

## Учет пространственной неоднородности напряжений, деформации и температуры в синергетической модели граничного трения

© Я.А. Ляшенко, Н.Н. Манько

Сумский государственный университет,  
40007 Сумы, Украина  
e-mail: nabla04@ukr.net, mtashan@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 2 августа 2013 г. В окончательной редакции 30 апреля 2014 г.)

В рамках синергетической модели граничного трения проведен учет пространственной неоднородности напряжений, деформации и температуры смазочного слоя. Рассмотрено движение трущихся поверхностей во взаимно противоположных направлениях с одинаковыми скоростями, а также ситуация, когда нижняя поверхность жестко закреплена, а верхняя сдвигается с фиксированной скоростью. В обоих случаях получены пространственные профили напряжений, деформации и температуры. Учет пространственного распределения параметров позволяет описать нетривиальное неньютоновское поведение эффективной сдвиговой вязкости смазки. Проведен анализ влияния температуры поверхностей и вязкости смазки на стационарный режим трения.

### Введение

В современной науке и технике в связи с повышенной актуальностью и прикладным значением активно исследуются процессы граничного трения. Нанотрибологические системы, в которых реализуется граничный режим, используются для построения высокоточного оборудования и приборов [1]. Указанный режим трения на сегодняшний день недостаточно изучен, поэтому вызывает большой интерес. В частности, широко рассматривается поведение атомарно-гладких твердых поверхностей при наличии ультратонкого слоя смазочного материала между ними, при их относительном перемещении с фиксированным расстоянием между поверхностями.

В общем случае нанотрибологическую систему можно рассматривать как многомерную, неравновесную и пространственно-неоднородную. В таких системах большую роль играют пространственные корреляции, обусловленные взаимодействием между частицами [2]. Причем корреляции могут быть дальнедействующими, что, как правило, критическим образом изменяет поведение объекта исследования по сравнению с однородным случаем. Такую систему можно представить в виде уравнений с частными производными, типа уравнений Навье–Стокса в гидродинамике [3], уравнений Максвелла в электродинамике [4], уравнений химической реакции с диффузией [5]. В работе [6] представлена модель пластической деформации металлов с учетом пространственной неоднородности, где для описания используются уравнения, схожие по математической структуре с используемыми нами ниже, поскольку в работе рассматривается модель вязкоупругой среды [7], учитывающая сдвиговое плавление, результатом которого является наличие в смазке больших пластических деформаций.

В рамках синергетического представления в работе [7] описано нетривиальное поведение граничной смазки

при взаимном перемещении трущихся поверхностей. С помощью модели описаны гистерезисные явления, изучены фрактальные характеристики временных рядов напряжений, а также рассмотрен вопрос о возникновении в системе колебаний в режиме детерминистического хаоса [8]. Однако везде полагалось, что слой смазки имеет одинаковые свойства как по толщине, так и по плоскости контакта. Во избежание такого ограничения предлагаемая работа посвящена дальнейшему развитию модели, и в ней изучается пространственно-временная зависимость поведения основных параметров системы с учетом неоднородного распределения напряжений, деформации и температуры по толщине смазочного слоя. Под „неоднородностью“ понимается зависимость указанных величин от толщины смазки. Поверхности трения, как и ранее, полагаются гладкими, а смазка в состоянии покоя — однородной. В работе не вводятся шероховатости поверхностей либо физические неоднородности в смазочном материале, как это было в [9]. Все описанные далее пространственные зависимости получены за счет того, что смазочный слой обладает эффективной вязкостью [10], которая показывает неньютоновское поведение и учитывается при выводе основных уравнений [7]. Предлагаемая работа является продолжением [11], где проводится изучение влияния неоднородного распределения температуры на нанотрибологическую систему в рамках одномодового приближения, в рамках которого анализ системы существенно упрощается. В настоящей работе приближения не вводятся, что позволяет уточнить и расширить полученные ранее результаты.

### 1. Формулировка модели

Рассмотрим две гладкие поверхности, разделенные слоем смазки толщиной  $h$ . Причем верхняя движется со скоростью  $V = V_0$ , а нижняя покоится ( $V = 0$ ). В таком случае для обычных ньютоновских жидкостей в режиме

гидродинамического трения выполняется хорошо известный закон Ньютона:

$$F = \eta A \frac{dV}{dy}, \quad (1)$$

где  $F$  — сила вязкого трения, за счет которой смазка со временем разогревается и становится более жидкой,  $A$  — площадь контакта поверхностей через смазку,  $y$  — поперечная координата. Рассмотрим случай, в котором силы взаимодействия молекул смазки с поверхностями трения больше, чем силы взаимодействия молекул смазки друг с другом. К примеру, такая ситуация экспериментально исследуется в работе по граничному трению [12], где показано, что верхний и нижний смазочные слои адсорбируются на поверхностях трения и движутся с ними как единое целое. При этом верхний слой смазочного материала движется со скоростью  $V_0$ , а нижний покоится. В указанном случае поле скоростей принимает вид [13]

