

Квантовый эффект Холла в полупроводниковых системах с квантовыми точками и антиточками

© Я.М. Бельтюков*, А.А. Грешнов*+†

* Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук, 194021 Санкт-Петербург, Россия

+ Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет „ЛЭТИ“ им. В.И. Ульянова (Ленина), 197376 Санкт-Петербург, Россия

(Получена 31 июля 2014 г. Принята к печати 23 сентября 2014 г.)

Проведено теоретическое исследование целочисленного квантового эффекта Холла в полупроводниковых системах с квантовыми точками и антиточками в зависимости от температуры. Обнаружено, что условия локализации носителей в системах квантовых точек благоприятствуют наблюдению квантового эффекта Холла при более высоких температурах, чем в системах с квантовыми ямами. Наши численные результаты показывают, что фундаментальное плато, соответствующее переходу между основным и первым возбужденным уровнями Ландау, может сохраняться вплоть до температур $T \sim 50$ К — на порядок выше, чем для квантовых ям. Для практической реализации квантового эффекта Холла при таких температурах требуются системы квантовых точек с контролируемыми характеристиками: оптимальным размером и концентрацией, умеренными флуктуациями геометрии и состава, и желателен упорядоченным расположением, при этом более предпочтительны квантовые антиточки.

1. Введение

Традиционно исследования квантового эффекта Холла проводятся главным образом на двумерных полупроводниковых системах, в подзонах размерного квантования структур с квантовыми ямами или одиночных гетеропереходов. Экспериментальные условия наблюдения эффекта для двумерных систем оказываются достаточно жесткими: помимо сильных магнитных полей необходимы достаточно низкие температуры ($T \lesssim 10$ К), обусловленные конкуренцией упругих процессов рассеяния, способствующих локализации, с неупругими (например, электрон-фононным рассеянием [1]), делокализующими носители. В то же время хорошо известно, что наличие естественных или искусственных неоднородностей в плоскости структуры (квантовых точек) может существенно способствовать усилению локализации, приводя к увеличению эффективности работы оптоэлектронных приборов на основе таких структур [2,3]. Поскольку в литературе практически отсутствуют сведения об экспериментальных исследованиях квантового эффекта Холла в структурах с квантовыми точками (за исключением работ [4,5], в которых исследовались образцы недостаточного, на наш взгляд, качества для наблюдения эффекта, рассматриваемого в данной работе), равно как и теоретические расчеты и оценки, нам представляется актуальным исследовать вопрос о возможности смягчения условий наблюдения целочисленного квантового эффекта Холла в этих системах по сравнению с традиционными двумерными.

2. Теория

В настоящей работе построена теория целочисленного квантового эффекта Холла в полупроводниковых

системах с квантовыми точками и антиточками, и на ее основе с применением высокоэффективного численного метода проведены расчеты зависимостей холловской проводимости от фактора заполнения для ряда моделей взаимного расположения квантовых точек при температурах от 10 до 60 К. Рассмотрено влияние таких факторов, как плотность квантовых точек, их размер и величина локализирующего потенциала. В рамках простой модели дана оценка доли локализованных электронных состояний, определяющих возможность существования плато квантового эффекта Холла в таких структурах вплоть до температур порядка 50 К. В заключение формулируются требования к качеству структур с квантовыми точками, обсуждается негативный эффект мелкомасштабных флуктуаций состава твердого раствора, а теоретические результаты сопоставляются с имеющимися в литературе экспериментальными данными.

В настоящее время под термином „квантовые точки“ понимается широкий круг систем, в которых реализуется полное (трехмерное) размерное квантование носителей: от коллоидных квантовых точек (нанокристаллов) до отдельных квантовых точек, электростатически выделенных в двумерном электронном газе. Мы же будем ориентироваться на системы квантовых точек, формирующихся при эпитаксиальном росте слоев по механизму Странского–Крастанова. В этом случае можно рассчитывать, что параметры квантовых точек будут варьироваться не слишком сильно, так что в идеале они будут образовывать упорядоченный массив [6,7], а шероховатости двумерного (смачивающего) слоя и соответствующий им случайный потенциал будут малы. На практике часто оказывается, что эффективный потенциал получающихся в результате роста квантовых точек определяется не только их размерами, но и составом (иначе говоря, растут квантовые точки InGaAs вместо ожидавшихся InAs [8]), поэтому параболическое прибли-

† E-mail: a_greshnov@hotmail.com

жение для их потенциала является более адекватным, чем приближение трехмерной прямоугольной ямы [9,10].

Для описания динамики носителей во внешнем магнитном поле мы будем использовать стандартную модель замагниченного двумерного электронного газа в базисе „полосок Ландау“, описанную в работах [1,11], взяв в качестве эффективного потенциала, действующего на электроны, сумму потенциалов квантовых точек и случайного рассеивающего потенциала,

$$V(\mathbf{r}) = V_{\text{QD}}(\mathbf{r}) + V_{\text{dis}}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

при этом \mathbf{r} — двумерный радиус-вектор в плоскости структуры (мы сделали свертку по третьей координате). В соответствии с вышесказанным будем считать, что потенциал квантовых точек вблизи минимума можно аппроксимировать параболическим, а конечность потенциальной ямы (фактически — конечный размер квантовой точки) учтем с помощью функции Гаусса:

$$V_{\text{QD}}(\mathbf{r}) = - \sum_i V_i \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2}{2d_i^2}\right), \quad (2)$$

где \mathbf{r}_i , V_i и d_i — положение, глубина и радиус i -й квантовой точки. Для формирования матрицы гамильтониана удобно разложить потенциал (1) в ряд Фурье $V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ и использовать формулу

$$\begin{aligned} \langle n_1 k_1 | \hat{H} | n_2 k_2 \rangle &= \hbar\omega_c \delta_{n_1, n_2} \delta_{k_1, k_2} (n_1 + 1/2) \\ &+ \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} \langle n_1 k_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | n_2 k_2 \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

где $|n, k\rangle$ — базис „полосок“ уровня Ландау с номером n , а явная формула для $\langle n_1 k_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | n_2 k_2 \rangle$ дана в работе [11]. При этом, поскольку обычно амплитуда потенциала квантовых точек превышает циклотронную энергию $\hbar\omega_c$, в разложении одночастичных волновых функций ($\hat{H}|\alpha\rangle = \varepsilon_{\alpha}|\alpha\rangle$) по базисным,

$$|\alpha\rangle = \sum_{nk} C_{\alpha nk} |nk\rangle, \quad (4)$$

необходимо удерживать несколько уровней Ландау. Для определения проводимости нам также потребуются матричные элементы оператора скорости $v_{x,y}$, имеющие следующий вид в базисе „полосок“:

$$\begin{aligned} \langle n_1 k_1 | v_x | n_2 k_2 \rangle &= \frac{v_B}{\sqrt{2}} \delta_{k_1, k_2} \\ &\times \left(\delta_{n_1-1, n_2} \sqrt{n_1} + \delta_{n_1+1, n_2} \sqrt{n_1+1} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \langle n_1 k_1 | v_y | n_2 k_2 \rangle &= i \frac{v_B}{\sqrt{2}} \delta_{k_1, k_2} \\ &\times \left(\delta_{n_1-1, n_2} \sqrt{n_1} - \delta_{n_1+1, n_2} \sqrt{n_1+1} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $v_B = \hbar/m^*l_B$, а $l_B = (\hbar c/eB)^{1/2}$ — магнитная длина.

