

11

Оценка времени запаздывания воздействия по временным рядам с учетом автокорреляционной функции фазового шума

© *Е.В. Сидак, Д.А. Смирнов, Б.П. Безручко*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова
E-mail: sidakev@gmail.com

Поступило в Редакцию 16 июня 2014 г.

Для интервальной оценки времени запаздывания связи между автоколебательными системами предложена модификация метода, основанного на моделировании фазовой динамики, которая обеспечивает его применимость в случае, когда шумы, влияющие на динамику фаз колебаний, не белые, а именно, уточнен способ расчета доверительного интервала на основе учета времени корреляции фазового шума. Применимость предложенного метода проиллюстрирована на эталонных осцилляторах в численном эксперименте.

Задача выявления запаздывающих связей между колебательными системами по временным рядам возникает в различных областях науки и практики, включая био- и геофизику, см., например, [1,2]. При этом время запаздывания является важной характеристикой, во многих случаях определяющей сложность наблюдаемой динамики, и его оценке по данным посвящен ряд работ [3–5]. Интервальная оценка, основанная на эмпирическом моделировании наблюдаемой фазовой динамики [6], имеет хорошие перспективы практических приложений, так как она применима в случае достаточно коротких временных рядов (несколько десятков характерных периодов), что было показано ранее для автоколебательных систем с предельным циклом под действием нормального белого шума. Однако свойства фазовых шумов во многих ситуациях могут быть иными, как это имеет место для эталонных хаотических систем, например для системы Ресслера [7,8], и для осцилляторов под действием узкополосного случайного процесса. Для получения надежных оценок времени запаздывания в таких случаях требуется

проверить применимость метода и ввести необходимые поправки, чему посвящена данная работа.

Строго обосновано [7,9,10], что при описании динамики автоколебательных систем с предельным циклом, слабо связанных и возмущенных слабыми шумами, в уравнениях для эволюции фаз можно пренебречь влиянием амплитуд. Согласно подходу [3,6], предполагая такие свойства исследуемых систем, по имеющимся временным рядам $x_1(t)$ и $x_2(t)$ сначала рассчитываются одним из известных методов [7] временные ряды фаз колебаний $\{\phi_1(t_1), \dots, \phi_1(t_N)\}$ и $\{\phi_2(t_1), \dots, \phi_2(t_N)\}$, где $t_i = i\Delta t$, Δt — интервал выборки, N — длина ряда. Для оценки воздействия первого осциллятора на второй („в обратную сторону“ все аналогично) строят модель фазовой динамики второго осциллятора в виде стохастического разностного уравнения

$$\phi_2(t + \tau) - \phi_2(t) = F(\phi_2(t), \phi_1(t - \Delta)) + \varepsilon(t), \quad (1)$$

где приращения фазы берутся на интервале фиксированной длины τ (параметр метода), ε — „ τ -интегрированный“ фазовый шум, F — тригонометрический многочлен, Δ — свободный параметр модели. Коэффициенты F определяются методом наименьших квадратов, т. е. минимизацией $S(\Delta) = \langle \hat{\varepsilon}^2(t_i) \rangle$, где $\hat{\varepsilon}(t_i) = \phi_2(t_i + \tau) - \phi_2(t_i) - F(\phi_2(t_i), \phi_1(t_i - \Delta))$, угловые скобки означают усреднение по моментам наблюдений t_i . Затем S минимизируется путем перебора различных Δ , и точечная оценка времени запаздывания воздействия имеет вид $\hat{\Delta} = \Delta_{\min} + \tau/2$, где $\Delta_{\min} = \arg \min_{\Delta} S(\Delta)$. Дисперсия оценки $\hat{\Delta}$ в предположении о белом шуме в исходной системе и, значит, о спаде автокорреляционной функции (АКФ) шума ε до нуля на интервале от 0 до τ [6] оценивается по формуле

$$\hat{\sigma}_{\Delta}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{N'} \left(\frac{d^2 S(\Delta)}{d\Delta^2} \Big|_{\Delta=\Delta_{\min}} \right)^{-1}, \quad (2)$$

