

03

Прямой расчет формирования турбулентных течений в сферическом слое при встречных вращательных колебаниях границ

© Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
E-mail: jilenko@imec.msu.ru

Поступило в Редакцию 21 февраля 2014 г.

Численно исследован переход к турбулентности в течениях вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое, вызванных встречными вращательными колебаниями сферических границ. Частоты и амплитуды модуляции скоростей вращения сфер равны. Изучался переход к турбулентности, происходящий при возрастании амплитуды модуляции из состояния покоя. С использованием понятия мгновенной частоты/фазы течения установлено, что турбулентность формируется в ограниченной области слоя, за пределами которой течение остается ламинарным. Обнаружена перемежаемость „хаос–хаос“ в турбулентной части течения.

Переход замкнутых течений вязкой несжимаемой жидкости к турбулентному состоянию может происходить под действием неравномерного вращения границ [1]. В течении, вызванном вращением концентрически расположенных сферических границ вокруг общей оси, — сферическом течении Куэтта — до настоящего времени изучались переходы к турбулентности, вызванные периодическим изменением скорости вращения одной из границ. Установлено, что изменение частоты модуляции скорости вращения внутренней или внешней сферы может приводить к различным видам турбулентных режимов течений вблизи границы их формирования [2–4]. Как результаты трехмерных расчетов [2], так и измерения скорости течения лазерным доплеровским анемометром [3], совмещенные с визуализацией, показывают, что модуляция скорости вращения может приводить к неоднородной во времени турбулентности. Наиболее известна неоднородность в виде перемежаемости „цикл–хаос“ — произвольного чередования во време-

ни ламинарных и турбулентных участков, распространяющихся на весь сферический слой [2]. При повышении частоты модуляции наблюдалась перемежаемость „хаос–хаос“ [3] в виде произвольного чередования во времени участков со слабой и сильной турбулентностью, а также перемежаемость „цикл–хаос–хаос“ [4]. Дальнейшее повышение частоты приводило к однородной во времени турбулентности. Измерения [3,4] проводились в области средних широт (между экватором и полюсом) вблизи внешней сферы, что не позволяет сделать вывод об установлении неоднородной турбулентности во всем сферическом слое.

В [2–4] рассматривается воздействие модуляции скорости вращения на исходное периодическое течение, образуемое встречным вращением сферических границ. Не менее интересен вопрос о возможности перехода к турбулентности непосредственно из состояния покоя. Так, в [5] рассматриваются вращательные колебания сферы в жидкости относительно состояния покоя. Выводы о переходе к турбулентности в [5] основаны на визуализации течения в эксперименте и на результатах осесимметричных расчетов, оба подхода не позволяют сделать окончательного вывода ни об установлении турбулентного режима, ни о его свойствах.

Цель данной работы — численное исследование возможности формирования турбулентности и изучение ее свойств при вращательных колебаниях двух сферических границ относительно состояния покоя. Рассматривается случай, при котором частоты и амплитуды модуляции сфер равны, а их угловые скорости изменяются со сдвигом фаз π . Течение вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U \times \text{rot } U - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) - \nu \text{rot rot } U, \quad \text{div } U = 0,$$

с условиями прилипания и непротекания на границах, которые в сферической системе координат с радиальным (r), полярным (θ) и азимутальным (φ) направлениями имеют вид $u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t)r_k \sin \theta$, $u_r(r = r_k) = 0$, $u_\theta(r = r_k) = 0$, $k = 1, 2$ (1 — внутренняя сфера, 2 — внешняя). Здесь U , p , ρ — скорость, давление и плотность жидкости, u_φ , u_r , u_θ — соответственно азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости, r_k , Ω_k — радиус и угловая скорость вращения соответствующей сферы, ν — кинематическая вязкость жидкости в слое. Скорости вращения сфер изменяются периодически

Осредненный за период модуляции модуль момента сил трения M , передаваемый на внутреннюю сферу (определение см., например, в [12]), а также азимутальная E_φ и меридиональная E_ψ составляющие кинетической энергии течения в зависимости от количества узлов сетки N для турбулентного режима течения при $Re_1 = 67.3$

