

01

Задача Ферми—Улама и режим прилипания

© В.Д. Винокурова¹, Н.Н. Розанов^{1–3}

¹ ОАО „Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова“, Санкт-Петербург

² Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург

³ Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург
E-mail: nnrosanov@mail.ru

Поступило в Редакцию 2014 г.

Проведен анализ динамики точечной классической частицы при ее упругом отражении от одиночной периодически осциллирующей стенки и в схеме динамического бильярда с отражениями от неподвижной и осциллирующей стенки. В случае одиночной стенки продемонстрирован режим „прилипания“, в котором частица в течение полупериода осцилляций практически локализована на стенке, многократно отражаясь от нее. Показано, что при варьировании параметров задачи в диапазоне, отвечающем изменению числа последовательных отражений от одной и той же стенки, зависимость скорости отраженной частицы от этих параметров включает разрывы производной. Для схемы динамического бильярда представлены устойчивые режимы различных типов с неизменной кинетической энергией частицы и режимы детерминированного хаоса; в последнем случае также существенным является наличие указанных разрывов.

Для объяснения ускорения космических частиц Ферми предложил механизм, основанный на отражении таких частиц от хаотически движущихся массивных объектов [1]. В развитие этой идеи Улам провел компьютерное моделирование движения точечной механической частицы между неподвижной и периодически осциллирующей стенками, обнаружив режимы динамического хаоса [2]. В дальнейшем в этом направлении были выполнены многочисленные исследования, как имеющие принципиальное значение для обоснования статистической физики, так и уточняющие характер динамики частицы в динамическом бильярде различной физической природы [3–6]. Отметим, что принимаемое в ряде работ вслед за Уламом [2] упрощение, состоящее в приближении

движения стенки пилообразным, недостаточно реалистично и не позволяет достоверно описать, например, устойчивость уже простейших видов динамики частицы в бильярде. Также недостаточно обосновано популярное в литературе пренебрежение отклонениями точки встречи частицы с осциллирующей стенкой [3]. В настоящем сообщении представлены результаты аналитического и численного анализа динамики частицы в одномерном динамическом бильярде без использования указанных приближений. Особое внимание уделяется условиям, при которых частица несколько раз последовательно сталкивается с одной и той же осциллирующей стенкой, что приводит к новым типам динамики.

Рассмотрим сначала отражение частицы от стенки, осциллирующей с определенной частотой Ω и амплитудой μL_0 , где L_0 — величина размерности длины и μ — безразмерный параметр. Тогда координата стенки $Z_w(t) = \mu L_0 \cos(\Omega t)$. Далее вводим безразмерное время $\Omega t \rightarrow t$ и безразмерную координату стенки $z_w(t) = Z_w(t)/(\mu L_0) = \cos t$. Для скорости частицы V также используем безразмерную форму $v = V/(\mu L_0)$. После n -го упругого отражения частицы от стенки в момент времени t_n скорость частицы будет $v_{n+1} = -v_n + 2\dot{z}(t_n) = -v_n - 2\sin t_n$, а траектория частицы $z_p(t) = \cos t_n + v_{n+1}(t - t_n)$. Соответственно уравнение для определения времени следующего столкновения имеет вид

$$\cos t_{n+1} = \cos t_n + v_{n+1}(t_{n+1} - t_n). \quad (1)$$

Это уравнение универсально в том смысле, что в него не входят никакие параметры схемы. Пример четырех последовательных столкновений частицы от осциллирующей стенки приведен на рис. 1, а. В интересующем нас режиме прилипания временной интервал между последовательными столкновениями $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ весьма мал. Для него, используя в (1) разложение Тейлора с сохранением кубического по τ_n члена, найдем

$$\tau_n = \frac{3 \cos t_n - \sqrt{9 \cos^2 t_n + 24 \sin t_n (v_{n+1} + \sin t_n)}}{2 \sin t_n}. \quad (2)$$

Интервал τ_n мал, если мала величина $v_{n+1} + \sin t_n$. Поэтому „идеальный“ режим прилипания достигается, когда частица сталкивается с „убегающей“ стенкой в момент времени $t_a = -\pi/2$ с единичной скоростью $v_a = 1$. Тогда число столкновений частицы со стенкой бесконечно велико и частица отлетает от стенки через половину

