

01

Об одномерной модели распределенного проводника

© А.Г. Меркушев,¹ И.А. Елагин,¹ М.А. Павлейно,¹ А.А. Статуя,¹ А.М. Чалый²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Научно-образовательный центр „Электрофизика“ физического факультета,
198504 Санкт-Петербург, Петродворец, Россия
e-mail: alexei.merkushev@gmail.com, kukumbers@yandex.ru

² Промышленная группа „Таврида Электрик“,
125040 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 14 мая 2014 г.)

Получена математическая модель, описывающая эволюцию распределений тока и напряжения в одномерном проводнике, взаимодействующем с системой потенциалов. Предложенная модель пригодна для описания как переходных, так и установившихся гармонических электрических процессов в случае немагнитной системы. Показано, что эволюция напряжения в тонком распределенном проводнике приближенно описывается уравнением диффузии с пространственно неоднородными коэффициентами и источником. Кроме этого, для гармонических режимов получены формулы, описывающие распределения фазовых напряжения и тока вдоль проводника. Разработанный одномерный инструментальный проверен на примере гипотетической высоковольтной системы, содержащей распределенный проводник и три электрода. В рамках сопоставления решен ряд гармонических и переходных задач. Проведено исследование погрешности одномерной модели и сформулированы условия ее применимости.

Введение

Анализ электропрочности высоковольтных токоведущих систем, как правило, подразумевает не только проведение расчетов стационарных электрических полей в системе проводников, составляющих систему, но и расчет переходных режимов (например, отклик системы на грозовые импульсы или другие перенапряжения при различном способе их приложения). Вторая задача в рамках реальной трехмерной геометрии, вообще говоря, оказывается существенно более ресурсоемкой и требующей большего времени для получения решения по сравнению с первой, так как по сути, предполагает расчет последовательности задач, каждая из которых схожа по вычислительной сложности с первой. В этой связи возникает интерес к методикам приближенного расчета нестационарных процессов в токоведущих системах.

При решении задачи методом конечных элементов (МКЭ) вычислительная сложность во многом определяется количеством узлов сетки, а значит, сложностью геометрии рассматриваемой системы. Учитывая, что элементы токоведущих систем нередко имеют выделенное направление — направление тока в элементе, в некоторых случаях становится возможным проводить редукцию размерности задачи путем представления отдельных элементов системы одномерными проводниками. Последнее позволяет существенно упростить сетку и снизить вычислительную сложность. Подобные соображения, уменьшающие размерность задачи в системе в целом или в ее отдельных областях, с успехом используются при решении вполне конкретных прикладных задач электро- и теплофизики [1–4].

Настоящая работа посвящена разработке и проверке приближенного одномерного математического аппарата, предназначенного для описания переходных и установившихся гармонических электрических процессов в тонком распределенном проводнике, входящем в состав токоведущей системы и взаимодействующем с другими ее элементами.

1. Постановка задачи

Для простоты представим, что в рассматриваемой токоведущей системе всего один тонкий распределенный проводник длиной L , а остальные N проводников являются электродами, каждый из которых можно охарактеризовать единым мгновенным значением потенциала $V_k(t)$, где $k = 1, \dots, N$. Каждой точке распределенного проводника сопоставим значение параметрической координаты x , которую определим как длину участка проводника от точки $x = 0$ до данной. Мгновенное значение потенциала в точке x обозначим через $U(x, t)$. Условия в точках $x = 0$ и $x = L$ для сохранения общности уточнять заранее не будем, каждый из концов распределенного проводника может быть замкнут на некоторый заданный потенциал или может быть изолированным, для дальнейшего это не принципиально. На рис. 1 описанная токоведущая система представлена схематично.

Кроме прочего, будем также предполагать, что рассматриваемая система является немагнитной, т.е. суммарная магнитная энергия во всех интересующих режимах много меньше суммарной электрической, или, проще говоря, что индуктивные свойства системы выражены значительно слабее емкостных. Формально это условие можно выразить сильным неравенством вида:

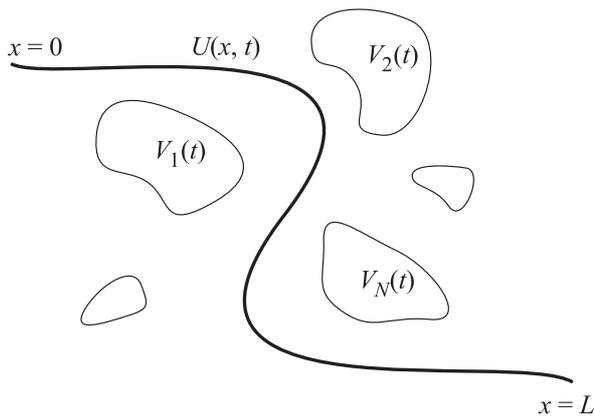


Рис. 1. Схематическое изображение токоведущей системы.

$LI^2 \ll CU^2$, где L и C — характерные значения индуктивности и емкости системы соответственно, I и U — характерные значения тока и напряжения соответственно.

2. Уравнения для потенциала и тока в распределенном проводнике

В описанной выше системе мысленно разобьем распределенный проводник на M малых элементов, которые будем нумеровать индексом $j = 1, \dots, M$. Разбиение будем предполагать равномерным и настолько мелким, что в пределах каждого отдельного элемента потенциал можно считать постоянным. Размер элементов обозначим через δx , заметим, что $\delta x = L/M$. В результате каждый элемент будет характеризоваться некоторым единым мгновенным значением потенциала $U_j(t)$ так же, как и окружающие проводник электроды.

В соответствии с законами линейной электростатики заряд $\delta q_j(t)$, наведенный в j -м элементе распределенного проводника, определяется линейной комбинацией разностей потенциала U_j с потенциалами всех остальных элементов и электродов системы. Формально это обстоятельство можно выразить следующим образом:

$$\delta q_j = \sum_k \delta C_{jk}(U_j - V_k) + \sum_{p \neq j} \delta D_{jp}(U_j - U_p). \quad (1)$$

В (1) коэффициенты δC_{jk} и δD_{jp} — это взаимные емкости j -го элемента с k -м электродом и p -м элементом соответственно. Здесь и далее δ в обозначении величины указывает, что величина имеет тот же порядок малости, что и размер элемента распределенного проводника, т.е. является $O(\delta x)$ при $\delta x \rightarrow 0$.