$N \cdot 10^{-5}$	$M \cdot 10^5, m^5 \cdot s^{-2}$	$E_\varphi \cdot 10^2, m^2 \cdot s^{-2}$	$E_\psi \cdot 10^4, m^2 \cdot s^{-2}$
4.67	1.7300	1.8508	8.154
5.8	1.7313	1.8625	7.589
6.97	1.7317	1.8673	7.507

$\Omega_1(t) = A \sin(2\pi f t + \psi_1)$, $\Omega_2(t) = A \sin(2\pi f t + \psi_2)$, $\psi_1 - \psi_2 = \pi$, где A , f — соответственно амплитуда и частота модуляции скорости вращения сфер, ψ_1 , ψ_2 — начальные значения фазы. Так же, как и в [2], использовался вычислительный алгоритм с конечно-разностной схемой дискретизации уравнений Навье–Стокса по пространству и полуявной схеме Рунге–Кутты 3-го порядка точности для интегрирования по времени [6]. Дискретизация по пространству проводилась с уменьшением размера ячеек вблизи границ (по r) и плоскости экватора (по θ). Отношение максимального размера ячейки к минимальному равно 3, общее количество узлов $5.76 \cdot 10^5$. Проведены методические расчеты для определения зависимости величин осредненного модуля момента сил трения на внутренней сфере и кинетической энергии течения от размеров сетки (см. таблицу).

Расчеты проведены при следующих размерных параметрах: $\nu = 5 \cdot 10^{-5} m^2/s$, $r_1 = 0.075 m$, $r_2 = 0.15 m$, $f = 0.5 Hz$. Течение зависит от величин A , f , r_1 , r_2 , $\psi_1 - \psi_2$. В качестве параметров подобия, аналогично [5], рассматриваются числа Рейнольдса для внутренней и внешней сфер $Re_1 = 2Ar_1/2\pi f \delta$, $Re_2 = 2Ar_2/2\pi f \delta$, где $\delta = (2\nu/2\pi f)^{1/2}$, а также относительная толщина слоя $\beta = (r_2 - r_1)/r_1 = 1$. Зависимость от разности фаз сводится к выражению $\Omega_1(t) + \Omega_2(t) = 0$. При указанных выше параметрах $\delta = 5.64 \cdot 10^{-3} m$, что соответствует 7 узлам расчетной сетки. Временные ряды скорости течения записывались в 2 точках. Первая вблизи внутренней сферы и экватора ($r = 3.55\delta$, $\theta = 1.5868$), вторая вблизи внешней сферы на средних широтах ($r = 2.84\delta$, $\theta = 1.03267$).