где $N' = N\Delta t/\tau$ — количество интервалов длины τ на длине ряда, $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \min_{\Delta} S(\Delta)$ — оценка дисперсии шума ε . Для оценки второй производной в уравнении (2) зависимость $S(\Delta)$ в окрестности точки минимума Δ_{\min} аппроксимируется квадратичной параболой. Интервальная оценка времени запаздывания (95%-ный доверительный интервал) рассчитывается как $\hat{\Delta} \pm 1.96\hat{\sigma}_{\Delta}$. Если формула (2) дает ширину интервала,

меньшую $2\Delta t$, то он принимается равным $\hat{\Delta} \pm \Delta t$. Эффективность метода была показана для фазовых осцилляторов и осцилляторов Ван-дер-Поля под действием белого шума [6].

Рассмотрим системы с иными свойствами шумов, например, фазовые осцилляторы

$$\begin{aligned} d\phi_1(t)/dt &= \omega_1 + \xi_1(t), & d\xi_1(t)/dt &= -\alpha_1\xi_1(t) + \eta_1(t), \\ d\phi_2(t)/dt &= \omega_2 + k \sin(\phi_1(t - \Delta_0) - \phi_2(t)) + \xi_2(t), \\ d\xi_2(t)/dt &= -\alpha_2\xi_2(t) + \eta_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\omega_{1,2}$ — собственные угловые частоты колебаний, k — коэффициент связи, Δ_0 — время запаздывания воздействия $1 \rightarrow 2$, $\eta_{1,2}$ — взаимно некоррелированные белые шумы с автоковариациями $\langle \eta_k(t)\eta_k(t') \rangle = D_k\delta(t-t')$, а $\xi_{1,2}$ — „цветные“ частотные шумы. Дисперсия ξ_k выражается через интенсивность белого шума η_k как $\sigma_{\xi_k}^2 = D_k/(2\alpha_k)$. Ансамбль из 100 пар временных рядов мы получали путем интегрирования уравнений (3) методом Эйлера с шагом 0.01 при интервале выборки 0.3 (примерно 20 точек на характерном периоде для использованных ниже значений параметров), длине ряда $N = 2094$ (около 100 характерных периодов) и $\tau = 1.5$ (четверть периода) [6]. По каждой паре рядов рассчитывалась оценка запаздывания и подсчитывалась частота f_{err} ложных выводов о его величине, т.е. таких ситуаций, когда Δ_0 не принадлежит интервалу $\hat{\Delta} \pm 1.96\hat{\sigma}_{\Delta}$. Метод работает корректно, если вероятность ложных выводов не больше 0.05, так как доверительный интервал 95%-ный. При учете флуктуаций частоты f_{err} , которая распределена по закону Бернулли, допустимое пороговое значение f_{err} для ансамбля из 100 пар рядов составляет 0.1.

Результаты для $\omega_1 = 1.05$, $\omega_2 = 0.95$, $k = 0.1$, $\Delta_0 = 12$ (40 точек данных), $\sigma_{\xi_2} = 0.06$, $\alpha_1 = 0.11$, $\alpha_2 = 0.09$ представлены на рис. 1 (треугольники). Частота ошибочных выводов велика при $\sigma_{\xi_1} < 0.17$. Для диагностики этой ситуации рассмотрим АКФ шума ε , которая оценивается по остаточным ошибкам модели как $C(i\Delta t) = \langle \hat{\varepsilon}(t)\hat{\varepsilon}(t + i\Delta t) \rangle / \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$, $i = 1, 2, \dots$. Она спадает до малой величины на интервале, значительно большем τ (рис. 2, кружки), в отличие от того, что наблюдалось бы при белых шумах в исходных уравнениях динамики.