Безусловно, выражению (1) можно придать более краткую матричную форму вида $\delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{C} \mathbf{U}$, где $\delta \mathbf{q}$ — вектор наведенных зарядов, $\delta \mathbf{C}$ — матрица взаимных емкостей, а \mathbf{U} — объединенный вектор потенциалов, в который входят как потенциалы элементов распределенного проводника, так и потенциалы электродов. Для

дальнейшего, однако, все же удобнее пользоваться явной записью.

Будем предполагать, что тонкий распределенный проводник не является „скрученным“. Поясним последнее условие. Скрученным будем называть проводник, который удовлетворяет условию (2):

$$\exists x_1, x_2: \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq L, \quad \rho(x_1, x_2) \ll |x_1 - x_2|. \quad (2)$$

Таким образом, выражением (2) скрученность распределенного проводника определяется как такая его конфигурация, при которой существует хотя бы одна пара точек x_1 и x_2 , расстояние между которыми много меньше абсолютной разницы $|x_1 - x_2|$ их параметрических координат.

Итак, если распределенный проводник не является скрученным, то естественно ожидать, что взаимные емкости δD_{jp} будут иметь существенные значения только для близких значений индексов j и p . Для удаленных элементов распределенного проводника коэффициенты δD_{jp} будут пренебрежимо малы.

Кроме того, если рассматривать токопрохождение в распределенном проводнике, то при не слишком больших активных сопротивлениях δR_j его элементов, а также если суммарное падение напряжения на распределенном проводнике $\Delta U = U(0) - U(L)$ не превосходит значительно разностей потенциалов электродов V_k и точек проводника, то разности потенциалов между смежными элементами проводника будут сравнительно малы. В этих условиях, учитывая предположение о нескрученности проводника, второй суммой в (1) можно пренебречь полностью: если индексы j и p различаются сильно, то пренебрежимо мал коэффициент δD_{jp} , если j и p , напротив, близки, то малой оказывается разность $U_j - U_p$. Таким образом, можно записать

$$\delta q_j \approx \sum_k \delta C_{jk}(U_j - V_k). \quad (3)$$

Погрешность приближенного выражения (3) определяется тем, насколько хорошо удовлетворяются сделанные выше предположения относительно скрученности распределенного проводника, его сопротивления и величин потенциалов в системе. Далее будем предполагать, что (3) выполняется строго.

Если предположить, что геометрия рассматриваемой системы неизменна во времени (т.е. взаимные емкости постоянны), то дифференцирование выражения (3) приведет к следующему соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta q_j = \sum_k \delta C_{jk} \left(\frac{\partial U_j}{\partial t} - \frac{\partial V_k}{\partial t} \right). \quad (4)$$

Временную производную заряда δq_j в левой части (4) можно интерпретировать как полный емкостной ток, направленный от данного элемента распределенного проводника к электродам с заданными потенциалами V_k . В соответствии с законом сохранения заряда, полный

ток в распределенном проводнике будет уменьшаться на величину емкостного тока после прохождения j -го элемента

$$-\delta I_j = \sum_k \delta C_{jk} \left(\frac{\partial U_j}{\partial t} - \frac{\partial V_k}{\partial t} \right), \quad (5)$$

где δI_j — скачок полного тока распределенного проводника на j -м элементе.

Если теперь обе части равенства (5) разделить на размер элементов δx и перейти к пределу $M \rightarrow \infty$ или, что то же, $\delta x \rightarrow 0$, то получим следующее уравнение в частных производных (указаны все аргументы):

$$-\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = \sum_k C_k(x) \left(\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial V_k(t)}{\partial t} \right). \quad (6)$$

В (6) $C_k(x)$ — распределения погонных взаимных емкостей проводника с N электродами системы. С помощью выражения (3), разделив обе его части на δx и осуществив аналогичный предельный переход $\delta x \rightarrow 0$, можно дать электростатическое определение для распределенных $C_k(x)$

$$\lambda(x) = \sum_k C_k(x) (U(x) - V_k), \quad (7)$$

где $\lambda(x)$ — распределение линейной плотности заряда вдоль проводника. В соответствии с (7), погонные емкости $C_k(x)$ выражают связь между линейной плотностью наведенного заряда и разностями потенциалов электродов и потенциала в данной точке распределенного проводника.

Аналогичным образом, рассматривая связь между падением напряжения на отдельном элементе распределенного проводника с полным током в этом элементе и делая предельный переход к бесконечно мелкому разбиению, можно получить следующее уравнение:

$$-\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = R(x) I(x, t), \quad (8)$$

где $R(x)$ — распределение погонного сопротивления проводника.

Следует отметить, что предположение о достаточно низком погонном сопротивлении, упомянутое при выводе (6), а именно при переходе от (1) к приближенному выражению (3), имеет существенное значение и для справедливости уравнения (8). При больших погонных сопротивлениях будет, вообще говоря, наблюдаться шунтирующий эффект взаимной емкости смежных участков распределенного проводника, который как раз описывается отброшенной в (3) суммой. Однако, как уже было указано выше, в рамках настоящей работы рассматривается случай, при котором погонное сопротивление достаточно мало, и выражение (3) выполняется строго, что обеспечивает сравнительно простой вид правой части (8).

Вместе (6) и (8) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных, которая однозначно определяет эволюцию распределений тока и напряжения в проводнике, если заданы распределения $C_k(x)$ и $R(x)$, начальные условия и граничные условия при $x = 0$ и $x = L$, а также временные зависимости потенциалов электродов. Эта система во многом схожа с хорошо известной системой телеграфных уравнений для длинной линии [5,6].

