных составляющих намагниченности относительно направления внешнего магнитного поля должна будет проявиться зависимость намагниченности от времени. Именно это обстоятельство и указывает на возможность вторичного излучения ЭМ-поля неподвижной ферромагнитной частицей. Чтобы получить интересующую нас временную зависимость, следует воспользоваться классическим уравнением Ландау–Лифшица–Гильберта (ЛЛГ), которое имеет вид

$$\mathbf{M} = \gamma_e[\mathbf{H}_0 \times \mathbf{M}] + \alpha\left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \times \mathbf{M}\right],$$

где гиромагнитное отношение $\gamma_e = \frac{|e|}{2mc}$, e — заряд электрона, m — его масса, α — постоянная Гильберта, ответственная за релаксацию. Ее вычисление приведено, например, в работе [9]. Мы будем решать уравнение ЛЛГ в случае, когда $\alpha = 0$. В этом упрощенном случае решение уравнения ЛЛГ дает $M_x = M_0 \sin\beta \sin\omega_0 t$, $M_y = M_0 \sin\beta \cos\omega_0 t$, $M_z = M_0 \cos\beta$, где β — угол между векторами **M** и $\mathbf{H}_0$ (рис. 1). Таким образом, задача сводится к вычислению ЭМ-излучения, порождаемого прецессией намагниченности вдоль оси направления магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Чтобы решить эту задачу, запишем

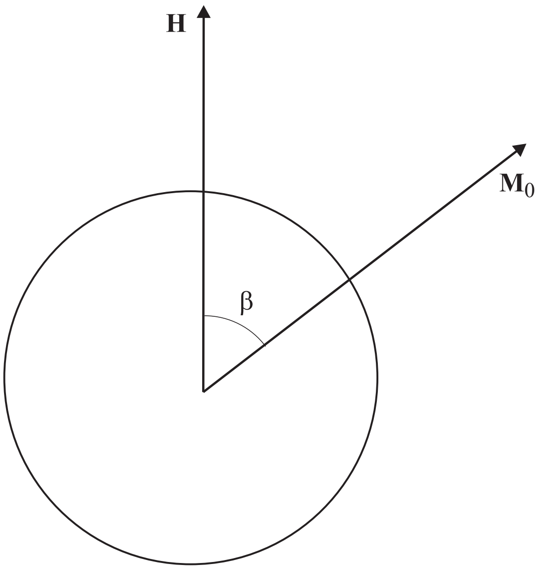

Рис. 1. Схематическая ориентация внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$ и спонтанной намагниченности $\mathbf{M}_0$.

систему уравнений Максвелла в виде

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{cases} \tag{1}$$

где магнитная индукция $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, μ — магнитная проницаемость, а электрическая индукция $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, где ε — диэлектрическая проницаемость.

В рамках специфики решаемой задачи представим вектор магнитной индукции в виде $\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} + 4\pi\mathbf{M}$, где $\mathbf{h}$ — магнитное поле вне сферической частицы, порождаемое ее намагниченностью $\mathbf{M}(t)$. В результате систему уравнений (1) можно переписать таким образом

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{h} = 0, & \text{(2a)} \\ \operatorname{div}\mathbf{e} = 0, & \text{(2b)} \\ \operatorname{rot}\mathbf{e} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \dfrac{4\pi}{c}\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, & \text{(2c)} \\ \operatorname{rot}\mathbf{h} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, & \text{(2d)} \end{cases}$$

где $\mathbf{e}$ — появляющееся в результате прецессии намагниченности $\mathbf{M}$ внешнее (как и $\mathbf{h}$) электрическое поле. Будем искать решение системы уравнений (2) не в привычном виде, когда магнитный потенциал $\mathbf{A}$ вводится соотношением $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, а электрическое поле $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, а в более удобном в рамках нашей задачи виде

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \operatorname{rot}\mathbf{P}, \\ \mathbf{h} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathbf{P}$ — некоторый полярный вектор, который нам следует найти. С учетом этого факта видим, что уравнение (2a) удовлетворяется автоматически, а из (2b) следует, что

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = 0. \tag{4}$$

Уравнение (2c) также удовлетворяется автоматически, а вот уравнение (2d) приводит к уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{P} = -\frac{1}{c}\ddot{\mathbf{P}} - \frac{4\pi}{c}\dot{\mathbf{M}}$$

или с учетом (4) получим

$$\Delta\mathbf{P} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{P}} = \frac{4\pi}{c}\dot{\mathbf{M}}. \tag{5}$$

Его решение будем искать в виде

$$\mathbf{P} = u(\mathbf{r})e^{-i\omega_0 t}, \tag{6}$$

поскольку $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{0\perp}e^{-i\omega_0 t}$, где $\omega_0 = \gamma_e H_0$. В результате для функции $u(\mathbf{r})$ получается уравнение

$$\Delta\mathbf{u} + \kappa^2\mathbf{u} = -4\pi i\kappa\mathbf{M}_{0\perp}, \tag{7}$$