$$V = V_0 \frac{y}{h}, \quad (2)$$

где скорость  $V$  линейно нарастает от нуля у нижней неподвижной поверхности до максимального значения  $V_0$  у верхней. Однако мы рассматриваем более сложный случай, когда смазка обладает неньютоновской вязкостью, т.е. коэффициент  $\eta$  в (1) зависит как от температуры  $T$ , так и от градиента скорости  $dV/dy$  [10]. В нашем случае за счет тонкости смазочного слоя градиент скорости может быть записан как [14]

$$\dot{\varepsilon} = \frac{V_0}{h}, \quad (3)$$

где  $\dot{\varepsilon}$  — скорость деформации (см. уравнения (6)–(8)). Таким образом, мы приходим к зависимости

$$\eta = \eta(T, \dot{\varepsilon}). \quad (4)$$

Согласно записанным далее основным уравнениям (6)–(8), это означает, что вязкость смазки изменяется со временем так же, как и все остальные параметры. Поэтому введение в рассмотрение градиентных слагаемых позволяет изучить временную эволюцию основных параметров смазки по ее толщине, что всегда имеет место в любом эксперименте. Однако ввиду ультратонкости смазочного слоя на сегодняшний день экспериментально измеряются лишь его общие усредненные характеристики [1]: вязкость, вязкие и упругие напряжения, температуры плавления и затвердевания и т.д. Процессы, происходящие по толщине смазки, в настоящее время изучаются в основном с помощью методов молекулярной динамики [15,16]. Например, в [16] исследуется система, состоящая из двух блоков толщиной 2 нм, между которыми помещена полимерная смазка толщиной 3 нм. Подобные модели позволяют выяснить зависимости динамических параметров смазочного материала по толщине рассматриваемой системы. Поскольку за счет ультратонкости смазки прямые

измерения распределений параметров по ее толщине затруднены, такие работы являются прогнозирующими и несут высокое фундаментальное значение. В работе [17] изучается пространственно неоднородная система, но в рамках аналитической модели. В работе построены фазовые диаграммы и изучено влияние толщины смазки на поведение системы, а также на особенности установления прерывистого режима движения. В [18] изучается распределение напряжений по толщине слоя при сдвиге верхней и нижней поверхностей в противоположные стороны и показано, что напряжения в нижней и верхней частях системы имеют различный знак. Такой же результат показывает и наша работа. В работе [18] в ходе компьютерного эксперимента можно выделить три стадии. Сперва на нижнюю поверхность трения наносился смазочный слой молекулярной толщины и выжидалось время, за которое устанавливалось стационарное состояние. Затем к верхней трущейся поверхности прикладывалась сила и она подводилась к нижней поверхности, за счет чего они начинали контактировать через смазку. И на завершающей стадии осуществлялся сдвиг поверхностей во взаимно противоположных направлениях, и одновременно измерялись динамические параметры смазки, в том числе и по ее толщине. В работе исследовано влияние на систему внешней нагрузки, скорости относительного сдвига поверхностей, типа смазки, изучена зависимость угла поворота полимерных молекул от параметров нагружения и т.д. В [18] получен прерывистый режим движения, который является одной из основных причин разрушения трущихся деталей в наномеханизмах. Показано, что во время реализации прерывистого движения со временем изменяется толщина смазки, поскольку она испытывает фазовые переходы между кинетическими режимами трения.

В предлагаемом нами подходе пространственным распределением обладают не только напряжения, которые пропорциональны относительной скорости сдвига согласно формуле [7,14]<sup>1</sup>

$$V = \sigma_v \frac{h}{\eta_{\text{eff}}}, \quad (5)$$

но и температура  $T$  и деформация  $\varepsilon$ , поскольку при изменении градиента скорости по толщине смазки (неньютоновское поведение) будет изменяться уровень диссипации механической энергии, что приведет к неравномерному распределению температуры, т.е. по толщине смазка в одном месте может быть расплавлена, а в другом проявлять свойства твердого тела. Молекулярно-динамические модели показывают именно такое поведение, например когда выделенный атомарный смазочный слой перемещается между соседними слоями без

<sup>1</sup> Здесь  $\eta_{\text{eff}}$  — эффективная вязкость, которая для ультратонких слоев сильно отличается от вязкости объемных смазок, состоящих из тех же веществ, поэтому для конкретной системы  $\eta_{\text{eff}}$  может быть найдена только экспериментально [10]. Величина  $\sigma_v$  в (5) — это вязкая компонента напряжений.

разупорядочения [12]. В так называемых *stop-start* экспериментах [19] характер неоднородного распределения температуры по толщине смазки критическим образом влияет на поведение системы, поскольку „более нагретые“ слои способны оставаться жидкоподобными при затвердевании основного объема смазки, обеспечивая более длительный режим скольжения. Поскольку эффективная вязкость  $\eta_{\text{eff}}$  зависит от природы смазочного материала, а также от типа используемых поверхностей, эксперименты с различными смазками могут показывать абсолютно различное поведение. Учет неоднородного распределения температуры по толщине смазочного материала может частично описать те или иные наблюдаемые особенности.