Если выразить из (8) ток, а затем продифференцировать его по параметрической координате x , подставить эту производную в (6) и сделать несложные преобразования, можно получить следующее уравнение для эволюции напряжения в распределенном проводнике:

$$\left(R(x) \sum_k C_k(x) \right) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} - \frac{d \ln R(x)}{dx} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + R(x) \sum_k C_k(x) \frac{\partial V_k(t)}{\partial t}. \quad (9)$$

Если распределенный проводник выполнен из однородного материала и не изменяет своего сечения на всем своем протяжении, то его погонное сопротивление с высокой степенью точности будет постоянным, т.е. $R(x) = \text{const}$. В этом случае в (9) исчезнет член, содержащий производную логарифма $R(x)$. Учитывая это, после тождественных преобразований можно получить

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \psi(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + h(x, t),$$

$$\psi(x) = \left(R \sum_k C_k(x) \right)^{-1}, \quad h(x, t) = \frac{\sum_k C_k(x) V_k'(t)}{\sum_k C_k(x)}. \quad (10)$$

Уравнение (10) описывает эволюцию распределения потенциала в проводнике с постоянным погонным сопротивлением. Это уравнение является уравнением диффузии [7] с неравномерно распределенным по x коэффициентом диффузии $\psi(x)$ и источником $h(x, t)$ (здесь штрих у V_k обозначает временную производную). Решив с заданными начальными и граничными условиями уравнение (10) и определив тем самым $U(x, t)$, для восстановления динамики распределения тока достаточно воспользоваться выражением (8).

3. Описание гармонических режимов

Предложенные в разд. 2 уравнения позволяют получить описание гармонических режимов в одномерном проводнике. Для этого представим распределения потенциала и тока, а также потенциалы электродов в следующем виде:

$$U(x, t) = \dot{U}(x) e^{i\omega t}, \quad I(x, t) = \dot{I}(x) e^{i\omega t},$$

$$V_k(t) = \dot{V}_k e^{i\omega t}, \quad (11)$$

где $e^{i\omega t}$ — временной гармонический множитель, содержащий циклическую частоту ω , $\dot{U}(x)$, и $\dot{I}(x)$ — распределения фазоров (т.е. комплексных амплитуд) напряжения и тока соответственно, а \dot{V}_k — фазоры потенциалов на электродах.

Подставляя в (6) и (8) выражения (11), получим систему для фазоров напряжения и тока в тонком распределенном проводнике

$$\begin{aligned} -\frac{d\dot{I}(x)}{dx} &= i\omega \sum_k C_k(x)(\dot{U}(x) - \dot{V}_k), \\ -\frac{d\dot{U}(x)}{dx} &= R(x)\dot{I}(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Системе (12) можно придать матричную форму:

$$\begin{aligned} \frac{ds(x)}{dx} &= -\hat{w}(x)s(x) + \hat{y}(x)\mathbf{V}, \\ s(x) &= \begin{pmatrix} \dot{U}(x) \\ \dot{I}(x) \end{pmatrix}, \\ \hat{w}(x) &= \begin{pmatrix} 0 & R(x) \\ i\omega \sum_k C_k(x) & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{y}(x) &= i\omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_1(x) & \dots & C_N(x) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{V} &= (V_1 \dots V_N)^T. \end{aligned} \quad (13)$$

Общее решение линейного матричного уравнения (13) можно выразить следующим образом с помощью резольвенты, даваемой матричной экспонентой:

$$\begin{aligned} s(x) &= e^{-\hat{W}(x)} \left[s(0) + \left(\int_0^x e^{\hat{W}(x)} \hat{y}(x) dx \right) \mathbf{V} \right], \\ \hat{W}(x) &= \int_0^x \hat{w}(x) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражение (14) позволяет однозначно определить фазоры тока и напряжения в любой точке одномерного проводника, если таковые известны в точке $x = 0$.

Если подставить (11) непосредственно в уравнение диффузии потенциала (10), то получим следующее:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} + q^2(\omega, x)(\dot{U}(x) - \dot{V}(x)) &= 0, \\ q^2(\omega, x) &= -\frac{i\omega}{\psi(x)}, \quad \dot{V}(x) = \frac{\sum_k C_k(x)\dot{V}_k}{\sum_k C_k(x)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, при гармонических режимах фазор напряжения в распределенном проводнике удовлетворяет одномерному уравнению Гельмгольца [7] с комплексным волновым числом $q(\omega, x)$. В качестве источника в этом уравнении выступает взвешенная сумма комплексных амплитуд напряжений электродов, причем коэффициенты суммы определяются распределенными емкостями $C_k(x)$.

4. Численная проверка модели, результаты и их обсуждение

Была проведена серия численных экспериментов с целью сопоставления разработанной одномерной модели и расчетов в полной постановке. В процедуре проверки в общем случае можно указать несколько этапов. Первый этап состоит в выборе реализации системы, содержащей распределенный проводник и набор электродов. На втором этапе путем расчета ряда электростатических задач в полной постановке (т.е. с учетом всех особенностей геометрии выбранной системы) с помощью МКЭ определяются распределения взаимных емкостей проводника и электродов. Третий этап предполагает численное решение ряда гармонических задач как в полной постановке с помощью МКЭ, так и с помощью предложенной одномерной модели с использованием определенных на предыдущем этапе распределений погонных емкостей. Четвертый этап состоит в сопоставлении результатов обоих подходов и формулировке выводов относительно количественной достоверности одномерной модели. В рамках настоящей работы приведем результаты, полученные в ходе описанной процедуры верификации для гипотетической двумерной высоковольтной системы, содержащей один тонкий распределенный проводник и три электрода.

На рис. 2 представлено схематичное изображение рассматриваемой токоведущей системы.

Кругами на рис. 2 обозначены 3 цилиндрических электрода с потенциалами V_1 , V_2 и V_3 . Распределенный проводник в рассматриваемой системе представляет собой тонкий плохо проводящий слой, нанесенный на одну из стенок „отсека“. На рисунке он изображен толстой вертикальной линией в левой части схемы. Про-

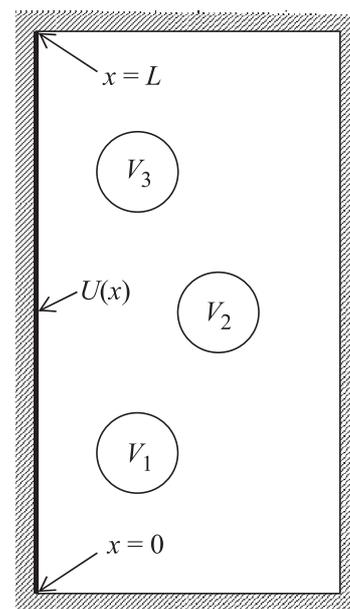


Рис. 2. Схематичное изображение тестовой высоковольтной системы.

