01

Структура электромагнитного поля круглого экранированного волновода в движущейся системе отсчета

© *В.В. Бирюков, В.А. Грачев*

Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород
E-mail: physics@nntu.nnov.ru

Поступило в Редакцию 15 июля 2013 г.

Рассмотрено изменение структуры электромагнитного поля круглого волновода в движущейся системе отсчета (СО). Проанализирована структура поля в системе отсчета, движущейся со скоростью распространения волны в неподвижной СО. Предложена методика расчета характеристик волновода с неидеально проводящими экранирующими поверхностями на основе релятивистского подхода.

Расчет характеристик волноводов, ограниченных неидеально проводящими поверхностями, затрудняется тем, что граничное условие Щукина–Леонтовича носит в общем случае приближенный характер [1]. Однако в ряде случаев соответствующим выбором движущейся системы отсчета (СО) можно добиться точного выполнения граничного условия Щукина–Леонтовича. Полученные при этом компоненты электромагнитного поля и волнового вектора можно затем с помощью преобразований Лоренца пересчитать к исходной СО [2]. В работах [3,4] данный подход реализован для прямоугольного волновода и азимутально-симметричных волн круглого волновода.

В предлагаемой работе рассматривается трансформация структуры электромагнитного поля полого круглого волновода в движущейся системе отсчета. Направление движения системы отсчета совпадает с направлением распространения волны в волноводе. Скорость СО находится в диапазоне от нуля до скорости распространения волны в волноводе.

Рассмотрим круглый экранированный волновод, изображенный на рис. 1, *a*. Краевые задачи для собственных волн решаются в цилиндри-

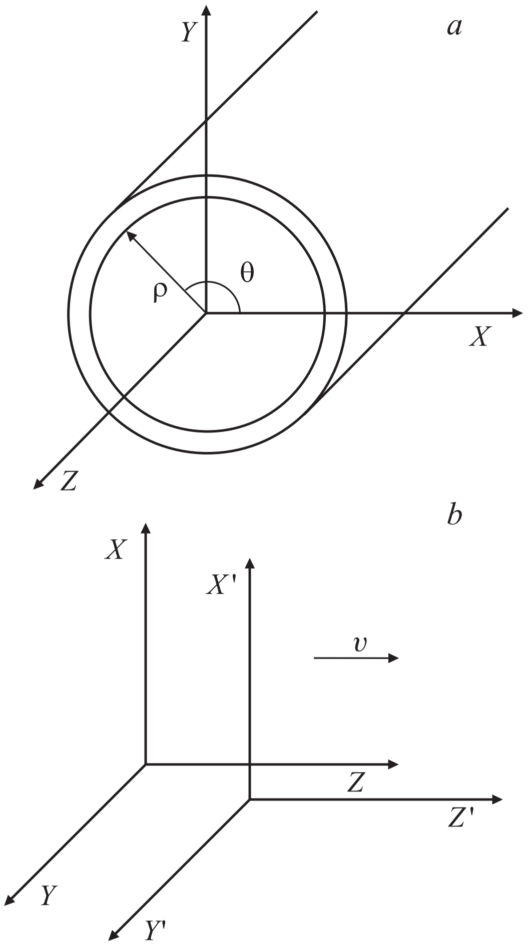

Рис. 1. *a* — круглый экранированный волновод. *b* — неподвижная и движущаяся СО.

ческой системе координат $\{\rho, \theta, z\}$. Компоненты поля (комплексные амплитуды) E-волн круглого экранированного волновода без потерь и соотношение для определения постоянной распространения имеют вид [5]:

$$E_\rho^{nm} = -j\,\frac{\beta}{\chi_{nm}}\,J_n'(\chi_{nm}\rho)\Theta_n(\theta)\exp(-j\beta z),$$

$$E_\theta^{nm} = -j\,\frac{n\beta}{\chi_{nm}^2\rho}\,J_n(\chi_{nm}\rho)\Theta_n'(\theta)\exp(-j\beta z),$$

$$E_z^{nm} = J_n(\chi_{nm}\rho)\Theta_n(\theta)\exp(-j\beta z),$$

$$H_\rho^{nm} = j\,\frac{n\omega\varepsilon_0}{\chi_{nm}^2\rho}\,J_n(\chi_{nm}\rho)\Theta_n'(\theta)\exp(-j\beta z),$$

$$H_\theta^{nm} = -j\,\frac{\omega\varepsilon_0}{\chi_{nm}}\,J_n'(\chi_{nm}\rho)\Theta_n(\theta)\exp(-j\beta z),$$

$$H_z = 0, \quad \beta \equiv \beta_{nm}^E = \sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - \left(\frac{\nu_{nm}}{a}\right)^2}, \tag{1}$$

