

01;03

Модель течения жидкости в сосуде с упругими стенками

© Ю.Н. Зайко

Поволжская Академия государственной службы, Саратов

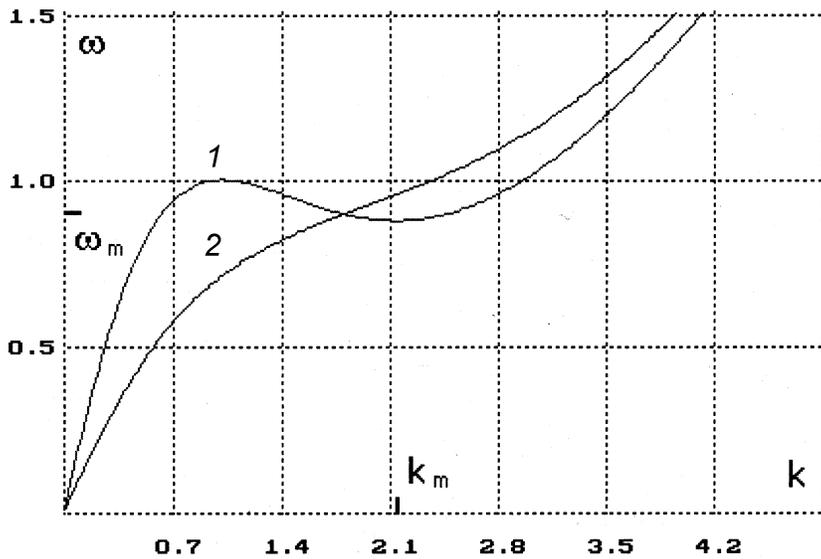
В окончательной редакции 10 июля 2002 г.

Предложено для описания течения жидкости в цилиндрическом сосуде кругового сечения с упругими стенками использовать двухжидкостную модель, применявшуюся для описания течения гелия-II в узких капиллярах вблизи абсолютного нуля. Основанием для этого является похожий вид спектра элементарных возбуждений, имеющего при малых k (k — волновое число) фоновый вид. Расчеты показали, что плотность нормальной, т.е. вязкой компоненты жидкости при температуре 300 К (вода в стальной трубе), примерно в 50 раз меньше полной плотности. Это объясняет парадокс, связанный с наблюдением течений в круглой трубе, характеризующихся аномально большими числами Рейнольдса $Re \sim 10^5$. Поскольку $Re \sim \rho_n$ (ρ_n — плотность вязкой компоненты жидкости), реальные значения Re должны быть примерно в 50 раз меньше, т.е. того же порядка, что и для течения между плоскостями при прочих одинаковых условиях. Физической причиной появления сверхтекучести при высоких (~ 300 К) температурах является ослабление отталкивания малых флуктуаций плотности жидкости за счет учета экранировки их взаимодействия упругими волнами в стенке сосуда.

В недавно опубликованной работе [1] было получено обобщение модели локального реагирования [2], описывающей течение идеальной жидкости в узком цилиндрическом сосуде кругового сечения, стенки которого оказывают сопротивление только растяжению за счет учета дополнительного сопротивления стенок изгибу. Исходная система уравнений [1] имеет вид

$$\begin{aligned} A_t + (Av)_x &= 0, \\ v_t + vv_x + p_x &= 0, \\ A_{tt} + RA_{xxxx} + A - p &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A = S/\pi a^2$, $S = \pi r^2$ — площадь сечения сосуда с радиусом r , a — равновесное значение r ; v — продольная (вдоль оси x) компонента



Расчет спектра возбуждений $\omega = \omega(k)$ для течения воды в стальной трубе со звуковой (1) и дозвуковой (2) скоростью. $R = 5.8 \cdot 10^{-3}$. $1 - v_0 = 1$, $k_m = 2.145$, $\omega_m = \omega(k_m) = 0.88$, $\omega''(k_m) = 0.376$; $2 - v_0 = 1 \cdot 10^{-3}$.

скорости; p — давление; $R = \rho^2 / [3(1 - \mu^2)\rho_0^2]$ — безразмерная цилиндрическая жесткость, ρ — плотность жидкости, ρ_0 — плотность материала стенок сосуда, μ — коэффициент Пуассона [3]. Для приведения (1) к безразмерному виду использовались следующие единицы времени T , длины L и давления P :

$$T = \sqrt{\frac{\rho_0 a^2}{E}}, \quad L = \sqrt{\frac{\rho_0 a d}{2\rho}}, \quad P = \frac{Ed}{2a}, \quad (2)$$

d — толщина стенок, E — модуль Юнга материала стенок. Все переменные: A , v и p считаются зависящими от времени t и продольной координаты x .