где волновой вектор $\kappa = \omega_0/c$. Модуль вектора $\mathbf{M}_{0\perp}$ есть $M_{0\perp} = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2} = M_0\sin\alpha$. Вне сферического тела решение уравнения (7) будет

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = i\kappa\mathbf{M}_{0\perp}\int\limits_V \frac{e^{i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV', \tag{8}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра сферы в точку наблюдения вне сферы. Поэтому, согласно (6),

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = i\kappa\mathbf{M}_{0\perp}e^{-i\omega_0 t}\int\limits_V \frac{e^{i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'. \tag{9}$$

А значит, электрическое поле будет

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot}\mathbf{P} = i\kappa e^{i\omega_0 t}\operatorname{rot}\left[\mathbf{M}_{0\perp}\int\limits_V \frac{e^{i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'\right]. \tag{10}$$

Магнитное же поле в соответствии с (3) есть

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{P}}}{c} = \kappa^2\mathbf{M}_{0\perp}e^{-i\omega_0 t}\int\limits_V \frac{e^{i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'. \tag{11}$$

Фактически нам осталось вычислить лишь интеграл

$$J = \int\limits_V \frac{e^{i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'. \tag{12}$$

Для его вычисления воспользуемся простым приемом дифференцирования по параметру κ. Имеем

$$\frac{\partial J}{\partial \kappa} = i \int\limits_V e^{i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \tag{13}$$

Переходя здесь к сферической системе координат, найдем

$$\frac{\partial J}{\partial \kappa} = 2\pi i \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi e^{i\kappa\sqrt{r^2-2rr'\cos\theta+r'^2}} r'^2 dr' \sin\theta d\theta. \tag{14}$$

Внутренний интеграл по угловой переменной θ находится довольно просто и для него получаем, что

$$\begin{aligned} S(\kappa, r, r') = S &= \int\limits_{-1}^{1} e^{i\kappa\sqrt{a-bx}} dx \\ &= \frac{e^{i\kappa r}}{rr'} \Bigg[\frac{(r+r')e^{i\kappa r'} - (r-r')e^{-i\kappa r'}}{i\kappa} \\ &\quad + \frac{1}{\kappa^2} \left(e^{i\kappa r'} - e^{-i\kappa r'} \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{15}$$

где $a = r^2 + r'^2$, $b = 2rr'$. Он вычисляется очевидной заменой $y = \sqrt{a - bx}$. Поэтому искомый интеграл будет

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \int\limits_0^R r'^2 dr' \int S(\kappa, r, r') d\kappa \\ &= \frac{4\pi}{\kappa^3 r} e^{i\kappa T} (\sin\kappa R - \kappa R \cos\kappa R). \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим здесь, что внутренний интеграл по κ находится тривиально с помощью интегрирования по частям.

В результате из (9) получим

$$\mathbf{P} = \frac{4\pi i \mathbf{M}_{0\perp} e^{-i\omega_0 t + i\kappa r}}{\kappa^2 r} (\sin\kappa R - \kappa R \cos\kappa R). \tag{17}$$

И значит из (10) и (11) получаем в результате простого дифференцирования

$$\mathbf{e} = \frac{4\pi i}{\kappa^2 r^3} e^{i\kappa r - i\omega_0 t} (\sin\kappa R - \kappa R\cos\kappa R)(i\kappa R - 1)[\mathbf{r} \times \mathbf{M}_{0\perp}], \tag{18}$$

$$\mathbf{h} = \frac{4\pi \mathbf{M}_{0\perp}}{\kappa r} e^{i\kappa r - i\omega_0 t} (\sin\kappa R - \kappa R \cos\kappa R). \tag{19}$$

Следовательно, интенсивность излучения, приходящаяся на единицу поверхности сферы радиуса r в единицу времени, будет

$$\begin{aligned} I &= \frac{c}{4\pi} \left(|\mathbf{e}|^2 + |\mathbf{h}|^2 \right) \\ &= \frac{2\pi c M_0^2 \sin^2\beta}{\kappa^2 r^2} (\sin\kappa R - \kappa R \cos\kappa R)^2 \\ &\quad \times \left[1 + \left(1 + \frac{1}{\kappa^2 r^2} \right) \sin^2\gamma \right], \end{aligned} \tag{20}$$