Микроскопический расчет проводимости квантово-холловской системы при отличной от нуля температуре представляет собой, как показано в работе [1], достаточно сложную задачу, требующую учета переходов между точными состояниями одночастичной задачи (4) в результате электрон-фононного взаимодействия, что приводит к грандиозному росту объема необходимых компьютерных вычислений. Поскольку в случае квантовых точек расчет необходимо выполнять для достаточно протяженной системы с учетом смешивания многих уровней Ландау, в данной работе мы воспользуемся полуфеноменологическим подходом, заменив δ -функции в определении квантового коррелятора скоростей w_{xy} лапласианами,

$$w_{xy}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{\alpha, \beta} \text{Im}\{(v_x)_{\alpha\beta}(v_y)_{\beta\alpha}\} D(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\alpha}) D(\varepsilon_2 - \varepsilon_{\beta}), \quad (7)$$

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + \varepsilon^2}. \quad (8)$$

При этом связь между параметром уширения энергетических уровней δ и температурой T можно восстановить из асимптотического поведения ширин переходов между соседними плато квантового эффекта Холла от температуры, которая имеет вид $\Delta B \propto T^{\kappa}$, где $\kappa \approx 0.4$ [12]. Численные расчеты показывают, что такое соотношение выполняется при

$$\delta(T) = CT^2, \quad (9)$$

где численное значение константы C мы определяем из сопоставления расчетных магнетотранспортных кривых с экспериментальными. Знание функции w_{xy} позволяет найти холловскую проводимость по следующей формуле:

$$\sigma_{xy}(\varepsilon) = \frac{2e^2\hbar}{S} \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon} \int_{\varepsilon_2=\varepsilon}^{\infty} \frac{w_{xy}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2, \quad (10)$$

где ε — уровень Ферми, связанный посредством фактора заполнения ν с концентрацией носителей n_s .

Непосредственное применение формулы (7) для расчета w_{xy} (и соответственно σ_{xy}) требует знания всех матричных элементов оператора скорости, для чего необходимо определить все собственные функции одночастичного гамильтониана \hat{H} . Время численного решения такой задачи растет пропорционально шестой степени линейного размера исследуемой системы L (т.е. увеличивается в 64 раза при изменении L в 2 раза), поэтому лобовой путь оказывается тупиковым при $L \sim 0.1$ мкм, не говоря уже о $L \sim 1$ мкм, и необходим поиск „обходных путей“. Заметим, что на самом деле вычисление собственных функций является лишь промежуточным этапом, так как в конечный ответ для холловской проводимости σ_{xy} собственные функции входят лишь в усредненном виде. Не так давно был

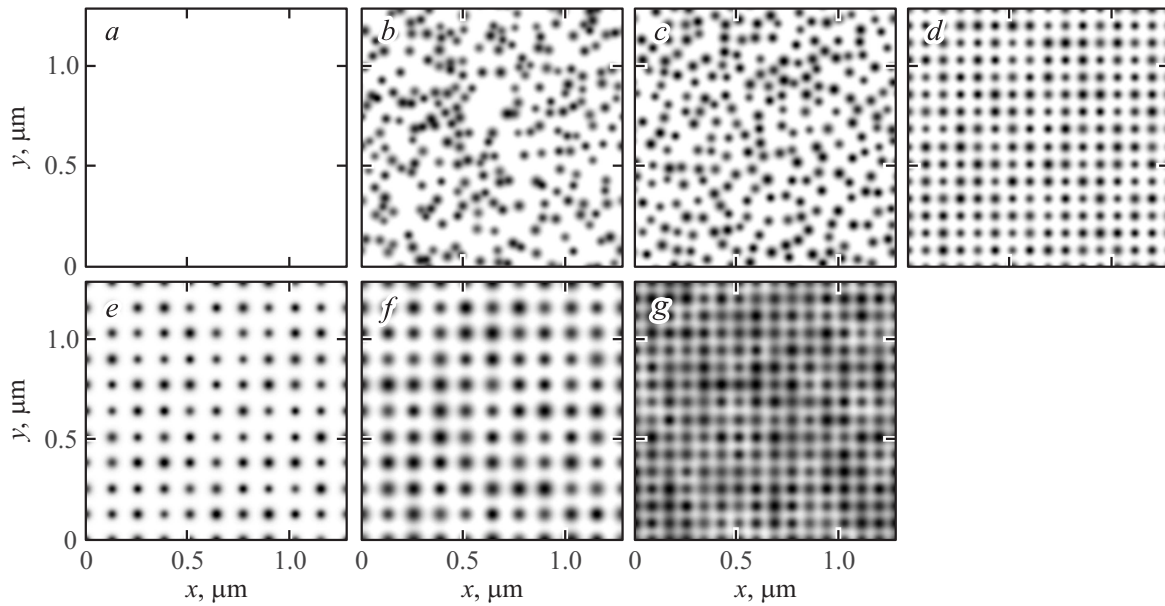


Рис. 1. Пространственное распределение потенциала квантовых точек для моделей (a)–(g), описанных в тексте статьи.

разработан метод KPM (kernel polynomial method), позволяющий рассчитывать плотность состояний, проводимость и другие усредненные характеристики без явного вычисления собственных функций [13], который мы и используем, приспособив его к решению поставленной задачи. В Приложении I кратко описана схема этого метода (подробнее — в обзоре [14]).