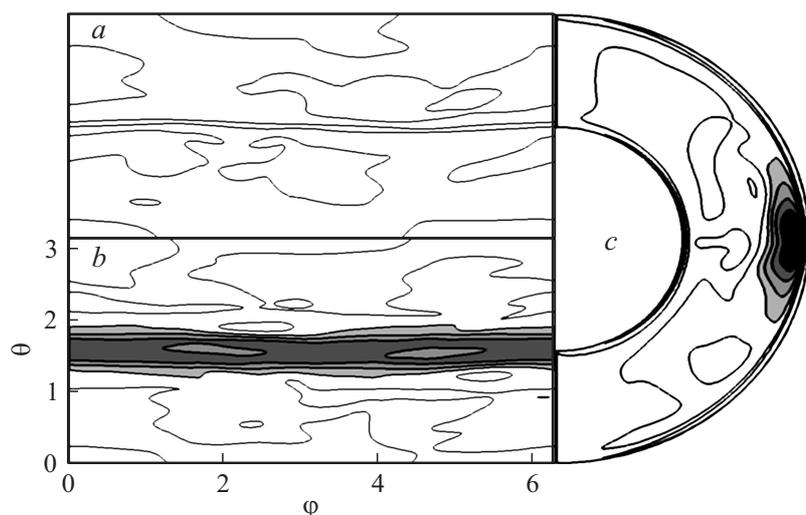


Рис. 1. Линии уровней u_φ [m/s]: a — в плоскости φ – θ вблизи внутренней сферы (точка 1); b — вблизи внешней сферы (точка 2); c — в меридиональной плоскости течения, проходящей через ось вращения. $Re_1 = 72$, $u_{\varphi \max} = 0.1$, $u_{\varphi \min} = -0.4$, $\Delta u_\varphi = 0.1$. Бесцветные участки соответствуют уровням $u_\varphi \geq -0.1$, увеличение интенсивности фона соответствует уменьшению u_φ . Показан момент увеличения скорости вращения сфер через 0.2 s после прохождения нулевых значений.

При $Re_1 \leq 55$ течение симметрично относительно оси вращения и плоскости экватора, в спектре скорости присутствует только частота модуляции. С увеличением Re_1 течение теряет устойчивость и становится несимметричным относительно оси вращения. Вблизи внутренней сферы вторичное течение несимметрично относительно плоскости экватора, и его волновое число в азимутальном направлении $m = 1$, вблизи внешней — квазисимметрично относительно плоскости экватора с $m = 2$. В спектрах скорости появляется вторая частота, значительно меньшая частоты модуляции. При дальнейшем увеличении Re_1 течение становится турбулентным, уровень низкочастотной части спектра (0.01–0.1 Hz) возрастает не менее чем на 2 порядка. В узкой приэкваториальной области сохраняется пространственная структура (рис. 1), характерная для вторичного течения, а хаотизация наблюдается

в области средних широт. Для количественной оценки степени хаотизации течения воспользуемся величиной корреляционной размерности D , вычисляемой следующим образом [7]:

$$C(r) \sim r^D, \quad C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{j,j=1}^m H(r^{(p)} - |x_i^{(p)} - x_j^{(p)}|).$$

Здесь H — функция Хевисайда, $r^{(p)}$ — расстояние в p -мерном пространстве, $x_i^{(p)} \{x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (p-1)\tau)\}$ — точка в p -мерном пространстве, характеризующая состояние системы в момент времени t_i . Ряд $x(t_0 + k\Delta t)$ представляет собой дискретную запись скорости течения с интервалом дискретизации Δt . Тангенс угла наклона кривой $\log(C(r)) = f(\log(r))$ равен корреляционной размерности D . Здесь мы будем вычислять размерности D_1 и D_2 по временным рядам u_φ , записанным в точках 1 и 2 соответственно, и размерность D_A , рассчитанную по величине A_{3D} [6], учитывающей весь объем течения

$$A_{3D}^2 = (3/4\pi)(r_2^2 - r_1^2)^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_{r_1}^{r_2} |U - U_{2D}|^2 r^2 \sin \theta dr,$$

U_{2D} — осесимметричная составляющая скорости:

$$U_{2D} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} U d\varphi.$$

Длина записи составляла не менее $5.0 \cdot 10^4$ точек, $\tau = 300$ с. Величина D_A приведена на рис. 2, 1.

Учитывая то, что в сферических слоях при постоянных скоростях вращения величина размерности на границе возникновения хаоса находится в интервале $3.5 \leq D \leq 4$ [8,9], можно заключить, что переход к турбулентности в нашем случае происходит при $Re_1 \approx 65$ (рис. 2, 1). При постоянных граничных условиях размерность не зависит от местоположения точки записи скорости течения [8,10]. Для проверки этого условия в нашем случае рассмотрим величину $\Delta = (D_2 - D_1)/D_A$, максимальные отклонения Δ от 0 наблюдаются в области перехода ($55 \leq Re_1 \leq 65$) (рис. 2, 2). Для всех рассчитанных