странство системы заполнено диэлектриком с единичной относительной диэлектрической проницаемостью. На границе, изображенной штриховкой, будем предполагать условия изоляции. На рис. 2 также указаны точки, соответствующие нулю и максимальному значению L параметрической координаты x . Длина L распределенного проводника в рассматриваемой системе составляет 0.5 м, радиусы электродов — 25 мм, расстояние между электродами и распределенным проводником — 9 см для верхнего и нижнего электродов и 16 см для среднего.

Важно заметить, что для двумерных систем несколько изменяется смысл погонных параметров $C_k(x)$ и $R(x)$ и величины $I(x, t)$, фигурирующих в уравнениях, полученных в разд. 3 для, вообще говоря, системы с трехмерной геометрией. При наличии плоской симметрии под $I(x, t)$ следует понимать не сам ток, а его плотность на единицу глубины модели. Это же замечание относится и к фазору $\dot{I}(x)$. В системе единиц СИ в этом случае размерность этих величин будет не А, а А/м. Аналогичное замечание можно сформулировать и для наведенных зарядов и их плотности $\lambda(x)$, фигурирующей в выражении (7). В случае плоской геометрии $\lambda(x)$ приобретает смысл не линейной, а поверхностной плотности заряда.

Переход от трехмерной к двумерной геометрии также затрагивает физический смысл и размерности распределенных параметров $C_k(x)$ и $R(x)$. При наличии плоской симметрии погонные емкости $C_k(x)$ в системе единиц СИ будут иметь размерность F/m^2 , а погонное сопротивление $R(x)$ — Ω , в то время как в случае трехмерной системы их размерностями являются F/m и Ω/m соответственно. Все это легко проследить, если сопоставить размерности величин в уравнениях (6) и (8). Следует отметить, что переход к плоской геометрии никак не сказывается на физическом смысле и размерности потенциала и соответствующих фазоров.

Для того чтобы найти распределения погонных емкостей $C_k(x)$, необходимо решить серию электростатических задач, в каждой из которых распределенный проводник и все электроды, кроме одного, предполагаются заземленными. Тогда, в соответствии с (7), распределение плотности наведенного заряда будет с точностью до множителя равно распределению погонной емкости, отвечающему единственному электроду с ненулевым потенциалом. Строго условия поиска распределенных емкостей с электродами можно сформулировать следующим образом:

$$U(x) \equiv 0, \quad V_k = V\delta_{kl} \Rightarrow C_l(x) = \left| \frac{\lambda(x)}{V} \right|, \quad (16)$$

где δ_{kl} обозначает δ -символ Кронекера.

Как уже было отмечено, для плоской геометрии $\lambda(x)$ приобретает смысл поверхностной плотности заряда, наведенного в распределенном проводнике. Тогда в соответствии с теоремой Гаусса для электростатических

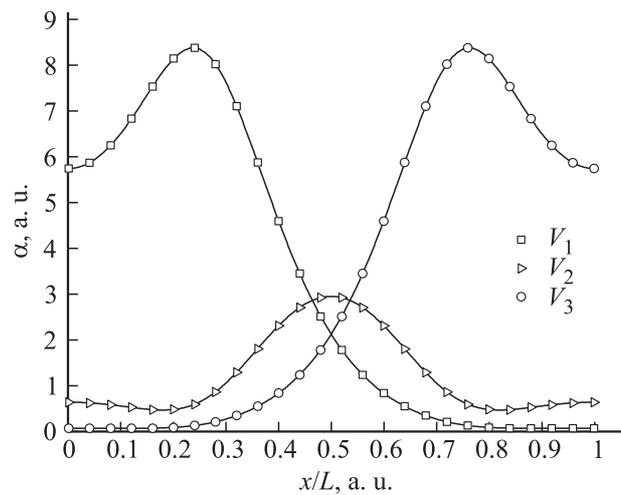


Рис. 3. Результаты расчета распределений $\alpha_k(x)$ для тестовой системы.

полей в рамках серии задач (16) $\lambda(x)$ попросту равна нормальной компоненте вектора электрической индукции $D_n(x)$ на поверхности распределенного проводника, т.е. $\lambda(x) = D_n(x)$.

На рис. 3 представлены результаты расчета трех взаимных емкостей распределенного проводника и электродов для тестовой системы, емкости приведены в отношении к диэлектрической постоянной ϵ_0 , т.е. $\alpha_k(x) = C_k(x)/\epsilon_0$. В легенде указано, к какому из электродов относится каждая кривая.

Данные, представленные на рис. 3, показывают, что максимальные значения погонных емкостей достигаются в тех точках распределенного проводника, которые наименее удалены от электродов, что вполне согласуется с качественными соображениями: чем меньше межэлектродное расстояние, тем больше емкость.

Далее рассмотрим результаты расчета ряда гармонических режимов на промышленной частоте $\nu = 50$ Hz. Проведем сравнение распределений фазоров напряжения и тока в проводнике, полученных в полной двумерной постановке и при использовании одномерной модели (15). Погонное сопротивление проводника для расчетов возьмем достаточно большим для того, чтобы получить заметные неоднородности в распределении фазоров напряжения. При слишком малых погонных сопротивлениях распределение напряжения в проводнике становится чисто вещественным и практически однородным, а распределение тока чисто мнимым (только емкостной ток). С другой стороны, погонное сопротивление нельзя брать слишком большим, так как будут нарушаться условия применимости предложенной одномерной модели. Численные эксперименты показали, что оптимальным с этой точки зрения является значение $R = 5 \cdot 10^8 \Omega$, именно для него и приводятся дальнейшие результаты.