3. Результаты и обсуждение

В качестве материальной системы для проведения численных расчетов мы выбрали квантовые точки InGaAs, считая, что локализирующий потенциал создается в местах повышенного содержания In, при этом масштаб потенциала сравним с циклотронной энергией (превышает ее лишь в несколько раз), а его случайная компонента мала. Такое предположение достаточно логично, учитывая, что типичные оптические спектры квантовых точек InAs лежат выше отметки 1 эВ [15], в то время как запрещенная зона материала InAs составляет лишь 0.4 эВ. Об этом же свидетельствует и умеренная величина g -фактора в этих структурах: согласно работе [16] $g^* \approx 0.8$, что на порядок меньше, чем в объемном материале InAs. Поэтому при рассматриваемых нами относительно высоких температурах ($T \gtrsim 10$ К) спиновым расщеплением можно пренебречь, и учесть спин простым удвоением единиц измерения холловской проводимости. Масса электрона в квантовой точке InGaAs была принята равной $m^* = 0.04m_0$, что при магнитном поле $B = 10$ Т дает циклотронную энергию $\hbar\omega_c \approx 30$ мэВ. Моделирование производилось в пределах квадрата 1.3×1.3 мкм, на стороне которого укладывалось 160 магнитных длин ($l_B = (\hbar c/eB)^{1/2} \approx 8$ нм),

выбор размера моделируемой области диктовался „конкуренцией“ между заметностью эффекта температуры и временем расчета. Амплитуда случайной части потенциала $V_{\text{dis}}(\mathbf{r})$ выбиралась достаточно умеренной, так что соответствующая ей ширина уровней Ландау составляла $\Gamma = 2$ мэВ. Также исследовалась аналогичная система с квантовыми антиточками (что соответствует $V_i < 0$ в формуле (2)), в которой локализация электронов происходила не в потенциальных ямах, а на потенциальных холмах (такова особенность локализации в сильном магнитном поле). В большинстве рассмотренных случаев средний радиус квантовых точек, фигурирующий в формуле (2), составлял $d_0 = 14$ нм, средняя амплитуда потенциала — $V_0 = 45$ мэВ (оба — с разбросом $\pm 20\%$), концентрация квантовых точек — $n_0 = 1.4 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$. Для понимания относительной значимости различных факторов было изучено влияние на холловскую проводимость размеров, плотности и амплитуды потенциала квантовых точек, а также их упорядоченности, для чего рассмотрено несколько моделей, иллюстрированных картиной суммарного потенциала $V_{\text{QD}}(\mathbf{r})$ на рис. 1:

(a) Реперная структура без квантовых точек.

(b) Случайно расположенные квантовые точки („газ“) с указанными выше параметрами: $N_{\text{QD}} = n_0$, $\bar{d} = d_0$, $\bar{V} = V_0$.

(c) Квантовые точки с теми же параметрами, что и в (b), но с определенным минимальным расстоянием между ними, $R_{\text{min}} = 50$ нм, сопоставимым с $n_0^{-1/2}$ („жидкость“).

(d) Квантовые точки с теми же параметрами, что и в (b), расположенные строго в узлах квадратной решетки („кристалл“).

(e) Аналогично (d), но концентрация квантовых точек $N_{\text{QD}} = n_0/(1.5)^2 = 0.6 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$.

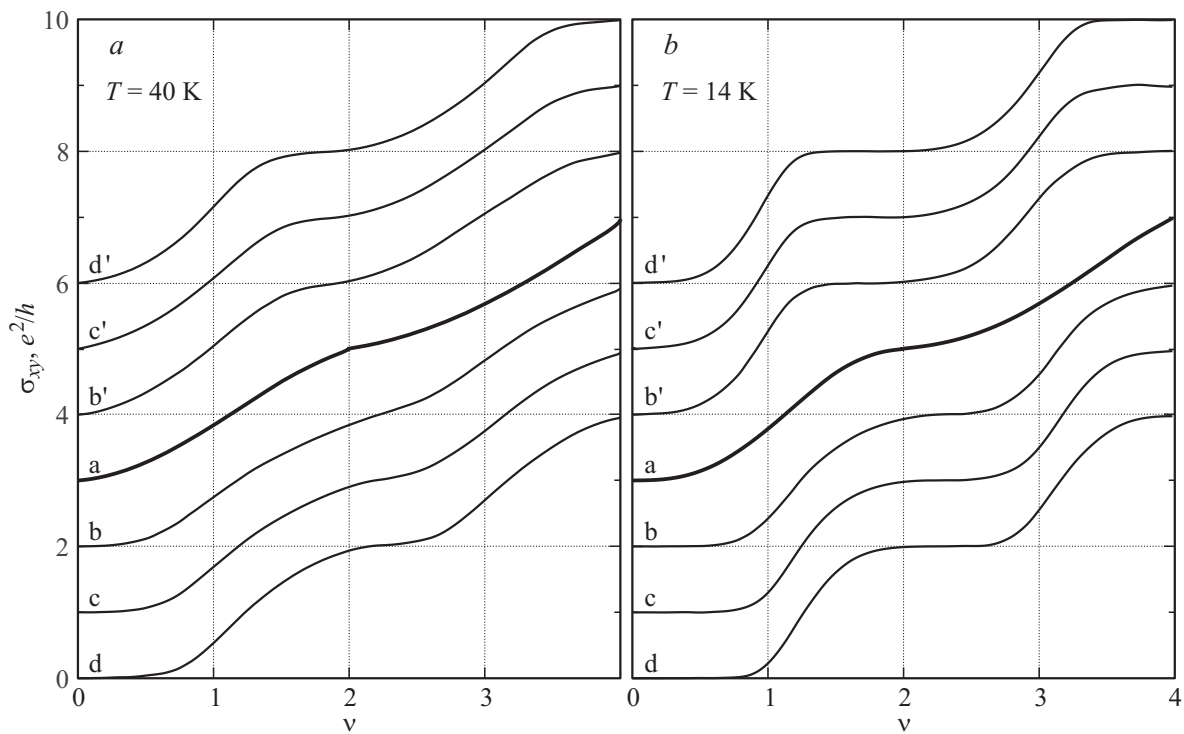


Рис. 2. Холловская проводимость квантовых точек и квантовых антиточек для систем с разной степенью коррелированности их расположения при температуре: *a* — 40 К, *b* — 14 К. Для наглядности кривые сдвинуты по вертикали с шагом e^2/h .

(f) Аналогично (e), но радиус квантовых точек $\bar{d} = 1.5d_0 = 21$ нм.

(g) Аналогично (d), но радиус квантовых точек $\bar{d} = 1.5d_0 = 21$ нм.

Соответствующие модели для квантовых антиточек мы будем обозначать дополнительным штрихом, например (*b'*) — та же модель, что и (*b*), но с потенциалом $\bar{V} = -V_0$.