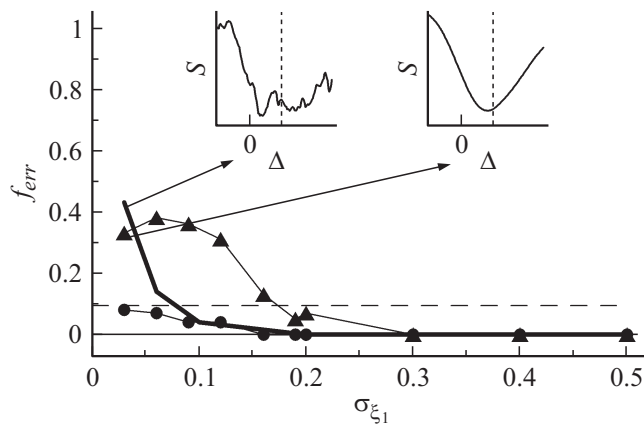


Рис. 1. Оценивание запаздывания связи в системе (3): треугольники — частота ложных выводов для оценки (2), кружки — для оценки (4) при $\alpha_1 = 0.11$, $\alpha_2 = 0.09$; жирная линия — для обеих оценок при $\alpha_1 = 0.11$, $\alpha_2 = 9$, горизонтальная пунктирная линия — допустимый уровень частоты ошибок. Вставки дают типичные примеры зависимости $S(\Delta)$ для отдельных рядов, вертикальный пунктир означает истинное время запаздывания Δ_0 .

Подобная ситуация возможна и для низкоразмерных нелинейных осцилляторов в режиме детерминированного хаоса, где использование уравнения (1), не учитывающего амплитудную динамику в явном виде, не обосновано строго, но часто оказывается хорошим приближением, причем свойства фазового шума ε определяются влиянием медленно меняющихся хаотических амплитуд [7]. Значит, можно было бы рассчитывать и здесь на эффективность изложенного метода (как эвристического приема), но лишь при должном учете свойств фазового шума ε в (1) вместо предположения о том, что он белый.

Учитывая это, будем оценивать АКФ шумов ε по остаточным ошибкам модели (рис. 2) и определять время ее спадания T до некоторой малой величины (для рядов длиной 100 характерных периодов эмпирически подобранная величина 0.2 дает приемлемый результат, как показано ниже). Количество взаимно независимых значений ε на длине ряда оценим снизу как $N'' = N\Delta t/L$, где $L = \max[T, \tau]$. Тогда оценка

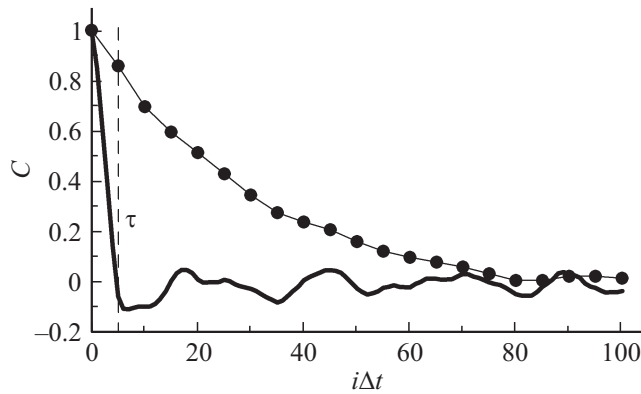


Рис. 2. Оценка АКФ фазовых шумов: кружки — для $\alpha_1 = 0.11$, $\alpha_2 = 0.09$, $\sigma_{\xi_1} = 0.12$, жирная линия — для $\alpha_1 = 0.11$, $\alpha_2 = 9$, $\sigma_{\xi_1} = 0.03$, вертикальная пунктирная линия показывает значение τ .

дисперсии $\hat{\Delta}$ примет вид

$$\hat{\sigma}_{\Delta}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\xi}^2}{N''} \left(\frac{\partial^2 S(\Delta)}{\partial \Delta^2} \Big|_{\Delta=\Delta_{\min}} \right)^{-1}, \quad (4)$$

что дает более широкий интервал, чем формула (2) при $T > \tau$.