где $\Theta_n(\theta) = C_1\cos n\theta + C_2\sin n\theta$, $\Theta_n'(\theta) = -C_1\sin n\theta + C_2\cos n\theta$, $J_n'(\chi_{nm}\rho)$ — производная функции по всему аргументу $\chi_{nm}\rho$, $\chi_{nm} = \nu_{nm}/a$ — поперечное волновое число, ν_{nm} — m-й корень функции Бесселя первого рода порядка n, a — радиус волновода.

Комплексные амплитуды компонент поля H-волн круглого экранированного волновода без потерь и соотношение для определения постоянной распространения имеют вид:

$$H_\rho^{nm} = -j\,\frac{\beta}{\chi_{nm}}\,J_n'(\chi_{nm}\rho)\Theta_n(\theta)\exp(-j\beta z),$$

$$H_\theta^{nm} = -j\,\frac{n\beta}{\chi_{nm}^2\rho}\,J_n(\chi_{nm}\rho)\Theta_n'(\theta)\exp(-j\beta z),$$

$$H_z = J_n(\chi_{nm}\rho)\Theta_n(\theta)\exp(-j\beta z),$$

$$E_\rho^{nm} = -j\,\frac{n\mu_0\omega}{\chi_{nm}^2\rho}\,J_n(\chi_{nm}\rho)\Theta_n'(\theta)\exp(-j\beta z),$$

$$E_\theta^{nm} = j\,\frac{\mu_0\omega}{\chi_{nm}}\,J_n'(\chi_{nm}\rho)\Theta_n(\theta)\exp(-j\beta z),$$

$$E_z^{nm} = 0, \quad \beta \equiv \beta_{nm}^H = \sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - \left(\frac{\nu_{nm}'}{a}\right)^2}, \tag{2}$$

где $\chi_{nm} = \nu_{nm}'/a$ — поперечное волновое число, ν_{nm}' — m-й корень производной функции Бесселя первого рода порядка n.

Связь координат, времени и компонент поля в неподвижной и движущейся (рис. 1, b) системах отсчета определяется преобразованиями Лоренца, имеющими в цилиндрической системе координат вид:

$$\rho = \rho', \quad \theta = \theta', \quad z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad t = \frac{t' + (v/c^2)z'}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

$$E_\rho = \frac{E'_\rho + vB'_\theta}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad E_\theta = \frac{E'_\theta - vB'_\rho}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad E_z = E'_z,$$

$$B_\rho = \frac{B'_\rho - (v/c^2)E'_\theta}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad B_\theta = \frac{B'_\theta + (v/c^2)E'_\rho}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad B_z = B'_z. \tag{3}$$

Учитывая, что фаза — величина инвариантная по отношению к переходу из одной инерциальной СО в другую: $\varphi = \omega t - \beta z = \omega' t' - \beta' z' = \varphi'$, получим выражения для продольного волнового числа и частоты в движущейся СО:

$$\beta' = \frac{\beta - (v/c^2)\omega}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \omega' = \frac{\omega - v\beta}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{4}$$

Таким образом, выражения для компонент поля E-волн (комплексных амплитуд) в движущейся СО принимают вид:

$$E'^{nm}_z = J_n(\chi_{nm}\rho')\Theta_n(\theta')\exp(-j\beta z'),$$

$$E'^{nm}_\rho = -j\,\frac{\beta - (v/c^2)\omega}{\chi_{nm}\sqrt{1-(v/c)^2}}\,J'_n(\chi_{nm}\rho')\Theta_n(\theta')\exp(-j\beta z'),$$

$$E'^{nm}_\theta = -jn\,\frac{\beta - (v/c^2)\omega}{\chi^2_{nm}\rho'\sqrt{1-(v/c)^2}}\,J_n(\chi_{nm}\rho')\Theta'_n(\theta')\exp(-j\beta z'),$$

$$H'_z = 0, \quad H'^{nm}_\rho = j\,\frac{n\varepsilon_0(\omega - v\beta)}{\chi^2_{nm}\rho'\sqrt{1-(v/c)^2}}\,J_n(\chi_{nm}\rho')\Theta'_n(\theta')\exp(-j\beta z'),$$

$$H'^{nm}_\theta = -j\,\frac{\varepsilon_0(\omega - v\beta)}{\chi_{nm}\sqrt{1-(v/c)^2}}\,J'_n(\chi_{nm}\rho')\Theta_n(\theta')\exp(-j\beta z'). \tag{5}$$