В [1] проведен анализ распространения линейных волн в системе, описываемой уравнениями (1), и характера их устойчивости для сверхзвуковых течений $v_0 > 1$ (v_0 — постоянная составляющая скорости по-

тока). Для звуковых и дозвуковых скоростей $v_0 \leq 1$ дисперсионные кривые $\omega = \omega(k)$ (ω — частота, k — волновое число) приведены на рисунке. Характерной особенностью их является наличие фонованного участка $\omega = k(v_0 \pm 1) \sim k$ для $k \ll 1$ (ветвь, соответствующая знаку „—“ на рисунке не показана), а также наличие локального (ротонного) минимума для звуковых скоростей $v_0 \approx 1$ около $k = k_m$, вблизи которого энергия элементарного возбуждения $\varepsilon(q) = \hbar\omega \approx \Delta + (q - q_m)^2/2\mu$, импульс $q = \hbar k$, \hbar — постоянная Планка. Для иллюстрации приведем значения $q_m = \hbar k_m$, $\Delta = \hbar\omega_m$ и $\mu = (d^2\varepsilon/dq^2)^{-1}$, определяемые численно для течения воды в стальной трубе радиусом $a = 0.1$ м и толщиной стенки $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м (см. рисунок, 1): $\Delta \approx 0.94 \cdot 10^{-29}$ Дж $\approx 0.68 \cdot 10^{-6}$ К, $q_m \approx 0.72 \cdot 10^{-32}$ кг · м/с $\approx 0.68 \cdot 10^2 \hbar/\text{м}$, $\mu \approx 0.28 \cdot 10^{-35}$ кг $\approx 0.93 \cdot 10^{-10}$ м Н₂О. При этом значения величин (2) равны: $T = 0.987 \cdot 10^{-5}$ с, $L = 3.12 \cdot 10^{-2}$ м, а скорость звука $c = L/T = 3.16 \cdot 10^3$ м/с.

Отмеченные особенности спектра $\omega(k)$ дают основание для того, чтобы предложить для описания течения жидкости в трубе с упругими стенками так называемую двухжидкостную модель, которая использовалась для описания течения гелия-II в узких капиллярах при температурах, близких к абсолютному нулю [4]. В этой модели плотность жидкости $\rho = \rho_n + \rho_s$ равна сумме плотностей нормальной ρ_n и сверхтекучей ρ_s компонент. Плотность нормальной компоненты в свою очередь равна $\rho_n = \rho_n^{ph} + \rho_n^r$ сумме фонованной ρ_n^{ph} и ротонной ρ_n^r части, каждая из которых связана с возбуждениями, описываемыми соответствующими частями спектра $\omega = \omega(k)$. Для их расчета используем выражение для числа элементарных возбуждений в бозе-жидкости [4] (постоянная Больцмана положена равной 1):

$$n(q) = \frac{1}{e^{\varepsilon(q)/\Theta} - 1} \approx \frac{\Theta}{\varepsilon}, \quad \Theta \gg \varepsilon, \quad (3)$$

Θ — температура.

Для фонованной части ρ_n^{ph} получаем выражение

$$\rho_n^{ph} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T^2}{L^2} \frac{E^{ph}}{(v_0 + 1)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T^2}{L^2} \frac{\Theta}{m(v_0 + 1)^2} \cdot \rho, \quad E^{ph} = N_0 \nu \Theta, \quad (4)$$

N_0 — концентрация молекул, ν — число атомов в молекуле, E^{ph} — энергия единицы объема фонованного газа при высоких температурах [4],

ρ — плотность жидкости, m — масса молекулы. Для рассмотренного выше примера при $\Theta = 300$ К $\rho_n^r \approx 0.0046 \cdot \rho$ ($v_0 = 1$) и $\rho_n^r \approx 0.018 \cdot \rho$ ($v_0 \ll 1$).

Для ротонной части плотности ($v_0 = 1$) имеем [4]:

$$\begin{aligned} \rho_n^r &= \frac{4\pi}{3} \cdot \Theta \int_0^\infty \frac{q^4}{\varepsilon^2} \cdot \frac{dq}{(2\pi\hbar)^3} \\ &\approx \frac{1}{6\pi^2} \cdot \frac{T^2}{L^5} \frac{q_m^4}{\omega_m^{3/2} \cdot \omega_m''} \cdot \Theta \approx 1.15 \frac{T^2}{L^5} \Theta \text{ (kg/m}^3\text{)}, \end{aligned} \quad (5)$$