В работе [7] исследуется синергетическая модель граничного трения, построенная на основе трех самосогласованных дифференциальных уравнений для сдвиговой компоненты тензора напряжений  $\sigma$ , возникающих в смазочном слое, сдвиговой компоненты относительных деформаций  $\varepsilon$ , а также температуры смазки  $T$ . Здесь исследуем общий пространственно-неоднородный случай, описание которого становится возможным при модификации исходной системы уравнений [7] с помощью учета соответствующих градиентных вкладов [6]:

$$\dot{\sigma} = D_{\sigma} \nabla^2 \sigma - \sigma + g\varepsilon, \quad (6)$$

$$\tau \dot{\varepsilon} = D_{\varepsilon} \nabla^2 \varepsilon - \varepsilon + (T - 1)\sigma, \quad (7)$$

$$\delta \dot{T} = D_T \nabla^2 T + (T_e - T) - \sigma\varepsilon + \sigma^2, \quad (8)$$

где величина  $T_e$  представляет температуру поверхностей трения [7]. Здесь также введены константа  $g < 1$ , численно равная отношению модуля сдвига смазки  $G$  к его характерному значению  $G_0$ , и параметры

$$\tau = \frac{\tau_{\varepsilon}}{\tau_{\sigma}}, \quad \delta = \frac{\tau_T}{\tau_{\sigma}}, \quad (9)$$

где  $\tau_{\sigma}$ ,  $\tau_{\varepsilon}$ ,  $\tau_T$  — времена релаксации напряжений, деформации и температуры.

В работах [7,20] показано, что нулевые стационарные напряжения  $\sigma_0$  соответствуют твердоподобной структуре смазочного материала, а при  $\sigma_0 \neq 0$  смазка плавится с переходом в жидкоподобное состояние. Одной из причин этого является то, что, согласно обобщенной на граничный режим диаграмме Герси–Штрибека [7,14], с увеличением вязких напряжений  $\sigma_v$  растет относительная скорость сдвига трущихся поверхностей  $V$  (5). Поскольку напряжения  $\sigma$  представляют сумму вязкой и упругой компонент [7], а в слое жидкоподобной смазки преобладают вязкие напряжения, с ростом  $\sigma$  возрастает скорость движения сдвигаемых поверхностей, что соответствует кинетическому режиму скольжения и жидкоподобной структуре смазки. При значении  $\sigma = 0$  поверхности трения не движутся, что соответствует их „прилипанию“ за счет затвердевания межповерхностного смазочного слоя. Данные выводы подтверждаются как теоретически [20], так и экспериментально [19].

## 2. Результаты моделирования

Пусть поверхности трения атомарно-гладкие и не содержат дефектов. Такие поверхности часто получают сколом слюды вдоль атомарной плоскости [1]. Пусть смазка однородна и состоит из неполярных квазисферических молекул (например, молекул октаметилциклотетrasilоксана  $C_8H_{24}O_4Si_4$  [1]), которые способны образовывать твердоподобные упорядоченные структуры, характеризующиеся наличием дальнего порядка чередования молекул. В этом случае вдоль плоскости поверхностей смазку можно считать однородной. В связи с этим далее рассматривается неоднородность только по толщине смазочного материала (координата  $y$ ). Поэтому уравнения (6)–(8) представляют собой одномерные дифференциальные параболические уравнения в частных производных. Их можно легко решить численно с помощью применения явной двухслойной разностной схемы [11]. При этом вся интересующая нас пространственно-временная область разбивается сеткой. Расчет производится от начального момента времени  $t = 0$  до времени  $t = t_N$ , а координата при этом  $y \in [0, y_M]$ . Необходимые для решения начальные и граничные условия следует выбирать из физического представления задачи.

Индексом  $i$  будем обозначать координатные слои, а индексом  $j$  — временные. Тогда при использовании явной разностной схемы координатные производные аппроксимируются следующим образом (для деформации  $\varepsilon$  и температуры  $T$  аналогично)

$$\nabla^2 \sigma \equiv \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = \frac{\sigma_{i+1}^j - 2\sigma_i^j + \sigma_{i-1}^j}{H^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\sigma_i^{j+1} - \sigma_i^j}{\Delta}, \quad (11)$$

где  $\Delta = t_N/N$  — шаг по времени,  $H = y_M/M$  — шаг по координате (расстояние между узлами сетки по вертикали и горизонтали).

Окончательные расчетные соотношения принимают вид

$$\sigma_i^{j+1} = \sigma_i^j + \frac{\Delta}{H^2} [D_{\sigma} (\sigma_{i+1}^j - 2\sigma_i^j + \sigma_{i-1}^j) + H^2 (-\sigma_i^j + g\varepsilon_i^j)], \quad (12)$$

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \frac{\Delta}{\tau H^2} [D_{\varepsilon} (\varepsilon_{i+1}^j - 2\varepsilon_i^j + \varepsilon_{i-1}^j) + H^2 (-\varepsilon_i^j + \sigma_i^j T_i^j - \sigma_i^j)], \quad (13)$$

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta}{\delta H^2} [D_T (T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) + H^2 (T_e - T_i^j - \sigma_i^j \varepsilon_i^j + (\sigma_i^j)^2)]. \quad (14)$$

Система уравнений (12)–(14) содержит  $3N(M - 1)$  уравнений и позволяет найти значения  $\sigma_i^{j+1}$ ,  $\varepsilon_i^{j+1}$  и  $T_i^{j+1}$ ,

зная набор значений на предыдущем временном слое  $\sigma_i^j$ ,  $\varepsilon_i^j$  и  $T_i^j$ . В дополнение к (12)–(14) необходим набор начальных условий в момент времени  $t = 0$ , которые дают  $3(M + 1)$  уравнений, а также граничные условия, дающие  $6N$  уравнений. Таким образом, общее количество уравнений равно количеству неизвестных  $3(M + 1)(N + 1)$ .