В случае азимутально-симметричных E-волн ($n = 0$) отличными от нуля остаются только три компоненты: E'^{nm}_z, E'^{nm}_ρ и H'^{nm}_θ.

Аналогично выражения для компонент поля H-волн (комплексных амплитуд) в движущейся СО:

$$E_z^{\prime nm} = 0, \quad E_\rho^{\prime nm} = -j\,\frac{n\mu_0(\omega - \nu\beta)}{\chi_{nm}^2\rho'\sqrt{1-(\nu/c)^2}}\,J_n(\chi_{nm}\rho')\Theta_n'(\theta')\exp(-j\beta z'),$$

$$E_\theta^{\prime nm} = j\,\frac{\mu_0(\omega - \nu\beta)}{\chi_{nm}\sqrt{1-(\nu/c)^2}}\,J_n'(\chi_{nm}\rho')\Theta_n(\theta')\exp(-j\beta z'),$$

$$H_z^{\prime nm} = J_n(\chi_{nm}\rho')\Theta_n(\theta')\exp(-j\beta z'),$$

$$H_\rho^{\prime nm} = -j\,\frac{\beta - (\nu/c^2)\omega}{\chi_{nm}\sqrt{1-(\nu/c)^2}}\,J_n'(\chi_{nm}\rho')\Theta_n(\theta')\exp(-j\beta z'),$$

$$H_\theta^{\prime nm} = -j\,\frac{n[\beta - (\nu/c^2)\omega]}{\chi_{nm}^2\rho'\sqrt{1-(\nu/c)^2}}\,J_n(\chi_{nm}\rho')\Theta_n'(\theta')\exp(-j\beta z'). \tag{6}$$

В случае азимутально симметричных H-волн ($n = 0$) отличными от нуля остаются только три компоненты: $H_z^{\prime nm}$, $H_\rho^{\prime nm}$ и $E_\theta^{\prime nm}$.

Зная выражения для компонент поля можно определить комплексные амплитуды компонент вектора Умова–Пойнтинга в движущейся СО:

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{2}\big[\mathbf{E}', \mathbf{H}'^*\big] = \frac{1}{2}\Big\{\mathbf{e}_\rho(E_\theta' H_z'^* - E_z' H_\theta'^*) + \mathbf{e}_\theta(E_z' H_\rho'^* - E_\rho' H_z'^*)$$
$$+ \mathbf{e}_z(E_\rho' H_\theta'^* - E_\theta' H_\rho'^*)\Big\}.$$

Для E-волн составляющие вектора Умова–Пойнтинга приобретают следующий вид:

$$S_\rho' = -\frac{1}{2}\,E_z' H_\theta'^* = -\frac{1}{2}\,j\,\frac{\varepsilon_0(\omega - \nu\beta)}{\chi_{nm}\sqrt{1-(\nu/c)^2}}\,J_n(\chi_{nm}\rho')J_n'(\chi_{nm}\rho')\Theta_n^2(\theta'),$$

$$S_\theta' = \frac{1}{2}\,E_z' H_\rho'^* = -\frac{1}{2}\,j\,\frac{n\varepsilon_0(\omega - \nu\beta)}{\chi_{nm}^2\rho'\sqrt{1-(\nu/c)^2}}\,J_n^2(\chi_{nm}\rho')\Theta_n(\theta')\Theta_n'(\theta'),$$

$$S_z' = \frac{1}{2}\,(E_\rho' H_\theta'^* - E_\theta' H_\rho'^*) = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0(\omega - \nu\beta)\big(\beta - \frac{\nu}{c^2}\omega\big)}{\chi_{nm}^2\big(1-(\nu/c)^2\big)}$$
$$\times\Big\{-\frac{n^2}{\chi_{nm}^2\rho'^2}\,J_n^2(\chi_{nm}\rho')\Theta_n'^2(\theta') - J_n'^2(\chi_{nm}\rho')\Theta_n^2(\theta')\Big\}. \tag{7}$$

При $\nu = \beta c^2/\omega$ продольная компонента вектора Умова–Пойнтинга становится равной нулю. Направление вектора Умова–Пойнтинга в различных точках поперечного сечения волновода при указанной скорости СО показано на рис. 2, a, b. На этом же рисунке представлено распределение по сечению волновода плотности потока мощности E-волн. Черный цвет соответствует нулевой плотности, белый — максимальной.