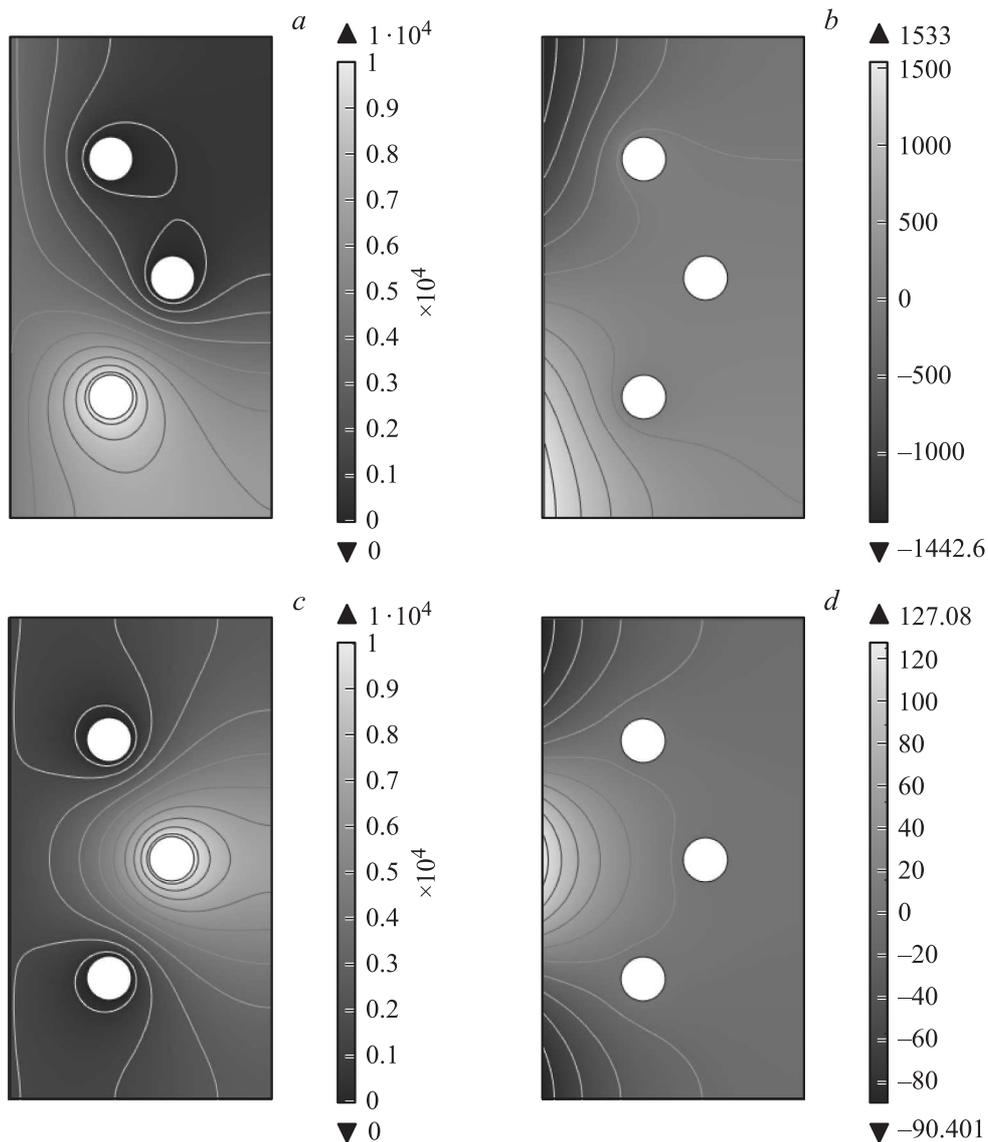


Рис. 4. *a, b* — соответственно вещественная и мнимая части потенциала в случае V_1 ; *c, d* — соответственно вещественная и мнимая части потенциала в случае V_2 .

На рис. 4 представлены контурные распределения вещественной и мнимой части фазора потенциала для случаев $V_1 = 10 \text{ kV}$, $V_2 = V_3 = 0 \text{ kV}$ и $V_2 = 10 \text{ kV}$, $V_1 = V_3 = 0 \text{ kV}$, полученные путем моделирования в двумерной постановке с помощью МКЭ. Далее эти два случая задания потенциалов на электродах будем обозначать V_1 и V_2 соответственно. Контурные распределения на рис. 4 снабжены изолиниями с инвертированной цветовой палитрой для лучшего представления структуры распределений потенциала.

Распределения потенциала, представленные на рис. 4, показывают, что максимум его вещественной части расположен в области активного электрода, т.е. электрода, на котором задан ненулевой потенциал. Максимум мнимой части потенциала расположен на распределенном проводнике в той его части, которая наиболее близка

к активному электроду. Этот максимум обеспечивается существованием взаимной емкости между электродами и распределенным проводником.

На рис. 5 и 6 приведены распределения фазоров напряжения и тока вдоль проводника для случая V_1 , полученные путем моделирования в двумерной постановке с помощью МКЭ и с помощью предложенной одномерной модели.

На рис. 7 и 8 приведены распределения фазоров напряжения и тока вдоль проводника для случая V_2 , полученные путем моделирования в двумерной постановке с помощью МКЭ и с помощью предложенной одномерной модели.

Результаты, представленные на рис. 5–8, показывают, что предложенная одномерная модель достаточно хорошо описывает распределения фазоров напряжения и

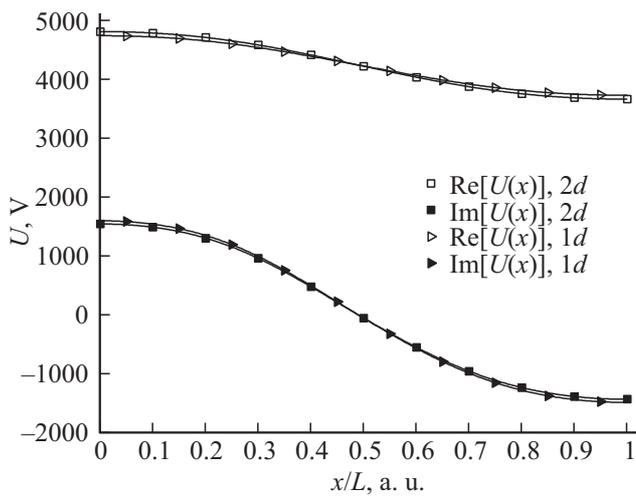


Рис. 5. Распределения вещественной и мнимой частей фазов напряжения в режиме V1, полученные в 2d (квадратные маркеры) и 1d (треугольные маркеры) постановках.