При движении поверхностей трения, согласно уравнениям (6)–(8), в однородном случае ( $\nabla^2 \equiv 0$ ) устанавливаются стационарные значения напряжений  $\sigma_0$ , деформации  $\varepsilon_0$  и температуры  $T_0$  [7]:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{gT_e - (g + 1)}{1 - g}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{g}, \quad T_0 = T_e. \quad (15)$$

Рассмотрим два наиболее распространенных случая. В первом из них верхняя трущаяся поверхность движется со скоростью  $V$ , а нижняя с такой же скоростью движется в противоположном направлении. При этом напряжения, деформация и температура у верхней поверхности будут равны  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  и  $T_0$  соответственно. Значение температуры у границы нижней поверхности также будет равно  $T_0$ , поскольку согласно (15)  $T_0 = T_e$ , а  $T_e$  представляет температуру поверхностей трения, которые являются термостатом (внешней средой) [7], т.е. их температура в процессе передачи тепла от смазки, разогретой за счет совершенной работы, не изменяется. Ввиду симметрии рассматриваемой задачи напряжения и деформация вблизи нижней поверхности будут равны  $-\sigma_0$  и  $-\varepsilon_0$  соответственно. Поэтому выберем начальные условия параметров по толщине смазки согласно соотношениям

$$\sigma_i^0 = -\sigma_0 + \frac{2i\sigma_0}{M}, \quad \varepsilon_i^0 = -\varepsilon_0 + \frac{2i\varepsilon_0}{M},$$

$$T_i^0 = T_0, \quad i = 0, 1, \dots, M. \quad (16)$$

Граничные условия запишутся следующим образом<sup>2</sup>:

$$\sigma_0^j = -\sigma_0, \quad \sigma_M^j = \sigma_0, \quad \varepsilon_0^j = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_M^j = \varepsilon_0,$$

$$T_0^j = T_M^j = T_0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

В случае, когда нижняя поверхность жестко закреплена и не движется, а с фиксированной скоростью сдвигается только верхняя, напряжения, деформация и температура у верхней поверхности будут также равны  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  и  $T_0$ , а вблизи нижней будет выполняться равенство  $\sigma_0 = \varepsilon_0 = 0$ , поскольку за счет взаимодействия атомов поверхности с атомами смазочного материала нижний слой „прилипает“ к поверхности [12]. Температура смазки у нижней границы выбирается, как и ранее, равной  $T_0$ .

<sup>2</sup> В (17) индекс  $j$  изменяется от 1, поскольку соотношения (16) и так уже задают граничные условия на нулевом временном слое при  $j = 0$ . Легко убедиться в том, что если в (17)  $j$  отсчитывать от нуля, ошибки не будет, поскольку в этом случае соотношения (16) и (17) продублируют на нулевом временном слое одни и те же значения.

В этом случае начальные условия можно представить в виде

$$\sigma_i^0 = \frac{i\sigma_0}{M}, \quad \varepsilon_i^0 = \frac{i\varepsilon_0}{M}, \quad T_i^0 = T_0, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (18)$$

а граничные

$$\sigma_0^j = 0, \quad \sigma_M^j = \sigma_0, \quad \varepsilon_0^j = 0, \quad \varepsilon_M^j = \varepsilon_0,$$

$$T_0^j = T_M^j = T_0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

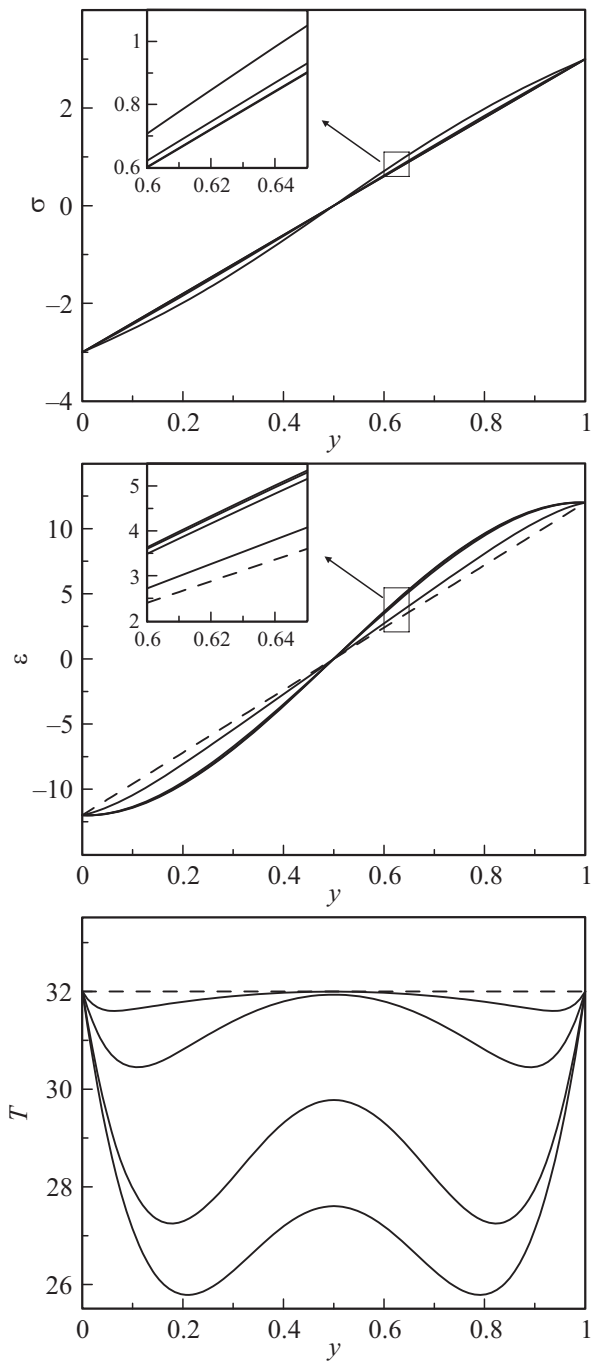
Измерим координату  $y$  в единицах толщины смазки  $h$ , тогда уровню нижней поверхности отвечает значение  $y_0 = 0$ , а у верхней  $y_M = 1$ . Теперь система уравнений является замкнутой и может быть решена численно.