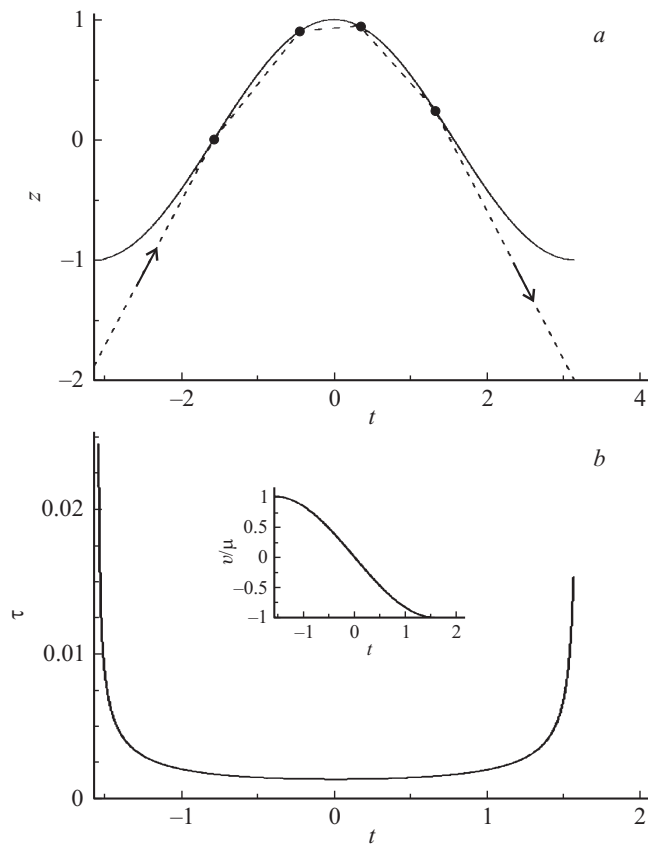


Рис. 1. *a* — временная зависимость координаты осциллирующей стенки (сплошная линия) и траектория частицы (штриховая линия) в случае 4 последовательных отражений от стенки; $t_a = -\pi/2$, начальная скорость частицы $v_0 = 1.2$. *b* — зависимость временного интервала между столкновениями τ и скорости частицы v (врезка) от времени; $t_a = -\pi/2$, $v_0 - v_a = 0.0001$. *c* — зависимость скорости отраженной частицы от начальной фазы осциллирующего зеркала t_0 , $v_0 = 0.212$. Врезка — подробное изображение области с изломами зависимости.

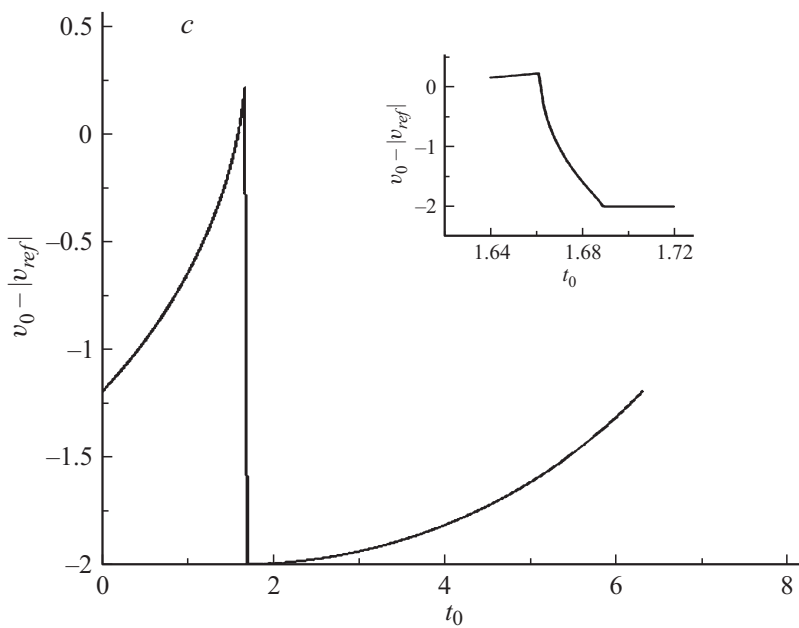


Рис. 1 (продолжение).

периода осцилляций (в момент $t = \pi/2$) с той же кинетической энергией (скорость отлета $v = -v_a = -1$). При малых отклонениях скорости налета и момента столкновения от „идеальных“ условий число столкновений становится конечным. На рис. 1, *b* приведена полученная при использовании (2) временная зависимость интервала между столкновениями и скорости частицы в условиях, когда число столкновений составляет 1632.

В зависимости от времени первого столкновения или же начальной фазы осцилляций стенки частица может либо уменьшать, либо увеличивать свою кинетическую энергию в результате столкновений. На рис. 1, *c* показана соответствующая зависимость разности модулей скорости частицы от фазы осцилляций стенки t_0 в момент времени, когда (безразмерная) координата частицы $z_{p0} = -1$. Эта зависимость, хотя и непрерывна, но обладает разрывами производной, которые происходят при смене числа последовательных отражений частицы от стенки. Так, на рис. 1, *c* участки с положительной (отрицательной)

производной отвечают режимам однократного (двукратного) отражения. Аналогичные разрывы возникают и при варьировании начальной скорости частицы.