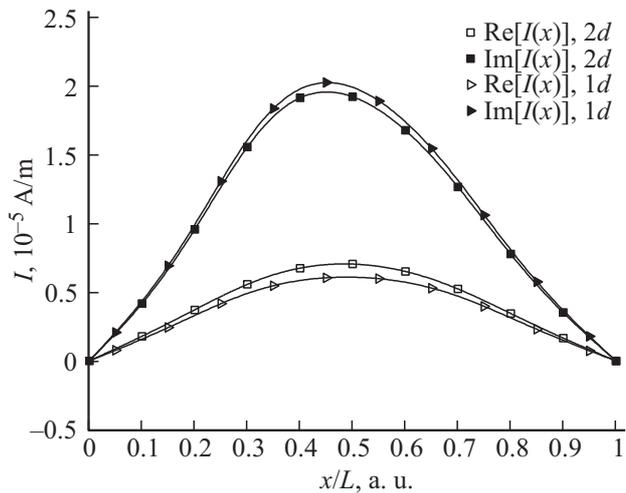


Рис. 6. Распределения вещественной и мнимой частей фазов тока в режиме V1, полученные в 2d (квадратные маркеры) и 1d (треугольные маркеры) постановках.

тока в тонком проводнике при гармонических режимах на промышленной частоте и выбранном значении погонного сопротивления при различных способах подачи напряжения.

Введем в рассмотрение понятие относительного отклонения для распределений фазов в соответствии со следующей формулой:

$$\text{err}(A) = \frac{\max_x |\dot{A}_{1d}(x) - \dot{A}_{2d}(x)|}{\max_x |\dot{A}_{2d}(x)|}, \quad A = U, I. \quad (17)$$

В (17) вместо \$A\$ нужно подставить либо \$U\$, либо \$I\$, что отвечает относительному отклонению распределения фазов либо напряжения, либо тока; индексы 1d и 2d обозначают распределения, полученные с помощью

одномерной модели и при расчете в полной двумерной постановке соответственно.

Относительные отклонения в рассмотренном выше примере (\$R = 5 \cdot 10^8 \Omega\$, \$\nu = 50\$ Hz) составили для распределений фазора потенциала менее 2%, а для фазора тока менее 6%.

Из (10) и (15) видно, что распределение фазов напряжения зависит от погонного сопротивления \$R\$ и циклической частоты \$\omega = 2\pi\nu\$ не в отдельности, две эти величины входят в уравнение (15) в виде произведения. Это же замечание касается и полной постановки. Поэтому при фиксированной геометрии гипотетической системы исследовать поведение относительного отклонения одномерной модели при описании распределений фазов достаточно, варьируя всего один параметр \$R\nu\$, а не каждый из сомножителей по отдельности.

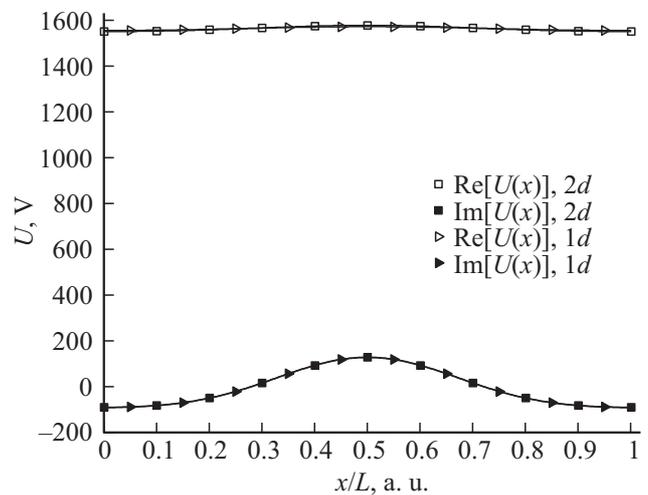


Рис. 7. Распределения вещественной и мнимой частей фазов напряжения в режиме V2, полученные в 2d (квадратные маркеры) и 1d (треугольные маркеры) постановках.

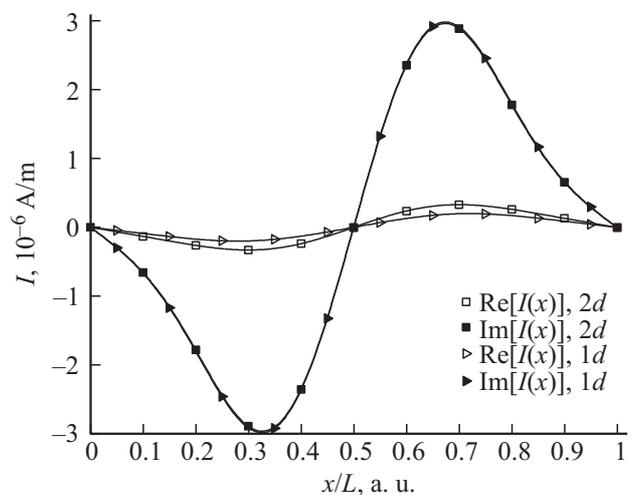


Рис. 8. Распределения вещественной и мнимой частей фазов тока в режиме V2, полученные в 2d (квадратные маркеры) и 1d (треугольные маркеры) постановках.

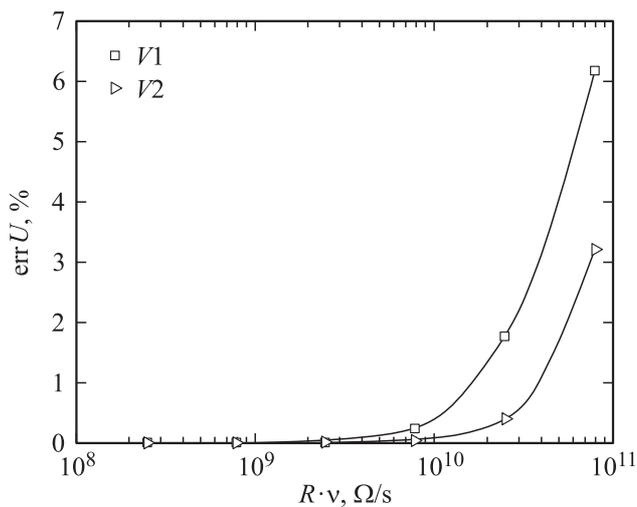


Рис. 9. Зависимость относительного отклонения фазов напряжения от произведения $R\nu$ для двух случаев подачи напряжения V1 и V2.