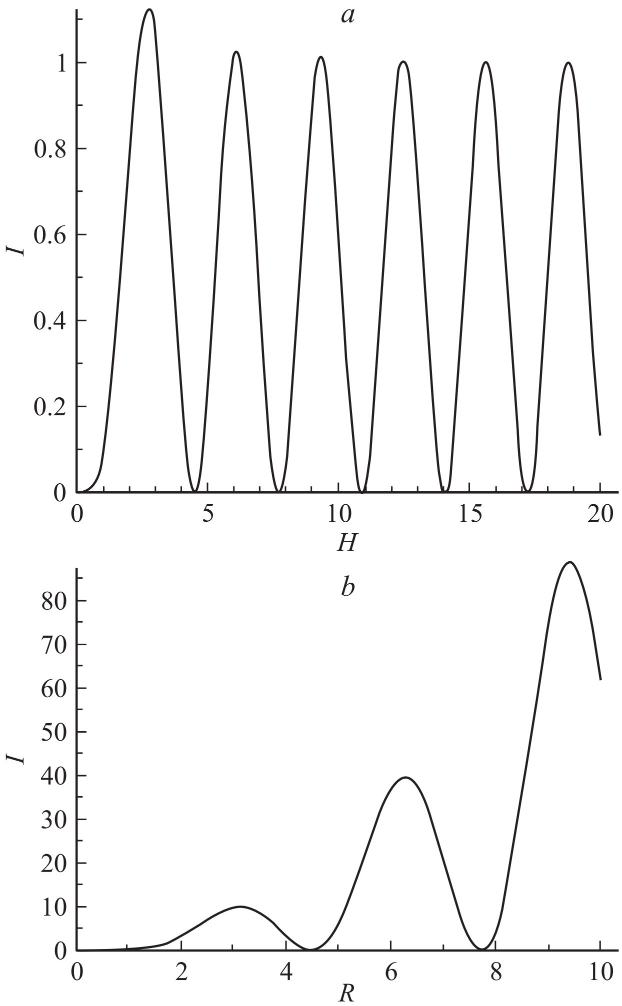

Рис. 2. Зависимость интенсивности излучения от магнитного поля H_0 (a) в двух масштабах и от радиуса ферромагнитной частицы R (b) тоже в двух масштабах.

где γ — угол между векторами $\mathbf{M}_{0\perp}$ и $\mathbf{r}$. Напомним, что $M_{0\perp}^2 = M_0^2 \sin^2\beta$.

Таким образом, окончательная общая формула (20) позволяет ответить на поставленный вначале настоящей работы вопрос о количественной оценке интенсивности излучения сферической ферромагнитной частицей порождаемого ей внешнего электромагнитного поля при условии, что направления спонтанной намагниченности $\mathbf{M}$ и приложенного постоянного поля $\mathbf{H}_0$ не совпадают. Если эти векторы параллельны, то угол $\beta = 0$ и $I = 0$. В том случае, если внешнее магнитное поле очень слабое или отсутствует $\left(\kappa = \frac{\gamma_e H}{c} \to 0\right)$, интенсивность стремится к нулю по закону $I \sim H^4$. В случае малых размеров частиц (например, если это ферромагнитные наночастицы), когда $\kappa R \ll 1$, из (20) находим

$$I \approx \frac{2\pi}{9} \frac{c M_0^2 \sin^2\beta (\kappa R)^4 R^2}{r^2} \left(1 + \frac{\sin^2\gamma}{\kappa^2 r^2} \right). \tag{21}$$

А если $\kappa R \gg 1$, то можно наблюдать сильные осцилляции интенсивности по магнитному полю H (напомним,

$\kappa = \frac{\gamma_e H_0}{c}$)

$$I \approx \frac{2\pi c M_0^2 R^2 \sin^2\beta}{r^2}\,(1+\sin^2\gamma)\cos^2\kappa R. \qquad (22)$$

Поведение $I(H, R)$ иллюстрирует рис. 2.

Подводя итог, отметим, что

1. Вычислено распределение ЭМ-поля вне неподвижной ферромагнитной сферической частицы радиуса R, находящейся под воздействием внешнего постоянного магнитного поля H_0.
2. Проиллюстрировано осциллирующее распределение интенсивности в зависимости от внешнего магнитного поля H_0 и радиуса частицы R.

Список литературы

[1] *Каганов М.И., Цукерник В.М.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. В. 3. С. 823–829.
[2] *Твердохлебов А.Н., Шустер А.Л.* // ЖТФ. 1972. Т. 42. № 9. С. 2477–2484.
[3] *Линьков А.В., Урман Ю.М.* // ЖТФ 1973. Т. 43. № 1. С. 2472–2480.
[4] *Золотарев Н.А.* // Известия вузов. Электромеханика. 1974. № 6. С. 592–594.
[5] *Ханукаев Ю.И.* // МТТ. 1977. № 3. С. 28–38.
[6] *Уайт Р.* Квантовая теория магнетизма. М.: Мир. 1985. 299 с.
[7] *Дедков Г.В., Кясов А.А.* // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. В. 13. С. 56–61.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Т. 8. М.: Наука. 1982. 620 с.
[9] *Gladkov S.O., Bogdanova S.B.* // Journ. of Magnetism and Magnetic Materials (JMMM). 2014. Vol. 368. P. 324–327.