Для H-волн составляющие вектора Умова–Пойнтинга приобретают следующий вид:

$$S'_\rho = \frac{1}{2} E'_\theta H'^*_z = \frac{1}{2} j \frac{\mu_0(\omega - \nu\beta)}{\chi_{nm}\sqrt{1-(\nu/c)^2}} J_n(\chi_{nm}\rho')J'_n(\chi_{nm}\rho')\Theta_n^2(\theta'),$$

$$S'_\theta = -\frac{1}{2} E'_\rho H'^*_z = \frac{1}{2} j \frac{n\mu_0(\omega - \nu\beta)}{\chi_{nm}^2\rho'\sqrt{1-(\nu/c)^2}} J_n^2(\chi_{nm}\rho')\Theta_n(\theta')\Theta'_n(\theta'),$$

$$S'_z = \frac{1}{2}\left(E'_\rho H'^*_\theta - E'_\theta H'^*_\rho\right) = \frac{1}{2} \frac{\mu_o(\omega - \nu\beta)\left(\beta - \frac{\nu}{c^2}\omega\right)}{\chi_{nm}^2\left(1-(\nu/c)^2\right)}$$

$$\times \left\{ \frac{n^2}{\chi_{nm}^2\rho'^2} J_n^2(\chi_{nm}\rho')\Theta'^2_n(\theta') - J'^2_n(\chi_{nm}\rho')\Theta_n^2(\theta') \right\}. \tag{8}$$

Как и в случае E-волн, при $\nu = \beta c^2/\omega$ продольная компонента вектора Умова–Пойнтинга становится равной нулю. На рис. 2, c, d показаны направление вектора Умова–Пойнтинга и распределение по сечению волновода плотности потока мощности H-волн.

В выражениях (5)–(8) в явном виде присутствует зависимость от скорости движения новой СО. Рассмотрим случай, когда СО движется со скоростью, равной групповой скорости v_{gr} распространения электромагнитной волны в исходной системе отсчета. Групповая скорость определяется выражением $v_{gr} = c^2\beta/\omega$.

В неподвижной СО при $\beta = 0$ распространение энергии вдоль волноведущей структуры прекращается, поле вдоль продольной координаты экспоненциально убывает — волна становится реактивно затухающей. Частота, при которой $\beta = 0$ называется критической и определяется следующей формулой $\omega_{cr} = \chi c$.

В движущейся СО при $v = v_{gr}$ продольное волновое число и частота принимают вид $\beta' = 0$, $\omega' = \omega_{cr}$, а структура поля совпадает со структурой поля волны рассматриваемого типа в исходной системе