что для рассмотренного выше примера дает значение $0.94 \cdot 10^{-23}$ kg/m³. Для концентрации ротонов $N = \rho_n^r/\mu$ получаем выражение:

$$N = \frac{\rho_n^r}{\mu} = \frac{1}{6\pi^2\hbar} \cdot \frac{T}{L^3} \cdot \frac{q_m^4}{\omega_m^{3/2}} \cdot \Theta = 0.43 \cdot \frac{T}{\hbar L^3} \cdot \Theta \text{ (1/m}^3\text{)},$$

что для рассматриваемого примера приводит к значениям для $N \approx 3.36 \cdot 10^{12}$ m⁻³ и для среднего расстояния между ротонами $r_0 = (N)^{-1/3} \approx 0.67 \cdot 10^{-4}$ m. Поскольку для рассматриваемого примера $\rho_n^{ph} \ll \rho$ и $N \ll 0.334 \cdot 10^{29}$ m⁻³ — концентрации молекул воды, использование приближения идеального газа для расчетов допустимо. Также допустимо и использование для расчета выражения $n(q)$ для трехмерной задачи (3), по крайней мере, для фононов, поскольку скорость звука достаточно изотропна: поперечная скорость $c_\perp = 1.1 \div 1.3 \cdot 10^3$ m/s, т.е. по порядку величины совпадает с использованной выше продольной скоростью.

Формально (в пренебрежение процессами распада и слияния волн) следует учесть также вклад от участка спектра $\omega \sim (R)^{1/2}k^2$ для $k \gg 1$. Расчет показывает, что вклад этих возбуждений в $\rho_n \approx 10^5 \cdot \rho_n^r$, так что $\rho_n \approx \rho_n^{ph}$.

Физически возникновение сверхтекучести при высоких температурах связано с тем, что отмеченный в [1] механизм передачи энергии от потока жидкости упругим волнам в стенках трубы приводит к ослаблению отталкивания между одноименными флуктуациями плотности жидкости. Это можно показать, записывая второе уравнение в (1) как $dv/dt = -p_x = -(A + A_{tt} + RA_{xxxx})_x = -(1 - \omega^2 + Rk^4)A_x = -(v_0 - \omega/k)^2 A_x$. При выводе использовано дисперсионное уравнение, следующее из (1): $(1 - \omega^2 + Rk^4)k^2 - (kv_0 - \omega)^2 = 0$ [1]. Сравнивая полученное уравнение движения с аналогичным без учета массы и жесткости

стенок: $dv/dt = -A_x$ (напомним, что в данной модели A играет роль плотности), заключаем, что взаимодействие волн плотности в потоке с упругими волнами в стенке приводит к отмеченному выше ослаблению отталкивания при условии $v_0 < v_{0s} = \min\{\omega(k)/k\}$. Нарушение этого условия приводит к потере устойчивости системы. В результате часть жидкости приобретает сверхтекучие свойства — способность протекать через сосуды без затрат энергии на трение, т.е. вязкость, при скоростях, удовлетворяющих указанному условию [4]. Для случая, изображенного на рисунке 1, $v_{0s} = 3.373 \cdot 10^{-1}$. Другим проявлением ослабления отталкивания флуктуации является возможность распространения в рассматриваемой системе солитонов [2].

С точки зрения двухжидкостной модели второе уравнение (1) — это уравнение для скорости $v \equiv v_s$ и давления $p \equiv p_s$ сверхтекучей компоненты. Уравнение для скорости u нормальной компоненты можно получить, считая ее (как и сверхтекучую компоненту) несжимаемой, пренебрегая диссипацией (энтропия $s = \text{const}$) и оставляя в тензоре плотности потока импульса член, обусловленный вязкостью нормальной компоненты η . В принятых единицах (u — безразмерно) получим [3]:

$$\frac{\rho_n}{\rho_s} [u_t + uu_x] = -p_{nx} + \nu u_{xx}; \quad \rho_s \equiv \rho, \quad \nu = \frac{2\eta}{d\sqrt{E\rho_0}}, \quad (6)$$

p_n — давление нормальной компоненты; $p = p_s + p_n$. Для рассматриваемого случая $\rho_n/\rho_s \sim 10^{-2}$, $\nu \sim 10^{-8}$ и из (6) следует $p_n \ll p_s$, что позволяет пренебречь p_n в последнем уравнении в (1).

Полученный результат позволяет решить парадокс, связанный с наблюдением течений в трубах, характеризующихся аномально большими значениями числа Рейнольдса: $\text{Re}^{exp} \sim 10^5$ [3]. Поскольку $\text{Re} = v_0 a \rho / \eta$, из вышесказанного следует, что реальное значение $\text{Re}/\text{Re}^{exp} = \rho_n/\rho \sim 10^{-2}$.

Список литературы

- [1] Зайко Ю.Н. // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 16. С. 27–31.
- [2] Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов / Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 294 с.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [4] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 448 с.