На рис. 2 представлены результаты расчетов холловской проводимости от фактора заполнения $\nu = 2\pi l_B^2 n_e$ для моделей (a), (b)–(d) и (b')–(d'), т.е. квантовых точек и антиточек с фиксированными параметрами, но разным характером упорядочения, в сравнении с результатами для квантовой ямы, при $T = 14$ и 40 К. При таких температурах квантовый эффект Холла в структурах с квантовыми ямами (модель (a)) уже не наблюдается, но осциллирующие поправки достаточно заметны. Использование квантовых точек и антиточек позволяет не только наблюдать выраженные плато целочисленного квантового эффекта Холла при $T = 14$ К, но и протянуть температуру наблюдения выше 40 К при условии регулярного расположения квантовых точек (модель (d)). При этом, как заметно из сравнения серий кривых на рис. 2, использование квантовых антиточек оказывается несколько более предпочтительным. Это обстоятельство объясняется тем фактом, что в условиях вырождения по спине фундаментальное плато квантового эффек-

¹ При фиксированном магнитном поле B , т.е. фактически зависимость от концентрации электронов n_e .

та Холла формируется в случае квантовых точек из локализованных состояний с первого возбужденного уровня Ландау ($n = 1$), а в случае квантовых антиточек — из состояний с основного уровня Ландау ($n = 0$), локализоваться на котором проще [17] (разница при этом, конечно, не столь существенна, как для резкого потенциала). Сопоставление эволюции кривых на рис. 3 с температурой, представленной для моделей (a) и (d) в диапазоне от 14 до 56 К, показывает, что использование упорядоченного массива квантовых точек позволяет на порядок повысить температуру наблюдения квантового эффекта Холла по сравнению с квантовыми ямами.

На рис. 4 демонстрируется влияние на качество картины квантового эффекта Холла плотности квантовых точек и их размера на примере моделей (d)–(g). Видно, что уменьшение концентрации квантовых точек (e) приводит к уменьшению ширины квантово-холловских плато, что объясняется уменьшением числа хорошо локализованных состояний, эти плато формирующих. При этом пропорциональное увеличение радиуса квантовых точек (f) приводит к восстановлению ширины плато, не достигающему, однако, таковой в случае (d). Не сказывается благоприятным образом и простое увеличение размеров квантовых точек (случай (g)), так как при этом некоторые локализованные состояния соседних точек начинают перекрываться и обобществляются. Также любопытно наблюдать эволюцию зависимостей $\sigma_{xy}(\nu)$ при увеличении потенциала квантовых точек от 15 до 45 мэВ: из графиков, представленных на рис. 5, видно,

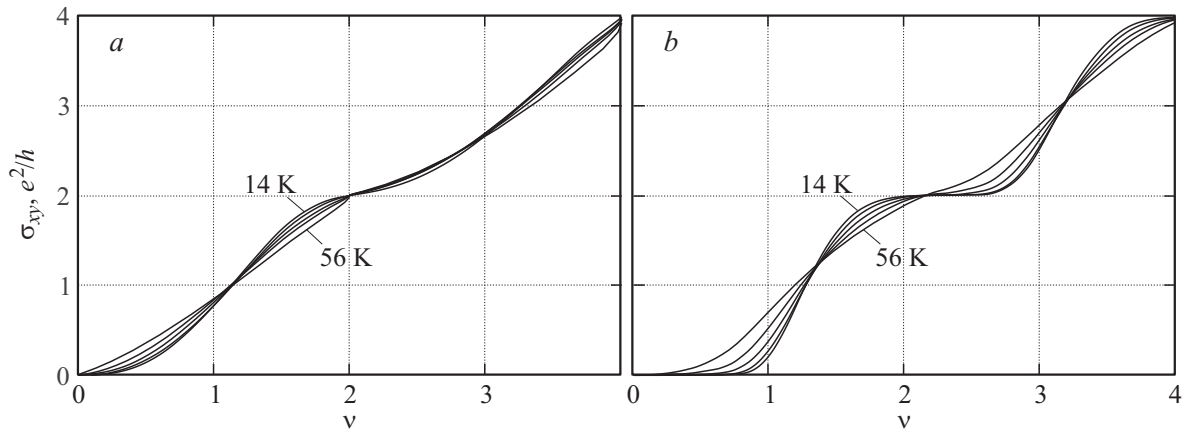


Рис. 3. Эволюция зависимостей холловской проводимости от фактора заполнения (концентрации носителей) с температурой (56, 40, 28, 20, 14 К) для *a* — квантовой ямы (модель (a)), *b* — упорядоченного массива квантовых точек (модель (d)).

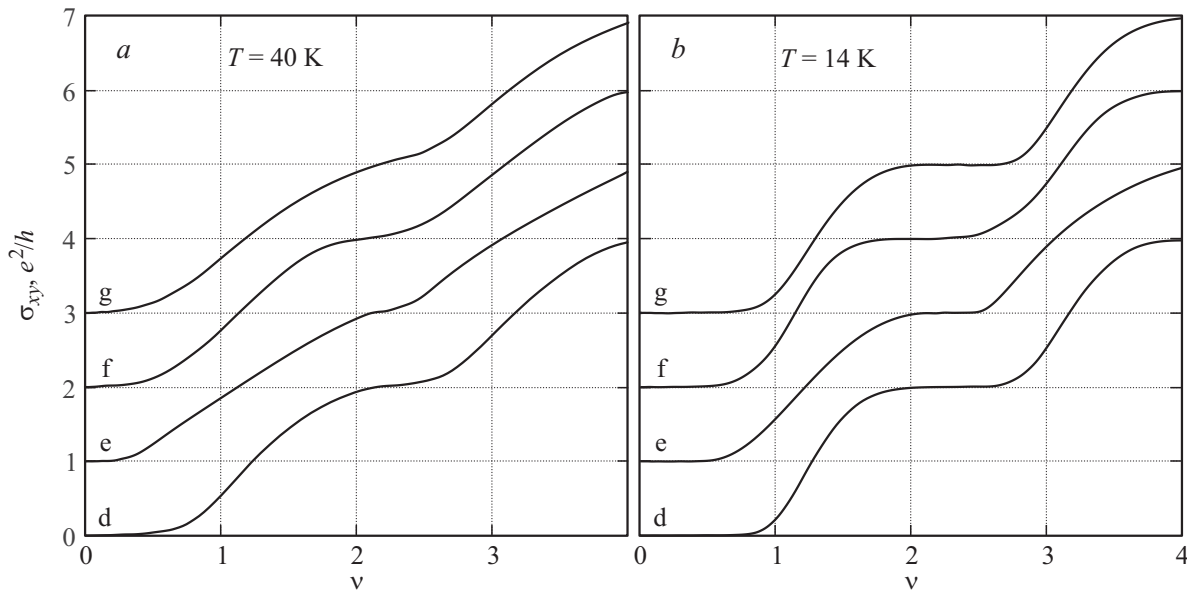


Рис. 4. Холловская проводимость в зависимости от фактора заполнения для моделей (d–g) с регулярным расположением квантовых точек, различающихся концентрацией и средним радиусом квантовых точек, при температуре: *a* — 40 К, *b* — 14 К. Для наглядности кривые сдвинуты по вертикали с шагом e^2/h .