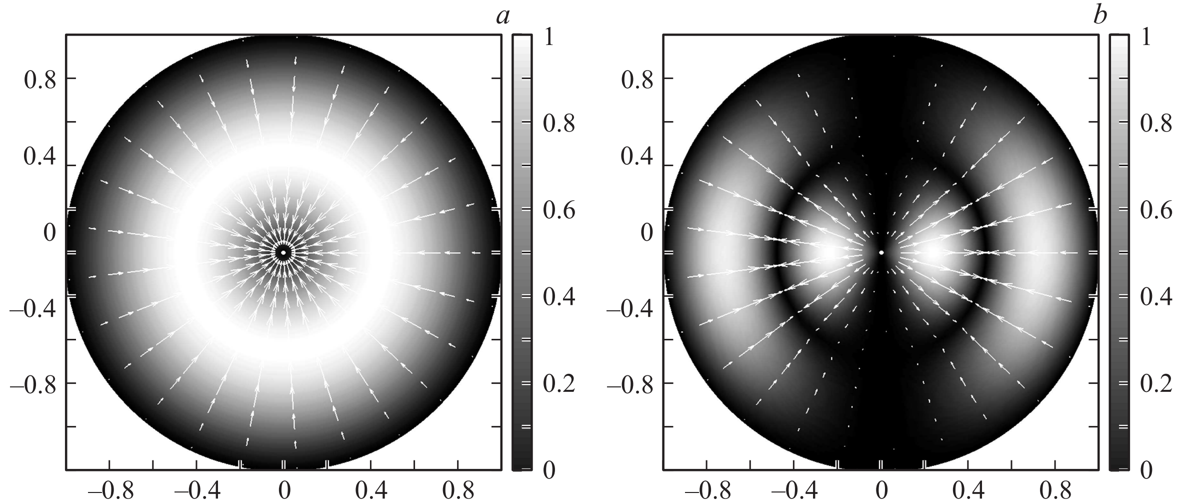

Рис. 2. Плотность потока мощности волн E_{01} (a), E_{11} (b), H_{01} (c) и H_{11} (d) в СО, движущейся со скоростью v_{gr}.

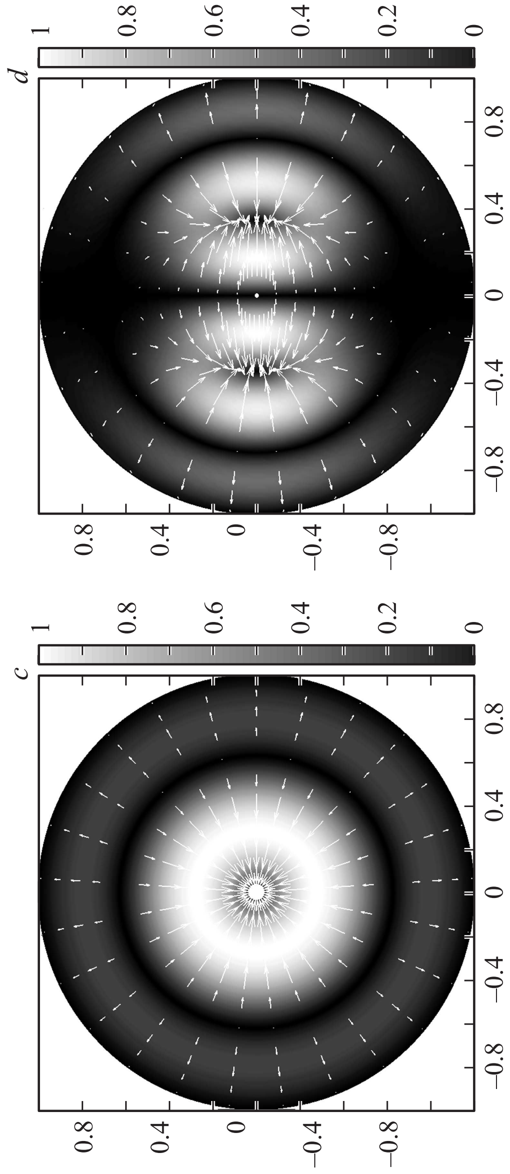

Рис. 2 (*продолжение*).

отсчета на критической частоте. Кроме того, как видно из рисунков, электромагнитная волна падает на поверхность проводника нормально, что является условием строгого выполнения граничных условий Щукина–Леонтовича [1,5]. При этом, как показано в работе [2], если тело движется так, что его поверхность не смещается в перпендикулярном самой себе направлении, то граничные условия на этой поверхности имеют точно такой же вид, как для неподвижного тела.

Это позволяет предположить следующую методику расчета характеристик волновода с неидеально проводящими стенками. Сначала рассчитываются характеристики волновода на критической частоте. При этом граничные условия могут быть определены точно и задача решена строго. Затем переходом в движущуюся систему отсчета можно найти соответствующие характеристики на любой заданной частоте. В случае волновода с неидеально проводящими стенками критической можно считать частоту, на которой действительная часть коэффициента распространения по величине равна мнимой.

Список литературы

[1] *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во МГУ, 1983. 232 с.

[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.

[3] *Бирюков В.В.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. В. 2. С. 75–82.

[4] *Бирюков В.В., Пилипосян С.Е.* // Тез. докл. НТК ИСТ-2010. Н. Новгород, 2010. С. 99.

[5] *Неганов В.А., Осипов А.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Радио и связь, 2005. 648 с.