Далее рассмотрим движение частицы между неподвижной (расположенной при $z = 0$) и осциллирующей стенками. Теперь уже нельзя перенормировкой устранить параметр μ , поэтому безразмерные координаты и скорости получаем делением размерных величин на среднее расстояние между стенками L_0 . Тогда координата осциллирующего зеркала $z_w(t) = 1 + \mu \cos t$. Глубину модуляции координаты считаем малой, $\mu^2 \ll 1$.

Сначала проверим реализуемость простейших движений с сохранением кинетической энергии частицы при столкновениях со стенками. Пусть для невозмущенного движения первое столкновение происходит при $t = 0$, а следующие — при $t = 2\pi N$, $N = 1, 2, \dots$. Тогда „невозмущенная“ скорость $v_{0N} = z_0/(\pi N) = (1 + \mu)/(\pi N)$, а динамика малых отклонений скорости δv_n и момента столкновения δt_n определяется рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \delta v_{n+1} &\approx \delta v_n + 2\mu \delta t_n, \\ \delta t_{n+1} &= -\frac{2\pi^2 N^2}{1 + \mu} \delta v_n + \left[1 - \frac{4\pi^2 N^2 \mu}{1 + \mu}\right] \delta t_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Собственные значения матрицы преобразования (3) λ находятся из квадратного уравнения

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(1 - \lambda - a) + a &= 0, \quad a = \frac{4\pi^2 N^2 \mu}{1 + \mu}, \\ \lambda_{1,2} &= 1 - \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - a}, \quad \lambda_1 \times \lambda_2 = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Режим с отражениями от стенки в ее крайнем „левом“ положении (координата $z_w = 1 - |\mu|$) соответствует $\mu < 0$. Тогда $a < 0$, корни вещественны и наибольший корень превышает единицу. Это отвечает апериодической неустойчивости данного режима отражения. В режимах отражения от стенки в „правом“ положении, $z_w = 1 + |\mu|$, можно считать $\mu > 0$ и $a > 0$. При $0 < a < 4$ подкоренное выражение в (4) отрицательно, корни $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\nu)$, $\operatorname{tg} \nu = \sqrt{4a - a^2}/(2 - a)$, $|\lambda_{1,2}|^2 = 1$. В этом случае динамика отклонений скорости частицы от равновесного

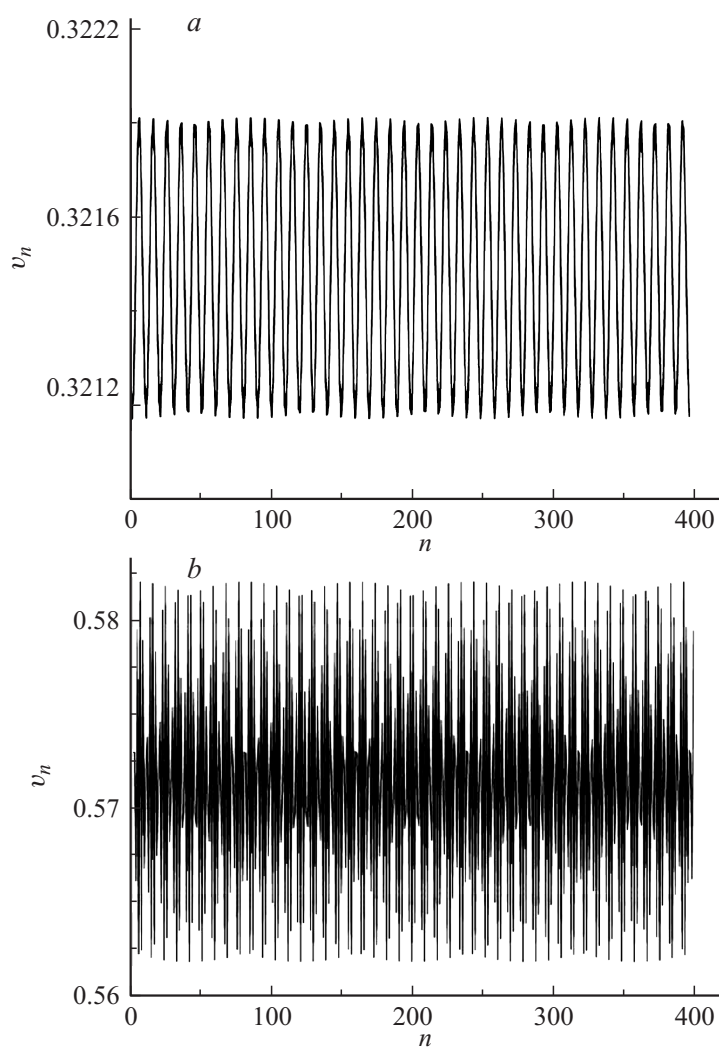


Рис. 2. Зависимость скорости частицы от номера столкновения в окрестности режима с $N = 1$ (a), $M = 1$ (b) и режима динамического хаоса при $\mu = 0.01$ и $v_0 = 0.015$ (c).