что нарастание ширины плато происходит лишь до $\bar{V} \sim \hbar\omega_c$, после чего имеет место насыщение, связанное с ограничением числа локализованных состояний, попадающих в энергетическую полосу шириной $\hbar\omega_c$ (на один уровень Ландау).

Хорошее представление о соотношении между числом квантово-точечных состояний, имеющих малый радиус локализации ($\lesssim \bar{d}$), и числом электронных состояний вне квантовых точек (большинство из которых имеют конечный, но достаточно большой радиус локализации) дают графики плотности состояний, рассчитанные для моделей (a)–(d) и представленные на рис. 6–7. Как и следовало ожидать в соответствии с правилом квазиклассического квантования энергетических уровней в магнитном поле при наличии плавного потенциала [18],

на достаточно узкие пики плотности состояний уровней Ландау замагниченного двумерного электронного газа шириной Γ при наличии квантовых точек или антиточек накладываются хвосты, простирающиеся на энергию \bar{V} от центра каждого из уровней Ландау, в левую или правую сторону соответственно. Электронные состояния на хвостах плотности состояний являются сильно локализованными, поэтому при попадании уровня Ферми на них при изменении концентрации носителей или магнитного поля холловская проводимость остается неизменной, образуя плато квантового эффекта Холла. При этом увеличение ширины плато с ростом амплитуды потенциала точек, заметное на рис. 5, объясняется простым увеличением доли квантово-точечных состояний, лежащих по энергии за пределами полосы „плохо“

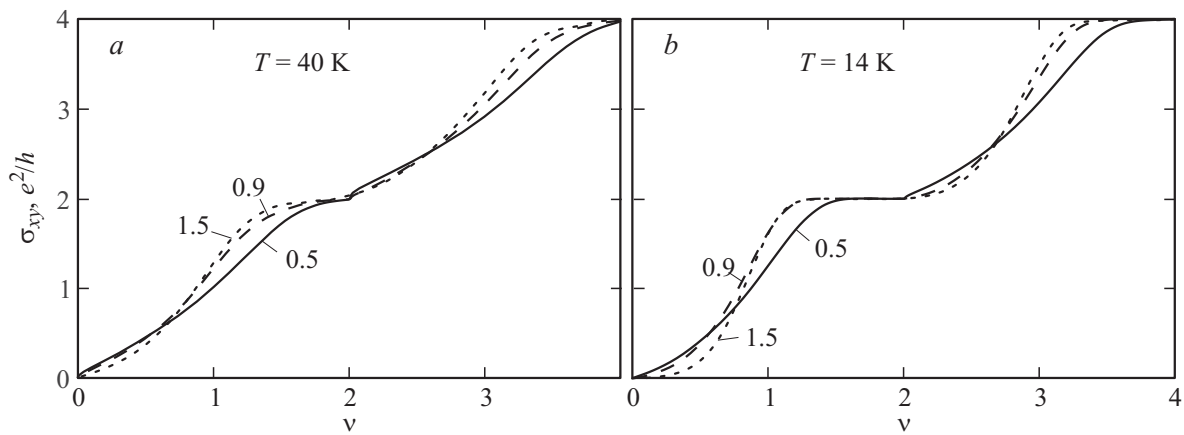


Рис. 5. Холловская проводимость в зависимости от фактора заполнения для модели (d) и при уменьшенной амплитуде потенциала квантовых точек по сравнению с $V_0 = 1.5\hbar\omega_c = 45$ мэВ, *a* — при температуре 40 К, *b* — при температуре 14 К (для каждой кривой на графиках обозначено отношение $\bar{V}/\hbar\omega_c$).

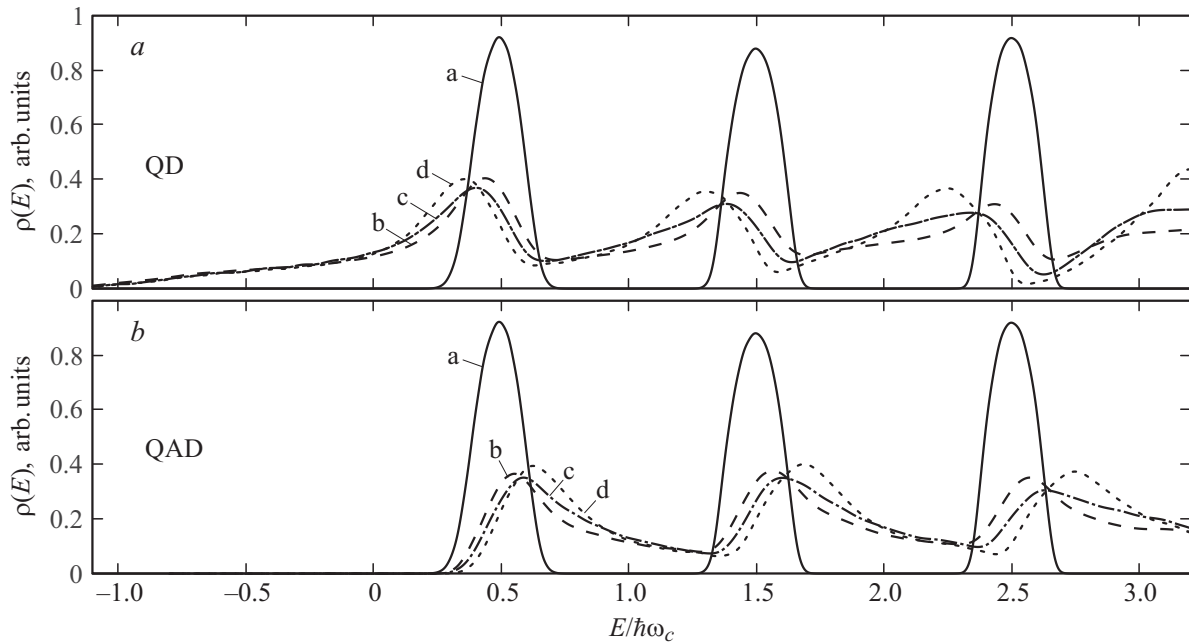


Рис. 6. Плотность состояний в ансамблях квантовых точек с различной степенью корреляции (модели (b)–(d)) по сравнению с плотностью состояний в квантовой яме при наличии только случайной составляющей потенциала $V_{\text{dis}}(\mathbf{r})$ (модель (a)).