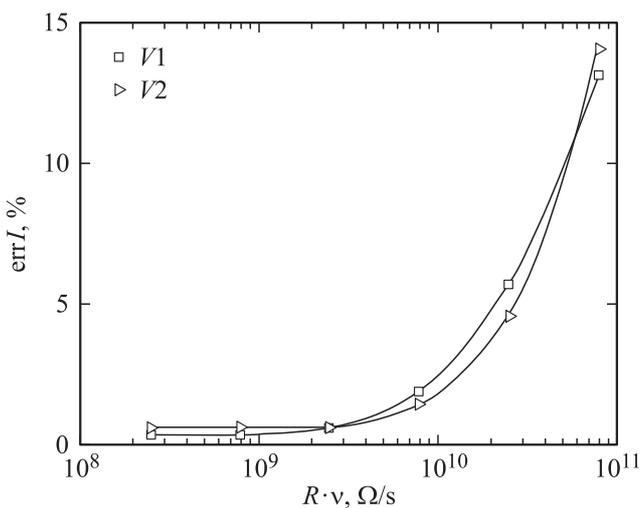


Рис. 10. Зависимость относительного отклонения фазов тока от произведения $R\nu$ для двух случаев подачи напряжения V1 и V2.

На рис. 9 и 10 представлены зависимости относительных отклонений распределений напряжения и тока для двух рассмотренных выше способов задания потенциала. Кривые построены в окрестности точки $R = 5 \cdot 10^8 \Omega$, $\nu = 50 \text{ Hz}$.

Нетрудно показать, что произведение $R\nu$ имеет размерность обратной емкости. В самом деле, в системе единиц СИ будем иметь $[R\nu] = \Omega/s = 1/F$. В соответствии с π -теоремой размерности [8,9] относительное отклонение, являясь безразмерной величиной, может быть представлено как безразмерная функция безразмерного аргумента. Сконструировать безразмерный параметр на основе $R\nu$ можно, введя в рассмотрение величину D — характерное значение шунтирующей емкости распределенного проводника. Последнее обозначение введено в

соответствии с формулой (1), где δD_{jp} обозначает шунтирующую емкость для пары элементов одномерного проводника. В результате безразмерный аргумент относительного отклонения примет вид произведения $RD\nu$. Распределения, представленные на рис. 9 и 10, по сути, демонстрируют зависимость относительного отклонения фазов от безразмерного параметра $RD\nu$.

Заметим, что в рамках проведенного рассмотрения численное значение характерной шунтирующей емкости D предъявить невозможно, так как в самом начале работы при переходе от (1) к (3) была отброшена та часть выражения, которая описывает взаимную емкость смежных участков распределенного проводника. Можно сказать, что предложенная одномерная модель является в этом смысле асимптотической, ее погрешность можно оценить как $O(RD\nu)$ при $RD\nu \rightarrow 0$.

Приближенный характер модели накладывает определенные ограничения на множество переходных процессов, которые предложенная одномерная модель способна описывать достаточно точно. Из представленных выше рассуждений следует, что при заданном погонном сопротивлении R требование достаточной точности порождает условие на максимальную допустимую частоту ν_{\max} . Иными словами, возникает ограничение на ширину спектра переходных процессов.

В завершение данного раздела рассмотрим переходные процессы в гипотетической системе при $R = 5 \cdot 10^8 \Omega$, проведем сравнение расчетов, полученных с помощью одномерной модели, с расчетами в полной двумерной постановке. В качестве примера рассмотрим переходные процессы, возникающие при „плавном включении“ режимов V1 и V2.

Будем предполагать, что напряжение на активном электроде изменяется во времени по следующему закону:

$$V(t) = V_{\text{amp}} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1 - \cos(\pi t / \tau)}{2} & 0 \leq t < \tau \\ 1 & 1 \geq \tau \end{cases} \quad (18)$$

В (18) $V(t)$ — зависимость напряжения на активном электроде, V_{amp} — амплитудное значение напряжения (будем по-прежнему использовать значение 10 kV), τ — длительность фронта включения напряжения. До момента $t = 0$ будем считать, что всюду в системе потенциал равен нулю.

Функция $V(t)$, заданная (18), не только непрерывна сама по себе, но и имеет непрерывную первую и кусочнонепрерывную вторую производные. В соответствии со свойствами обобщенного преобразования Фурье [10] из этого следует, что амплитудный спектр $V(t)$ ведет себя как $o(1/\omega^2)$ при $\omega \rightarrow \infty$, причем оценку можно уточнить до $O(1/\omega^3)$, если провести вычисления. Кроме этого, за счет параметра τ есть возможность регулировать „ширину“ спектра $V(t)$ и соответственно переходных процессов в системе: чем меньше τ , тем резче фронт включения и шире спектр, т.е. интенсивнее высокочастотные компоненты, и тем больше отклонения

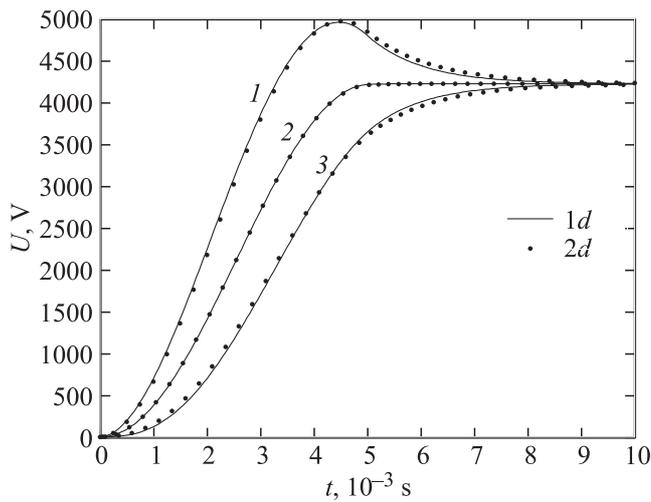


Рис. 11. Динамика напряжения в точках 1–3 при плавном включении режима V1, $\tau = 5$ мс.