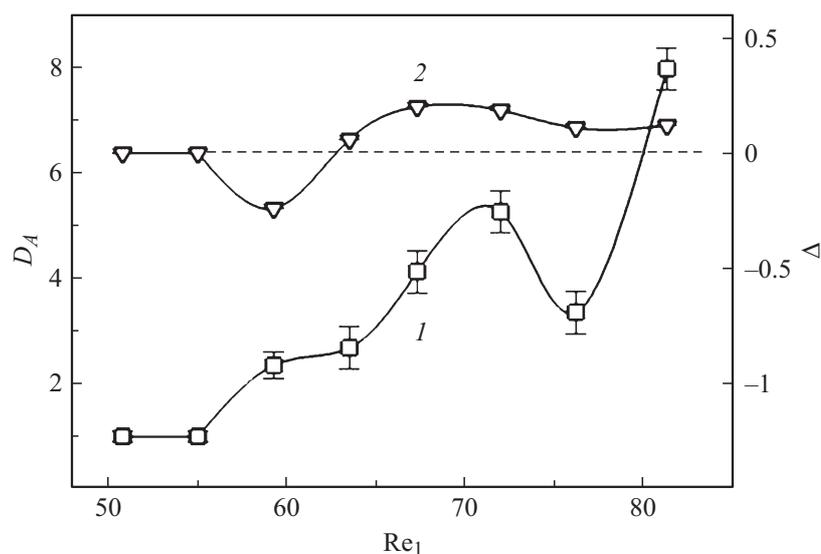


Рис. 2. Величины D_A (1) и Δ (2) в зависимости от Re_1 . Вертикальными линиями показан возможный разброс величин размерности при изменении τ .

турбулентных режимов $\Delta \geq 0$, что количественно определяет более высокую стохастичность течения в средних широтах по сравнению с приэкваториальной областью, качественно это заметно по структуре течения (рис. 1). Зависимость величины размерности от местоположения точки ее определения позволяет предположить, что влияние вращательных колебаний границ на течение по-разному проявляется в различных областях слоя, что не позволяет рассматривать течение при переходе к турбулентности как единую динамическую систему.

Для проверки этой гипотезы рассмотрим фрагменты записи азимутальной скорости в течении после перехода к турбулентности при $Re_1 = 72$ (рис. 3). Видно, что поведение u_ϕ вблизи внутренней сферы и экватора 1 близко к периодическому, со слабой нерегулярной амплитудной модуляцией, а на средних широтах вблизи внешней сферы 2 становится турбулентным. Таким образом, течение неоднородно по пространству: турбулентность устанавливается в ограниченной области слоя, вне этой области течение остается ламинарным. Оценить

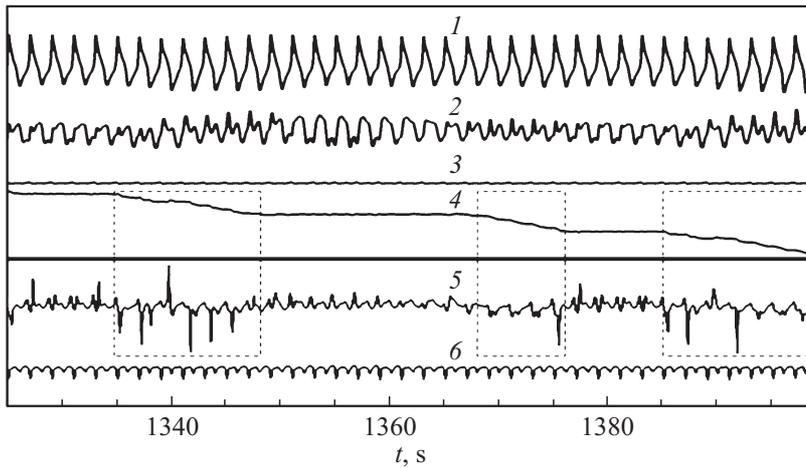


Рис. 3. Азимутальная скорость течения u_φ (1, 2), разница мгновенных значений фаз (3, 4) и частот (5, 6) между скоростью вращения внутренней сферы $\Omega_1(t)$ и скоростью течения u_φ , вблизи внутренней (1, 3, 6) и внешней (2, 4, 5) сфер в зависимости от времени t при $Re_1 = 72$. Пунктиром отмечены участки с более сильной турбулентностью.