Дисперсия шума в ведущем осциляторе $\sigma_{\xi_1}^2$ для системы (3) менялась в широком диапазоне путем изменения D_1 при фиксированных прочих параметрах: рис. 1 показывает f_{err} в зависимости от $\sigma_{\xi_1}^2$ для оценок (2) и (4) при фиксированных α_1 , α_2 , $\sigma_{\xi_2}^2$, на рис. 2 представлены АКФ остаточных ошибок модели (1) при $\alpha_1 = 0.11$, $\alpha_2 = 0.09$ (долгие корреляции) и $\alpha_1 = 11$, $\alpha_2 = 9$ (быстро спадающие корреляции, т.е. почти белый шум). Величина f_{err} для прежней оценки (2) велика при $\sigma_{\xi_2} = 0.06$, $\alpha_1 = 11$, $\alpha_2 = 0.09$ (рис. 1) для достаточно малых σ_{ξ_1} (меньших, чем 0.2). Учет времени корреляции шума (4) позволяет снизить частоту ошибок до значения, которое не больше допустимого (сплошная линия с кружками).

Заметим, что при $\alpha_1 = 11$, $\alpha_2 = 9$ и малых σ_{ξ_1} не помогает и учет корреляций шума, так как S оказывается малочувствительной к пробному Δ и случайные флуктуации сильно смещают точку минимума $S(\Delta)$.

Диагностировать эту проблемную ситуацию можно по графику $S(\Delta)$, который в таком случае не имеет одного четко выраженного минимума (левая вставка на рис. 1) в отличие от „благополучной“ ситуации (правая вставка).

Здесь мы не исследовали детально влияние способа расчета фазы сигнала, предполагая, что фазы уже имеются в нашем распоряжении, хотя этот вопрос заслуживает отдельного рассмотрения. Однако заметим, что результаты для связанных осцилляторов Ван-дер-Поля и систем Ресслера оказались аналогичными представленным выше в широком диапазоне значений параметров (в том числе в сильно возмущенных периодических и даже в хаотических режимах), причем фазы определялись нами по наблюдаемым сигналам традиционным образом [7,9] на основе преобразования Гильберта.

Предложена поправка к интервальной оценке времени запаздывания связи между осцилляторами, основанная на учете автокорреляционной функции фазовых шумов при расчете доверительного интервала. Ее необходимость для устранения ошибочных выводов показана в численном эксперименте на эталонных осцилляторах. Предложенный модифицированный метод должен быть востребован при анализе нелинейных колебательных систем в различных прикладных ситуациях, так как даже эталонные математические осцилляторы невысокой размерности (системы Ресслера, Лоренца и др.) демонстрируют фазовые шумы с нетривиальными свойствами [7,8], включая негауссово распределение и долгие корреляции. Поскольку именно время корреляции наиболее сильно влияет на информативность данных для статистического оценивания, можно ожидать, что предложенной поправки будет достаточно для обеспечения надежности метода в широком круге практических ситуаций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 14-02-31129-мол-а, 14-02-00492-а), президента РФ (грант для поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2) и правительства РФ (соглашение 14.Z50.31.0033 от 24.03.2014).

Список литературы

- [1] Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Смирнов Д.А., Тасс П.А. // УФН. 2008. Т. 178. № 3. С. 323–329.
- [2] Mokhov I.I., Smirnov D.A. // Geophys. Res. Lett. 2006. V. 33. P. L03708.

- [3] *Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A.* // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. P. 046 213.
- [4] *Horbelt W., Timmer J., Voss H.U.* // Phys. Lett. A. 2002. V. 299. P. 513 521.
- [5] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Хорев В.С.* // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. В. 15. С. 32–39.
- [6] *Смирнов Д.А., Сидак Е.В., Безручко Б.П.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 3. В. 1. С. 64–71.
- [7] *Пиковский А.С., Розенблум М.Г., Куртс Ю.* // Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [8] *Smirnov D.A., Sidak E.V., Bezruchko B.P.* // Eur. Phys. J. Special Topics. 2013. V. 222. P. 2441–2451.
- [9] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Int. J. Bifurc. Chaos. 2000. V. 10. P. 2291–2305.
- [10] *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984.