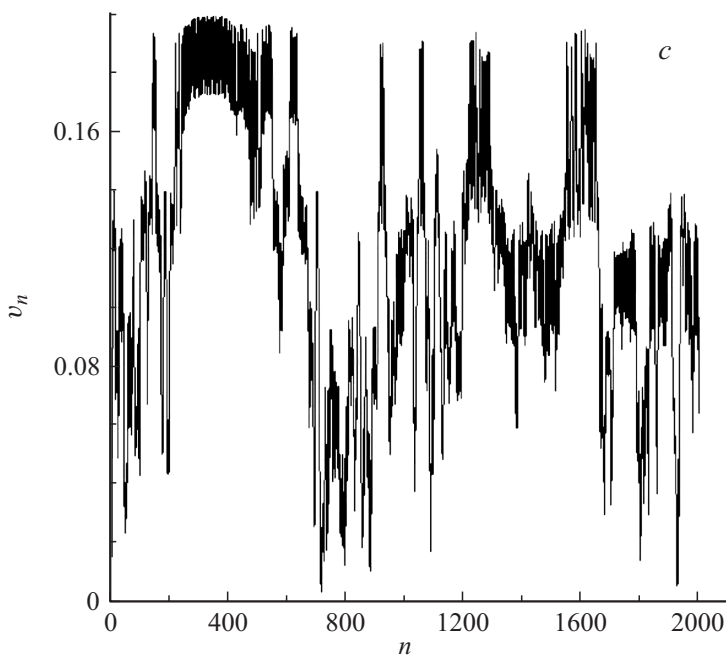


Рис. 2 (продолжение).

значения следующая: $\delta v_n = w \cos(vn + \varphi)$, где w и φ произвольны. Это означает нейтральную устойчивость режимов отражения от осциллирующей стенки в моменты ее максимального удаления. Если же $a > 4$, то оба корня вещественны и отрицательный корень меньше -1 . Тогда реализуется колебательная неустойчивость. Граница устойчивости отвечает $a_{cr} = 4$ или $\mu_{cr} = 1/(\pi^2 N^2 - 1)$. При $N = 1$ $\mu_{cr} = 0.113$, при $N = 2$ $\mu_{cr} = 0.026$.

Численное моделирование подтверждает приведенные выводы. Так, рис. 2, а демонстрирует нейтральную устойчивость режима с $N = 1$ при $\mu = 0.01$, когда начальная скорость частицы немного отличается от „невозмущенного“ значения. Действительно, неустойчивыми оказываются режимы с отражением от осциллирующего зеркала в моменты, отвечающие $z_w = 1 - |\mu|$. Но возможными оказываются не только подобные режимы. Например, при большей скорости $v_{0M} = 1/[\pi(M - 1/2)]$,

$M = 1, 2, \dots$ устойчивыми оказываются режимы с чередованием отражения частицы от осциллирующей стенки в моменты ее наибольшего и наименьшего удаления (рис. 2, *b*). При меньших скоростях частицы типичен режим динамического хаоса [7], пример которого приведен на рис. 2, *c*. Отметим, что и в последнем случае существенное влияние на динамику могут оказывать наличие режимов с несколькими последовательными отражениями от одной и той же осциллирующей стенки и разрывность наклона зависимости изменения кинетической энергии частицы от фазы осцилляций стенки. Указанные эффекты необходимо учитывать и в более сложных (неодномерных) вариантах динамического бильярда. Режим прилипания может быть практически полезен для реализации длительного удержания частицы у поверхности, например в химических реакторах [8] с катализатором на осциллирующей поверхности. Родственные явления могут проявляться и в динамике квантовых частиц и солитонов в динамических ловушках [9–11].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-12-00894).

Список литературы

- [1] *Fermi E.* // Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 1169.
- [2] *Ulam S.M.* // Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, CA (University of California Press, Berkeley, 1961). V. 3. P. 315.
- [3] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
- [4] *Пустыльников Л.Д.* // УМН. 1995. Т. 50. № 1 (301). С. 143–186.
- [5] *Лоскутов А.Ю.* // УФН. 2007. Т. 177. С. 989.
- [6] *Gelfreich V., Kedar V.R., Shah K., Turaev D.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 074 101.
- [7] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
- [8] Процессы и аппараты химической технологии / Под ред. А.М. Кутепова. В 5 т. М.: Логос, 2000.
- [9] *Rosanov N.N.* // Phys. Rev. A. 2013. V. 88. P. 063 616.
- [10] *Розанов Н.Н., Сочилин Г.Б.* // ЖЭТФ. 2014. Т. 145. В. 1. С. 143–152.
- [11] *Rosanov N.N.* // Phys. Rev. A. 2014. V. 89. P. 035 601.