локализованных состояний шириной Γ , в то время как отсутствие заметной разницы между результатами для $\bar{V}/\hbar\omega_c = 0.9$ и $\bar{V}/\hbar\omega_c = 1.5$ является следствием того, что большинство квантово-точечных состояний перешло на следующий уровень Ландау ($n = 1$) и выпало из „борьбы“ за ширину фундаментального плато квантового эффекта Холла.

Для качественного понимания эффекта улучшения качества картины целочисленного квантового эффекта Холла при повышенных температурах за счет присутствия квантовых точек также полезно рассмотреть их влияние в рамках точно решаемой модели с параболическим потенциалом конфайнмента (так называемой

модели Фока-Дарвина [19]), считая, что при относительно высоких температурах плато квантового эффекта Холла складываются исключительно из хорошо локализованных состояний квантовых точек. Вблизи минимума потенциал квантовой точки может быть записан в виде

$$V(\mathbf{r}) \approx -V_0 \left(1 - \frac{r^2}{2d_0^2} \right) = -V_0 + \frac{m^* \omega_0^2 r^2}{2}, \quad (11)$$

где $\hbar\omega_0 = \sqrt{V_0 \hbar^2 / (m^* d_0^2)} \approx 20$ мэВ при $V_0 = 45$ мэВ, $m^* = 0.04m_0$ и $d_0 = 14$ нм (при этом $\hbar\omega_c \approx 30$ мэВ в магнитном поле $B = 10$ Т). Из вида спектра электронных состояний квантовой точки с параболическим потенциа-

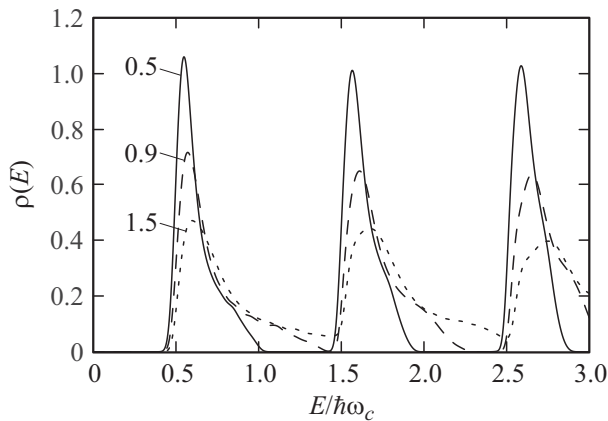


Рис. 7. Плотность состояний в модели (d) и при уменьшенной амплитуде потенциала квантовых точек по сравнению с $V_0 = 1.5\hbar\omega_c = 45$ мэВ (для каждой кривой на графике обозначено отношение $\bar{V}/\hbar\omega_c$).

лом в магнитном поле,

$$E_{n,m} = \frac{\hbar\omega_c}{2} \left[2n + 1 + (n + m + 1) \left(\sqrt{1 + (2\omega_0/\omega_c)^2} - 1 \right) \right], \quad (12)$$

видно, что каждая квантовая точка поставляет на уровень Ландау с номером n несколько локализованных состояний (при указанных параметрах это число $N = 3$). В результате при плотности квантовых точек $n_{\text{QD}} = 1.4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ доля хорошо локализованных состояний на каждом уровне Ландау, определяющая высокотемпературную (относительную) ширину плато, составляет

$$\eta = 2\pi l_B^2 n_{\text{QD}} N \approx 20\%. \quad (13)$$

Разумеется, эта оценка отнюдь не означает, что столь протяженные горизонтальные участки на зависимости $\sigma_{xy}(v)$ будут сохраняться при сколь угодно высокой температуре, однако она позволяет разделить все электронные состояния на два вида и ожидать, что постепенное подавление участков плато, связанных с „меньшинством“ (квантово-точечными состояниями), будет происходить при более высоких температурах. При этом „инициатором“ транспорта по этим состояниям будет по-прежнему электрон-фононное взаимодействие, а оценить предельную температуру можно только проведя численные расчеты, результаты которых были представлены выше.

4. Заключение

В настоящей работе разработана теория целочисленного квантового эффекта Холла в полупроводниковых системах с квантовыми точками и антиточками, в рамках которой локализирующий потенциал учитывается точно, а эффект неупругих взаимодействий, приводящих с повышением температуры к делокализации носителей, описывается с помощью уширения спектральных функций

в формуле (7) для квантового коррелятора скорость-скорость. Такой подход позволил получить согласующиеся с экспериментом вид магнетотранспортных кривых при низких температурах и скейлинговый показатель $\kappa \approx 0.4$, фигурирующий в степенном законе зависимости ширины переходных областей между соседними плато от температуры. Для эффективного проведения численных расчетов холловской проводимости при повышенных температурах ($T \gtrsim 10$ К), что требует рассмотрения образцов протяженностью более 1 мкм, мы использовали, существенно адаптировав его к нашей задаче, метод КРМ [14]. Результаты расчетов показали, что квантовый эффект Холла в структурах с квантовыми точками может „выживать“ вплоть до $T \sim 50$ К, но для этого необходимо обеспечить контроль параметров квантовых точек (размеров, потенциала, концентрации), желательно максимально их упорядочить (расположить в массиве), и главное — амплитуда мелкомасштабного потенциала, связанного с флуктуациями состава, должна быть на порядок меньше циклотронной энергии и амплитуды потенциала квантовых точек. Также замечено небольшое преимущество систем квантовых антиточек, проявляющееся за счет локализации электронных состояний на потенциальных холмах, а не в ямах.