Выберем для решения шаг временной сетки  $\Delta = 10^{-6}$ , а шаг по координате  $H = 0.01$ . Таким образом, координата делится на  $M = 100$  частей. На рис. 1 и 2 показаны результаты решения указанных уравнений. Причем рис. 1 соответствует сдвигу поверхностей трения в противоположных направлениях (используются начальные условия (16) и граничные (17)), а рис. 2 отвечает ситуации, когда сдвигается только верхняя трущаяся поверхность, в нижняя покоится (соответственно начальные условия (18) и граничные (19)). На обоих рисунках приведена временная эволюция пространственных распределений напряжений  $\sigma$ , деформаций  $\varepsilon$ , а также температуры смазки  $T$ . Кривые приведены для 4 последовательных моментов времени. Штриховые прямые на рис. 1 и 2 представляют начальные условия, т.е. описывают пространственные распределения величин в момент времени  $t = 0$ . Поэтому чем дальше от штриховой линии находится кривая на рисунке, тем более позднему моменту времени она соответствует. Кривые на обоих рисунках соответствуют временам на 2000 временном слое, 10 000, 80 000 и 1 000 000. Что при учете шага интегрирования по времени  $\Delta = 10^{-6}$  дает значения  $t = 0.002, 0.01, 0.08, 1.0$ . Последняя кривая, полученная для момента времени  $t = 1.0$ , на обоих рисунках с дальнейшим течением времени не изменяет вид, т.е. представляет установившиеся стационарные значения распределений соответствующих величин по толщине смазки.

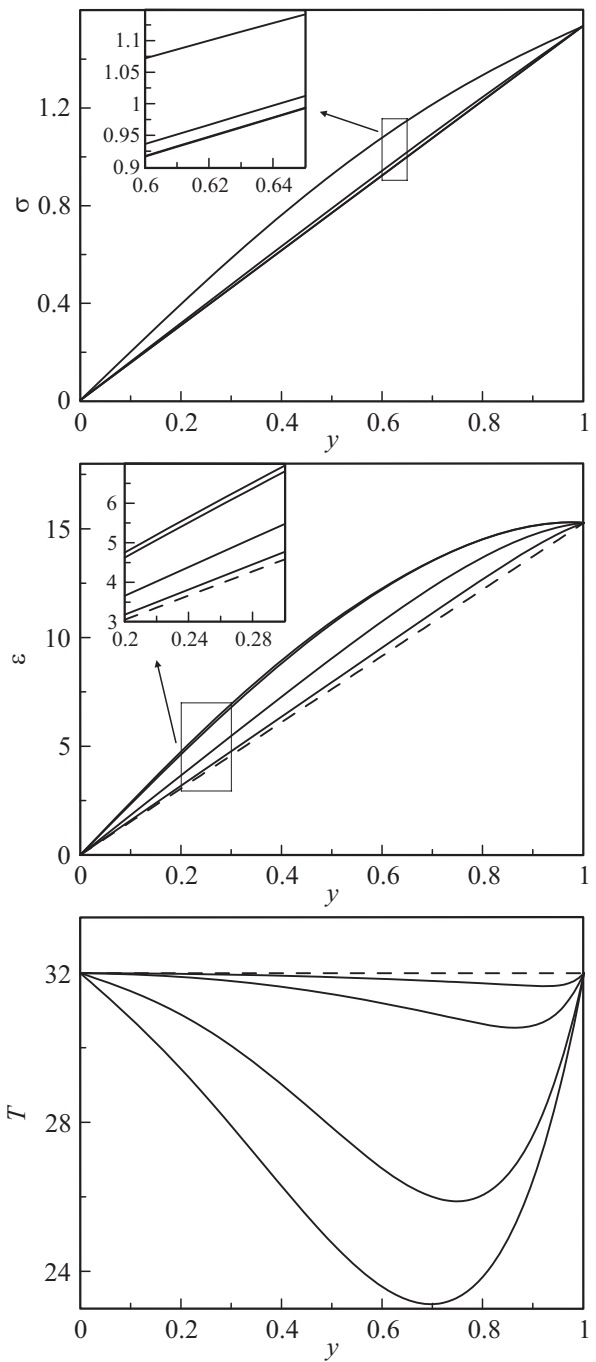
Как видно из рис. 1, 2 и вставок на них, напряжения с течением времени изменяются медленней, чем деформация и температура. Это связано с тем, что время релаксации напряжений выбрано в 10 раз большим, чем времена релаксации двух других параметров. В этом случае выполняется синергетический принцип соподчинения, когда изменения деформации  $\varepsilon$  и температуры  $T$  следуют за изменением напряжений (параметр порядка)<sup>3</sup>.