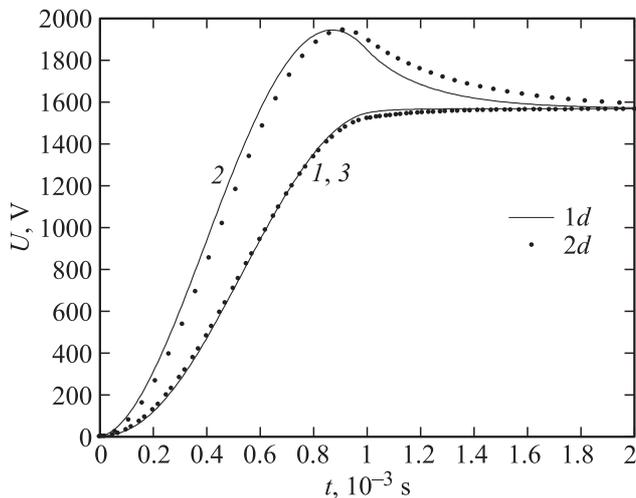


Рис. 12. Динамика напряжения в точках 1–3 при плавном включении режима V2, $\tau = 1$ мс.

одномерных расчетов от двумерных; чем больше τ , тем спектр уже, т.е. ниже интенсивность высокочастотных компонент, и тем одномерная модель оказывается точнее.

На рис. 11 и 12 представлены результаты расчета переходных процессов в гипотетической системе в режимах V1 и V2 при плавном включении напряжения в соответствии с (18). Для режима V1 значение τ было взято равным 5 мс, для режима V2 — 1 мс. Различие выбранных времен τ обусловлено тем, что в режиме V2 активным является второй электрод, который наиболее удален от распределенного проводника, ему соответствует наименьшая взаимная емкость (рис. 3), и характерный временной масштаб релаксационных процессов, который можно оценить как $\sim RC_2L^2$, где C_2 — характерное значение распределенной емкости $C_2(x)$, оказывается меньшим, чем в случае V1, где аналогичный

временной масштаб можно оценить как $\sim RC_1L^2$, C_1 — характерное значение $C_1(x)$. Данные на рис. 11 и 12 представлены в трех точках распределенного проводника, каждая из которых наиболее близка к одному из электродов. Индексация точек соответствует индексации электродов.

Кривые 1 и 3 на рис. 12 совпали из-за симметрии системы и конфигурации потенциалов в случае V2.

В обоих рассмотренных режимах отмечается достаточно хорошее соответствие одномерных расчетов и расчетов в полной постановке. Отклонения в случае V2 оказались чуть больше, чем в случае V1, что обусловлено меньшим значением длительности фронта τ и соответственно более широким спектром переходных процессов, который несколько вышел за пределы области применимости модели при данном сопротивлении.

Заключение

В настоящей работе удалось предложить одномерный инструментальный, пригодный для приближенного описания гармонических и переходных режимов в распределенном проводнике, взаимодействующем с системой потенциалов. На примере тестовой токоведущей системы проведена проверка модели путем сопоставления ее результатов с результатами расчетов в полной постановке с помощью МКЭ. В рамках проверки удалось подтвердить адекватность предложенной модели и определить область ее применимости. Разработанная одномерная модель существенно снижает вычислительную сложность при расчете переходных процессов.

Анализ распределенных емкостей и численных значений коэффициентов уравнений модели дает возможность достаточно точно оценивать характерные времена релаксационных процессов в распределенном проводнике. Последнее позволяет заранее тщательно подобрать временную сетку при расчете переходных процессов в полной постановке, если требуется точность большая, чем та, которую позволяет достичь одномерный инструментальный. Таким образом, если предложенная модель и не служит полноценной заменой расчетов в полной постановке в рамках данной конкретной задачи, то, по крайней мере, является их полезным дополнением.

Видится, что рассмотренный в работе приближенный одномерный инструментальный имеет большой потенциал развития. Предложенную модель можно обобщить на случай наличия в системе нескольких распределенных проводников. Кроме этого, как было замечено выше, основным ограничением описанной одномерной модели является неучет эффекта шунтирующих емкостей, который описывается суммой, отброшенной при переходе от (1) к (3). В дальнейшем представляется возможным с той или иной степенью точности включить ее в уравнения модели, и получить описание с более широкой областью применимости. При прочих равных условиях

такая модель сможет точнее описывать высокочастотные режимы и переходные режимы с более широким спектром. В качестве еще одного направления развития модели может выступить учет эффектов напыления заряда на распределенный проводник, который способен образовываться в результате разрядных процессов в газовой фазе [11]. В рамках такого обобщения модели представляется возможным рассматривать процессы релаксации оседающего заряда. Наконец, в определения погонных параметров одномерной модели можно добавить временную зависимость: $C_k = C_k(x, t)$, $R = R(x, t)$. Подобное обобщение, в частности, открывает возможность для описания систем с медленно изменяющейся во времени геометрией.

Список литературы

- [1] *A.V. Samusenko, Yu.K. Stishkov* // High Temp. 2011. Vol. 49. N 6. P. 803–814.
- [2] *A.G. Merkushev, M.A. Pavleyno* // Surf. Eng. Appl. Elect. 2013. Vol. 49. N 1. P. 57–60.
- [3] *G. Erikssona* // Proc. of COMSOL Conference. 2013.
- [4] *Меркушев А.Г., Павлейно М.А.* // Труды X Междун. научной конф. „Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей“. 2012. С. 238–240.
- [5] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: АСТ, 1988. С. 109–133.
- [6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. М.: Наука, 1982. 621 с.
- [7] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Наука, 1981. 512 с.
- [8] *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 208 с.
- [9] *Бриджмен П.* Анализ размерностей. Ижевск: РХД, 2001. 148 с.
- [10] *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1984. 640 с.
- [11] *Stishkov Yu.K., Kozlov V.B., Kovalyov A.N., Samusenko A.V.* // Surf. Eng. Appl. Elect. 2010. Vol. 46. N 4. P. 315–323.