Экспериментальным исследованиям квантового эффекта Холла в системах с квантовыми точками посвящено не так много работ [4,5], в которых предсказываемого нами улучшения картины за счет локализации в глубоком плавном потенциале обнаружено не было: квантовый эффект Холла имел место быть, но при температурах, характерных для квантовых ям, — ниже $T = 4$ К (в работе [5] — вообще ниже 0.3 К), при этом проявлялось лишь фундаментальное плато, соответствующее фактору заполнения $\nu = 2$ (что характерно для резкого хаотического потенциала), а точность квантования была невысокой — порядка 10^{-2} . Мы связываем такой результат с недостаточным „качеством“ экспериментально изученных структур с квантовыми точками, а именно наличием на фоне локализирующего потенциала квантовых точек более мелкомасштабного случайного потенциала, обусловленного флуктуациями состава. Учитывая, что разница между запрещенными зонами полупроводников InAs и GaAs составляет более 1 эВ, флуктуации состава на уровне 1% приводят к амплитуде случайного потенциала, определяющего ширину уровней Ландау Γ , порядка 10 мэВ, что сравнимо с циклотронной энергией в не слишком сильных магнитных полях $B \lesssim 10$ Т. В связи с этим обстоятельством отметим, что в упомянутых экспериментах фундаментальное плато целочисленного квантового эффекта Холла, соответствующее фактору заполнения $\nu = 2$, наблюдалось в магнитных полях $B = 1.5$ Т [5] и $B = 3$ Т [4], т.е. циклотронная энергия $\hbar\omega_c$ составляла менее 10 мэВ. Поскольку в настоящее время технологии роста полупроводниковых наноструктур позволяют контролировать свойства изготавливаемых изделий в широких пределах, мы рассчитываем, что предсказываемый эффект усиления квантового эффекта

Холла за счет использования квантовых точек будет обнаружен в структурах со сглаженным композиционным потенциалом.

Работа выполнена при поддержке Фонда „Династия“, РФФИ (12-02-31276) и гранта МК-718.2014.2.

Приложение I

Для эффективного вычисления холловской проводимости мы использовали метод КРМ, подробно познакомиться с которым можно в обзоре [14]. В этом *Приложении* изложена основа метода применительно к рассматриваемой задаче на уровне вычисления квантового коррелятора $w_{xy}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, который представляется в виде разложения по полиномам Чебышева второго рода

$$w_{xy}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{\pi^2 \Delta^2} \sum_{n,m=0}^K \mu_{nm} h_{nm} g_n g_m \times U_n(\xi_1) U_m(\xi_2) \sqrt{(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)}, \quad (\text{П.1, 1})$$

где K — максимальная степень полиномов, на которой по тем или иным причинам можно оборвать разложение, μ_{nm} — так называемые моменты Чебышева, h_{nm} определяются формулой

$$h_{nm} = \frac{1}{1 + \delta_{n,0}} \frac{1}{1 + \delta_{m,0}}, \quad (\text{П.1, 2})$$

а коэффициенты

$$g_n = \frac{\sinh(\alpha(1 - n/K))}{\sinh \alpha}, \quad (\text{П.1, 3})$$

плавно убывающие от 1 до 0, позволяют избежать осцилляций Гиббса; $\xi_{1,2}$ — это энергии $\varepsilon_{1,2}$, смасштабированные к интервалу $[-1, 1]$:

$$\xi_{1,2} = \frac{\varepsilon_{1,2} - \bar{\varepsilon}}{\Delta}, \quad (\text{П.1, 4})$$

$$\Delta = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{2}, \quad (\text{П.1, 5})$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}}{2}. \quad (\text{П.1, 6})$$

Энергии ε_{\min} и ε_{\max} определены таким образом, чтобы все собственные энергии системы гарантированно попали в интервал $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$. На практике, благодаря гауссовой форме хвостов плотности состояний уширенных уровней Ландау, вероятность выхода за диапазон $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$ экспоненциально мала.

В пределе $K \rightarrow \infty$ формула (П.1, 1) эквивалентна формуле (7) с $D(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ (предел нулевой температуры), а при конечном K коэффициенты g_n выбраны именно таким образом, чтобы получить желаемое уширение $D(\varepsilon)$ в виде лоренциана (8), где

$$\delta = \frac{\alpha \Delta}{2K}. \quad (\text{П.1, 7})$$

Чем больше α , тем точнее полученное уширение будет совпадать с лоренцианом (8). При численных расчетах

бралось $\alpha = 3$, при этом отклонение от лоренциана составляет не более 1% (более подробно с коэффициентами g_n и их связью с осцилляциями Гиббса можно ознакомиться в обзоре [14]). Из формулы (П.1, 1) следует, что чем ниже температура (т.е. меньше уширение δ), тем большее число полиномов Чебышева необходимо включить в сумму (П.1, 1).

Как упоминалось выше, коэффициенты μ_{nm} — это моменты Чебышева. Они играют определяющую роль в вычислении проводимости и определяются как

$$\mu_{nm} = \frac{1}{N} \text{Tr}[U_n(\tilde{H}) \hat{v}_x U_m(\tilde{H}) \hat{v}_y]. \quad (\text{П.1, 8})$$

Здесь $\tilde{H} = (\hat{H} - \bar{\varepsilon})/\Delta$ — „смасштабированный“ гамильтониан, а N — его размер, определяемый произведением числа принимаемых в расчет уровней Ландау на кратность вырождения уровня Ландау в образце площади S , $N_L = S/(2\pi l_B^2)$.

Для быстрого определения моментов μ_{nm} используется не их формальное определение (П.1, 8), а метод стохастического нахождения следа. Берется случайная нормированная волновая функция $|\psi_0\rangle$ и аналогично рекурсивному определению полиномов Чебышева строится цепочка

$$|u_0\rangle = |\psi_0\rangle, \quad |v_0\rangle = \hat{v}_x |\psi_0\rangle, \quad (\text{П.1, 9})$$

$$|u_1\rangle = 2\tilde{H}|u_0\rangle, \quad |v_1\rangle = 2\tilde{H}|v_0\rangle, \quad (\text{П.1, 10})$$

$$|u_{n+1}\rangle = 2\tilde{H}|u_n\rangle - |u_{n-1}\rangle,$$

$$|v_{m+1}\rangle = 2\tilde{H}|v_m\rangle - |v_{m-1}\rangle. \quad (\text{П.1, 11})$$

После чего моменты μ_{nm} вычисляются как

$$\mu_{nm} = \langle u_n | \hat{v}_y | v_m \rangle, \quad (\text{П.1, 12})$$

и функция $w_{xy}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ может быть рассчитана по формуле (П.1, 1).