Отметим, что на рис. 1 кривые симметричны относительно срединного слоя смазки, в области которого напряжения и деформации равны нулю. Это происходит за

<sup>3</sup> В таком случае часто используется адиабатическое приближение  $\tau \dot{\varepsilon}, \delta \dot{T} \approx 0$ , которое позволяет записать уравнение Ландау–Халатникова и при его интегрировании найти явный вид синергетического потенциала, являющегося аналогом свободной энергии в термодинамике либо потенциальной энергии в механике [21].



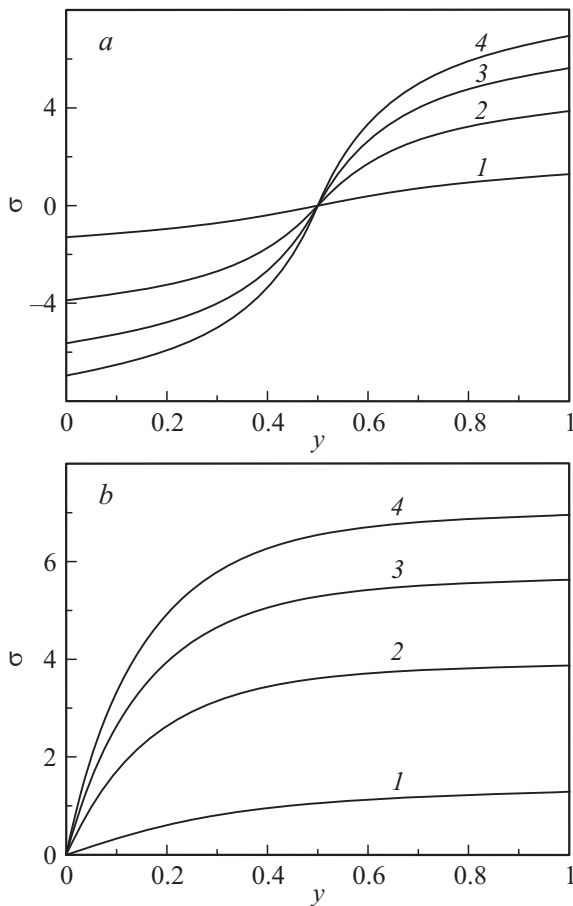
**Рис. 1.** Профили напряжений  $\sigma$ , деформаций  $\varepsilon$  и температуры  $T$ , полученные в результате численного решения уравнений (12)–(14) с параметрами  $g = 0.25$ ,  $T_e = 32$ ,  $\tau = \delta = 0.1$ ,  $D_\varepsilon = 0.45$ ,  $D_\sigma = D_T = 0.05$  при начальных и граничных условиях (16) и (17). Штриховой линией показаны начальные условия (16). Рисунок соответствует сдвигу поверхностей трения с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях.



**Рис. 2.** Профили напряжений  $\sigma$ , деформаций  $\varepsilon$  и температуры  $T$ , полученные в результате численного решения уравнений (12)–(14) с параметрами рис. 1 и  $g = 0.1$ , при начальных и граничных условиях (18) и (19). Штриховой линией показаны начальные условия (18). Рисунок отвечает ситуации, когда нижняя поверхность покоится, а верхняя сдвигается с фиксированной скоростью.

счет того, что трущиеся поверхности сдвигаются в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. При этом, согласно зависимости  $T(y)$ , если двигаться от центра смазочного слоя по направлению к любой из поверхностей (в перпендикулярном к ним направ-