неравномерность турбулентности во времени можно на основе анализа поведения мгновенных величин фазы и частоты сигнала [11], аналогично тому, как это сделано в [4]. Мгновенное значение фазы $\Psi(t)$ сигнала скорости $x(t)$ определяется как $\Psi(t) = \arctg(y(t)/x(t))$, $y(t)$ — ортогональное дополнение к $x(t)$, которое вычисляется как преобразование Гильберта ряда $x(t)$ [11]. Тогда $\chi(t) = \partial(\Psi(t))/\partial t$ — мгновенная частота. Рассмотрим разность мгновенных фаз и частот между скоростью вращения внутренней сферы и скоростью в выбранной точке течения. Видно, что в точке 1 разность фаз постоянна во времени 3, а разность частот 6 изменяется во времени регулярным образом; таким образом, в точке 1 течение полностью синхронизируется с вращением границы. В то же время вблизи внешней сферы указанные выше параметры меняются со временем. Аналогично [4] можно выделить участки со слабой турбулентностью, где под влиянием сильной синхронизации разность фаз постоянна во времени, а разность частот не претерпевает скачков. На участках с сильной турбулентностью и слабой синхронизацией разность

фаз изменяется во времени, а разница частот сильно отклоняется от средних значений. Участки с различными свойствами турбулентности чередуются во времени произвольным образом, что позволяет делать вывод о появлении перемежаемости типа „хаос—хаос“.

Таким образом, при повышении амплитуды встречных вращательных колебаний границ в части слоя формируется течение с произвольным чередованием участков слабой и сильной турбулентности. Вместе с тем в других областях турбулентной части течения его характер может быть иным. Можно предположить, что представленный выше подход, основанный на использовании понятия разностей фаз/частот, может в дальнейшем использоваться для определения границ как между турбулентными/нетурбулентными областями течения, так и между однородной/неоднородной во времени турбулентностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-08-00204.

Список литературы

- [1] *Coles D.* // *J. Fluid Mech.* 1965. Pt. 3. P. 385–425.
- [2] *Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.* // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. В. 1. С. 62–70 (*Zhilenko D., Krivonosova O.* // *Tech. Phys. Lett.* 2013. V. 39. P. 84–87).
- [3] *Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.* // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 4. С. 45–55 (*Zhilenko D., Krivonosova O.* // *Fluid Dynamics.* 2013. V. 48. N 4. P. 452–460).
- [4] *Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.* // Докл. РАН. 2014. Т. 454. № 3. С. 278–281 (*Zhilenko D., Krivonosova O.* // *Dokl. Physics.* 2014. V. 59. N 1. P. 45–48).
- [5] *Hollerbach R.* et al. // *Phys. fluids.* 2002. V. 14. N 12. P. 4192–4205.
- [6] *Nikitin N.* // *J. Comp. Phys.* 2006. V. 217 (2). P. 759–781.
- [7] *Grassberger P., Procaccia I.* // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 50. N 5. P. 346–349.
- [8] *Беляев Ю.Н., Яворская И.М.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 1. С. 10–18 (*Belyaev Yu.N., Yavorskaya I.M.* // *Fluid Dynamics.* 1991. V. 26. N 1. P. 7).
- [9] *Nakabayashi K., Sha W., Tsuchida Y.* // *J. Fluid Mech.* 2005. V. 534. P. 327–350.
- [10] *Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. В. 4. С. 16–23 (*Zhilenko D., Krivonosova O.* // *Tech. Physics.* 2010. V. 55. N 4. P. 449–456).
- [11] *Anishchenko V.* et al. // *Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic system.* Springer, 2002.
- [12] *Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э., Никитин Н.В.* // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 6. С. 22–33 (*Zhilenko D.Yu., Krivonosova O.E., Nikitin N.V.* // *Fluids Dynamics.* 2007. V. 42. N 6. P. 886–896).