Приложение II

В *Приложении I* мы показали, как, используя разложение по полиномам Чебышева, можно вычислить коррелятор $w_{xy}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с необходимой точностью. Оказывается, однако, что подстановка функции w_{xy} в формулу (10) — далеко не самый оптимальный способ расчета холловской проводимости, поскольку она содержит интегрирование по двум энергетическим переменным, которое нужно проводить численно; вместо этого можно выразить саму функцию $\sigma_{xy}(\varepsilon)$ через моменты μ_{nm} . Рассмотрим действие преобразования (10) на отдельные

слагаемые в разложении (П.И, 1)

$$\int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi_1^2} \sqrt{1-\xi_2^2} (U_n(\xi_1)U_m(\xi_2) - U_n(\xi_2)U_m(\xi_1))}{(\xi_1 - \xi_2)^2} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi_1^2} \sqrt{1-\xi_2^2} (U_n(\xi_1)U_m(\xi_2) - U_n(\xi_2)U_m(\xi_1))}{\xi_1 - \xi_2 - \omega} d\xi_1 d\xi_2 \Big|_{\omega=0}$$

$$= \pi(m-n) \int_{-1}^{\xi} \sqrt{1-\xi_2^2} U_n(\xi_2)U_m(\xi_2) d\xi_2 = \frac{\pi}{2} (m-n) \left(\frac{\sin(m+n+2)\varphi}{m+n+2} - \frac{\sin(m-n)\varphi}{m-n} \right), \quad (\text{П.И, 1})$$

где $\xi = (\varepsilon - \bar{\varepsilon})/\Delta$ — „смасштабированный“ уровень Ферми, причем мы воспользовались антисимметричностью $w_{xy}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -w_{xy}(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ и формулами [20]

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2} U_n(y) dy}{y-x} = -\pi T_{n+1}(x), \quad (\text{П.И, 2})$$

$$T'_{n+1}(x) = (n+1)U_n(x), \quad (\text{П.И, 3})$$

а также ввели обозначение $\varphi = \arccos \xi$. В результате холловскую проводимость можно представить в виде дискретного синус-преобразования Фурье:

$$\sigma_{xy}(\varepsilon) = \frac{ie^2 \hbar}{2S\pi\Delta^2} \sum_{n,m=0}^K \mu_{nm} h_{nm} g_n g_m$$

$$\times \left(\frac{m-n}{m+n+2} \sin(m+n+2)\varphi - \sin(m-n)\varphi \right). \quad (\text{П.И, 4})$$

Список литературы

- [1] А.А. Грешнов, Я.М. Бельтюков. ФТП, **48**, 242 (2014).
- [2] M. Zhang, P. Bhattacharya, W. Guo. Appl. Phys. Lett., **97**, 011 103 (2010).
- [3] Л.В. Асрян, Р.А. Сурис. ФТП, **38**, 3 (2004).
- [4] В.А. Кульбачинский, Р.А. Лунин, В.А. Рогозин, А.В. Голиков, В.Г. Кытин, Б.Н. Звонков, С.М. Некоркин, Д.О. Филатов, А. де Виссер. ФТТ, **45**, 725 (2003).
- [5] G.H. Kim, C.-T. Liang, C.F. Huang, J.T. Nicholls, D.A. Ritchie, P.S. Kim, C.H. Oh, J.R. Juang, Y.H. Chang. Phys. Rev. B, **69**, 073 311 (2004); G.H. Kim, J.T. Nicholls, S.I. Khondaker, I. Farrer, D.A. Ritchie. Phys. Rev. B, **61**, 10 910 (2000).
- [6] B. Jenichen, K. Ploog, O. Brandt. Appl. Phys. Lett., **63**, 156 (1993).
- [7] И.А. Дмитриев, Р.А. Сурис. ФТП, **219**, 35 (2001).
- [8] Б.Я. Бер, Е.В. Богданова, А.А. Грешнов, А.Л. Закагейм, Д.Ю. Казанцев, А.П. Карташова, А.С. Павлюченко, А.Е. Черняков, Е.И. Шабунина, Н.М. Шмидт, Е.Б. Якимов. ФТП **45**, 425 (2011).
- [9] M.M. Glazov. J. Phys.: Condens. Matter, **22**, 025 301 (2010).
- [10] A. Wojs, P. Hawrylak, S. Fafard, L. Jacak. Phys. Rev. B, **54**, 5604 (1996).
- [11] А.А. Грешнов, G.G. Zegrya, E.N. Kolesnikova. JETP, **107**, 491 (2008).
- [12] B. Huckestein. Rev. Mod. Phys., **67**, 357 (1995).

- [13] R.N. Silver, H. Röder. Phys. Rev. E, **56**, 4822 (1997).
- [14] A. Weiße, G. Wellein, A. Alvermann, H. Fehske. Rev. Mod. Phys., **78**, 275 (2006).
- [15] A.O. Kosogov, P. Werner, U. Gösele, N.N. Ledentsov, D. Bimberg, V.M. Ustinov, A.Yu. Egorov, A.E. Zhukov, P.S. Kop'ev, N.A. Bert, Zh.I. Alferov. Appl. Phys. Lett., **69**, 3072 (1996).
- [16] G. Medeiros-Ribeiro, M.V.B. Pinheiro, V.L. Pimentel, E. Marega. Appl. Phys. Lett., **80**, 4229 (2002).
- [17] А.А. Грешнов, G.G. Zegrya. Physica E, **40**, 1185 (2008).
- [18] M. Tsukada. J. Phys. Soc. Jpn., **41**, 1466 (1976).
- [19] V. Fock, Z. Phys., **47**, 446 (1928).
- [20] M. Abramowitz, I.A. Stegun (eds). *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs, and mathematical tables* (Dover, New York, 1970).

Редактор А.Н. Смирнов

The quantum Hall effect in systems of the semiconductor quantum dots and antidots

Y.M. Beltukov*, A.A. Greshnov**

* Ioffe Physicotechnical Institute,
Russian Academy of Sciences,
194021 St. Petersburg, Russia
+ St. Petersburg State Electrotechnical University „LETI“,
197376 St. Petersburg, Russia

Abstract The integer quantum Hall effect in systems of the semiconductor quantum dots and antidots has been studied theoretically depending on the temperature. It is found that conditions for carrier localization in the quantum dot systems are favourable to development of the quantum Hall effect at higher temperatures than for the quantum well systems. Our numerical results demonstrate that the fundamental plateau, corresponding to transition between the ground and the first excited Landau levels, may survive up to $T \sim 50$ K, which is an order of magnitude higher than for the quantum wells. Practically, so high temperatures of the quantum Hall effect may be achieved using quantum dot systems with adjusted properties: optimal size and concentration, moderate geometrical and compositional fluctuations. In addition, good arrangement is rather important, and quantum antidots show slightly better performance than quantum dots.