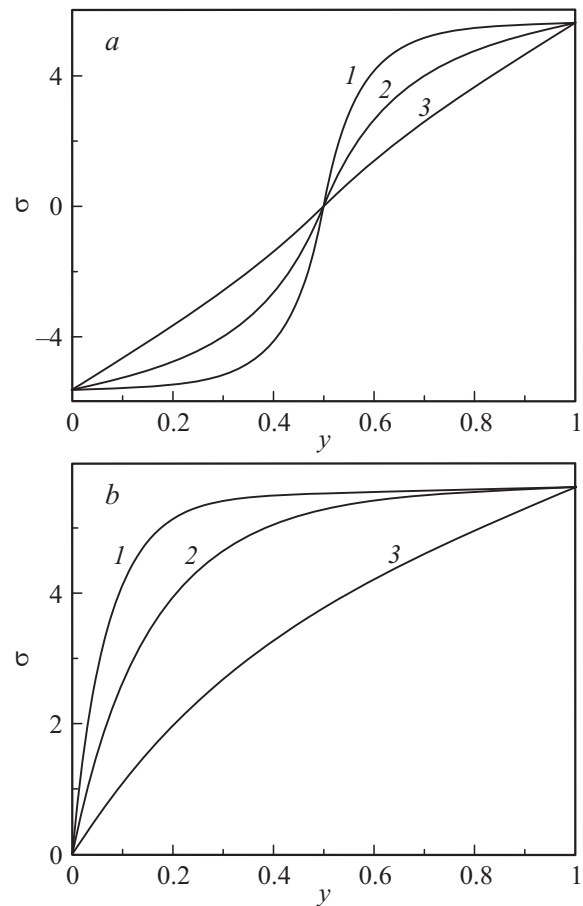
лении), температура  $T$  сначала уменьшается, а затем снова начинает увеличиваться, пока у поверхностей не примет значение  $T_e$ . Зависимости на рис. 2 фактически повторяют правую часть зависимостей, приведенных на рис. 1 при  $y > 0.5$ , т.е. распределения, которые наблю-



**Рис. 3.** Стационарные профили напряжений  $\sigma(y)$ , полученные при параметрах рис. 1 и  $D_\varepsilon = D_T = 0$ ,  $D_\sigma = 0.05$ . Кривые 1–4 отвечают температурам  $T_e = 10, 50, 100, 150$  соответственно; а) — начальные и граничные условия (16) и (17), сдвиг поверхностей с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях; б) — начальные и граничные условия (18) и (19), нижняя поверхность покоится, а верхняя сдвигается с фиксированной скоростью.

даются на рис. 1 выше центра системы. Это вполне объяснимо, так как в случае, показанном на рис. 2, нижняя поверхность покоится, и возле нее реализуются значения  $\sigma = \varepsilon = 0$ , так же как и в срединном слое смазки на рис. 1. Рис. 1 и 2 при различном наборе параметров  $D_\sigma$ ,  $D_\varepsilon$  и  $D_T$  могут показывать различное поведение. Это в том числе означает, что вид кривой нагружения  $\sigma(\varepsilon)$  [22] изменяется по толщине смазочного материала, т.е. смазка по толщине может показывать как режим пластического течения (скольжение), так и гуковский участок зависимости  $\sigma(\varepsilon)$ . В эксперименте обычно измеряются усредненные характеристики, что, как правило, не позволяет провести такой анализ [1].

Рис. 1 и 2 показывают временную эволюцию основных параметров. Отметим, что в зависимости от начальных условий характер эволюции может быть весьма различным, но при фиксированных параметрах в итоге устанавливаются стационарные распределения величин  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$  по толщине смазочного материала. Именно они и



**Рис. 4.** Стационарные профили напряжений  $\sigma(y)$ , полученные при параметрах рис. 1 и  $D_\varepsilon = D_T = 0$ ,  $T_e = 100$ . Кривые 1–3 отвечают величинам  $D_\sigma = 0.01, 0.05, 0.5$  соответственно; а) — начальные и граничные условия (16) и (17), сдвиг поверхностей с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях; б) — начальные и граничные условия (18) и (19), нижняя поверхность покоится, а верхняя сдвигается с фиксированной скоростью.

определяют в итоге режим трения. На рис. 3 приведены стационарные распределения напряжений по толщине смазки при различных температурах поверхностей  $T_e$ . Рисунок демонстрирует тот факт, что с ростом температуры возрастает относительная скорость движения поверхностей, поскольку вязкость смазки уменьшается и она становится более жидкой (согласно (5), напряжения определяют относительную скорость сдвига поверхностей  $V$ ). Также из рисунка следует, что, чем ниже температура  $T_e$ , тем большая толщина прилегающей к верхней сдвигаемой поверхности смазки имеет одинаковую скорость. Это происходит за счет того, что с уменьшением температуры  $T_e$  увеличивается вязкость смазочного материала, за счет чего также уменьшается скорость сдвига поверхностей  $V$ .

На рис. 4 показано влияние на режим трения коэффициента  $D_\sigma$  при  $D_\varepsilon = D_T = 0$ . В этом случае устанавливаются такие же зависимости, как и на предыдущих рисунках. Однако стоит отметить, что при уве-

личении  $D_\sigma$  (кривая 3) распределение напряжений по толщине находится рядом с прямой линией, соответствующей начальным условиям. То есть с увеличением коэффициента  $D_\sigma$  смазка приобретает ньютоновские свойства, поскольку реализуется зависимость  $V(y)$ , приближающаяся с ростом  $D_\sigma$  к виду (2). На рис. 4 хорошо видно, что при уменьшении коэффициента  $D_\sigma$  вязкость становится неньютоновской и верхний слой смазки затвердевает, поскольку с увеличением  $D_\sigma$  растет толщина приповерхностного слоя, который сдвигается со скоростью, равной скорости движения верхней поверхности  $V_0$ . Таким образом, вариация  $D_\sigma$  позволяет учитывать тип используемой смазки, изменяя ее вязкостные характеристики.

## Заключение

В работе в рамках синергетической модели граничного трения двух атомарно-гладких твердых поверхностей, разделенных ультратонким слоем смазочного материала, проведен учет пространственной неоднородности напряжений, деформации и температуры. Модель представлена системой трех одномерных дифференциальных параболических уравнений в частных производных. Записан аналитический вид численной процедуры решения уравнений, включая начальные и граничные условия. Граничные условия задаются стационарными значениями напряжений, деформации и температуры, полученными в однородном случае без учета градиентных вкладов. Рассмотрены две ситуации. В первой верхняя поверхность трения движется с постоянной скоростью, а нижняя движется с такой же по абсолютному значению и обратной по знаку скоростью (сдвигается в противоположном направлении). Вторая рассмотренная ситуация отвечает жестко закрепленной нижней поверхности, когда с фиксированной скоростью сдвигается только верхняя. Для обоих описанных случаев получены пространственные профили напряжений, деформации и температуры на различных временах. Показано, что в рассмотренных ситуациях с течением времени устанавливается стационарное распределение напряжений, а также деформации и температуры по толщине смазки. Стационарные значения напряжений и деформации при приближении из толщины смазки к поверхностям трения монотонно нарастают, в то время как координатная зависимость температуры имеет немонотонный вид с ярко выраженным минимумом. Показано, что вариацией параметров, отвечающих за вклад градиентных членов, возможно изменять характеристики вязкости смазки, в том числе описывать ньютоновское поведение, а также случай, в котором верхний слой смазки затвердевает и движется вместе с поверхностью как единое целое.

Я.А.Л. благодарен Б.Н.Й. Перссону (B.N.J. Persson) за приглашение посетить Исследовательский центр Юлиха (Forschungszentrum Jülich, Germany), в котором частично была выполнена работа. Также благодарен организаторам конференции „Friction and Energy Dissipation

in Man-made and Biological Systems“ (5–8 ноября 2013, ICTP, Trieste, Italy) за приглашение и финансовую поддержку участия.

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины в рамках гранта президента Украины GP/F49/044 „Термодинамическая теория проскальзывания по границам зерен в проблеме сверхпластичности наноструктурированных металлов“ (номер госрегистрации 0113U007248). Частично работа выполнена при поддержке МОН Украины в рамках проекта „Моделирование трения металлических наночастиц и граничных пленок жидкостей, которые взаимодействуют с атомарно-гладкими поверхностями“, № 0112U001380. Работа поддержана стипендией КМУ.

## Список литературы

- [1] *Israelachvili J.* // Surf. Sci. Rep. 1992. Vol. 14. N 3. P. 109–159.
- [2] *Харченко Д.О.* Методы описания і моделювання стохастичних систем. Суми: Вид-во СумДУ, 2007. 206 с.
- [3] *Temam R.* Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1977. 504 p.
- [4] *Monk P.* Finite Element Methods for Maxwell's Equations. Oxford UK: Oxford University Press, 2003. 464 p.
- [5] *Crank J.* The Mathematics of Diffusion. Oxford: Clarendon Press, 1956. 347 p.
- [6] *Zuev L.B., Danilov V.I.* // Philosophical Magazine A. 1999. Vol. 79. N 1. P. 43–57.
- [7] *Хоменко А.В., Ляшенко Я.А.* // УФН. 2012. Т. 182. № 10. С. 1082–1110.
- [8] *Ляшенко Я.А., Манько Н.Н.* // Трение и износ. 2013. Т. 34. № 1. С. 50–58.
- [9] *Ляшенко Я.А., Винниченко И.В.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 9. С. 90–97.
- [10] *Sivebaek I.M., Samoilov V.N., Persson B.N.J.* // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 108. P. 036 102 (4 p).
- [11] *Ляшенко Я.А., Манько Н.Н.* // ЖНЭФ. 2013. Т. 5. № 3. С. 03040.
- [12] *Yamada S.* // Langmuir. 2008. Vol. 24. P. 1469–1475.
- [13] *Понов В.Л.* Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: Физматлит, 2013. 352 с.
- [14] *Luengo G., Israelachvili J., Granick S.* // Wear. 1996. Vol. 200. N 1–2. P. 328–335.
- [15] *Chandross M., Grest G.S., Stevens M.J.* // Langmuir. 2002. Vol. 18. P. 8392–8399.
- [16] *Dai L., Minn M., Satyanarayana N., Sinha S.K., Tan V.B.C.* // Langmuir. 2011. Vol. 27. P. 14861–14867.
- [17] *Aranson I.S., Tsimring L.S., Vinokur V.M.* // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 65. P. 125 402 (7 p).
- [18] *Ramin L., Jabbarzadeh A.* // Langmuir. 2012. Vol. 28. N 9. P. 4102–4112.
- [19] *Yamada S.* // Langmuir. 2005. Vol. 21. N 19. P. 8724–8732.
- [20] *Понов В.Л.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 5. С. 100–110.
- [21] *Olemskoi A.I.* // Physica A. 2002. Vol. 310. P. 223–233.
- [22] *Позребняк А.Д., Братушка С.Н., Береснев В.М., Levintant-Zayonts N.* // Успехи химии. 2013. Т. 82. Вып. 12. С. 1135–1159.