

01;04

## Граничные условия на катоде для гидродинамических уравнений при моделировании разрядов на правой ветви кривой Пашена

© А.А. Кудрявцев, Л.Д. Цендин

С.-Петербургский государственный университет

E-mail: akud@ak2138.spb.edu

С.-Петербургский государственный технический университет

Поступило в Редакцию 7 февраля 2002 г.

Показано, что при гидродинамическом описании разрядов на правой ветви кривой Пашена необходимо учитывать изменение эффективного коэффициента вторичной эмиссии  $\gamma_{eff}$  на катоде, вызванное обратным рассеянием электронов. Получены простые кинетические выражения для  $\gamma_{eff}$  и показано, что величина  $\gamma_{eff}$  определяется начальной энергией эмитируемых электронов и амплитудой приложенного поля.

При пробое на правой ветви кривой Пашена ( $pd > (1 - 5) \text{ cm} \cdot \text{Torr}$ ) поля невелики и имеет место сильная экспоненциальная зависимость  $\alpha/p = Ae^{-Bp/E}$ . При этом электрон успевает прийти в равновесие с внешним полем, и ионизацию можно характеризовать с помощью коэффициента Таунсенда  $\alpha(E/p)$ , зависящего от локального поля. В таком случае можно пользоваться гидродинамической (fluid) моделью, заменяющей весь ансамбль электронов неким средним электроном, характеризуемым средней энергией  $3T_e/2$ , дрейфовой скоростью  $V_{ed} = b_e E$  и коэффициентом диффузии  $D_e = b_e T_e / e$ . Эта модель (или ее различные комбинации с другими подходами — так называемые hybrid models)

часто используется для моделирования переходных (transient) разрядов, например в ячейках плазменных дисплеев (PDP), когда прикладываемое напряжение падает после пробоя и локальное приближение остается применимым в течение всего разряда (см., например, [1–8]). В качестве граничного условия на катоде обычно используется условие Таунсенда для токов электронов и ионов

$$j_e(0, t) = \gamma_{eff} j_i(0, t). \quad (1)$$

Здесь  $\gamma_{eff}$  — второй коэффициент Таунсенда, отражающий вклад различных процессов вторичной эмиссии электронов с катода.

Величины, входящие в (1), не могут быть вычислены в рамках гидродинамической модели. Они должны находиться из микроскопического анализа. В противном случае для каждой пары газ–материал электрода необходимо восстанавливать  $\gamma_{eff}$  из экспериментальных данных. Поскольку определенная таким образом величина  $\gamma_{eff}$  достаточно сильно зависит от параметра  $E/p$ , то ее изменение необходимо отслеживать при описании нестационарных разрядов. Наиболее последовательно этот подход развивается в работах A.V. Phelps с соавторами [9], где в результате детального анализа тщательно выполненных экспериментов затабулированы значения  $\gamma_{eff}$  для Ar (т.н. apparent secondary-electron emission coefficient).

Для теоретического вычисления связи коэффициента  $\gamma_{eff}$ , входящего в граничное условие (1), с коэффициентом  $\gamma$ , характеризующим процесс эмиссии на поверхности катода („истинным“  $\gamma$ ), необходимо решить кинетическую задачу. Еще в [10] было показано, что при выборе  $j_e(0, t)$  в виде  $j_e(0, t) = n_e V_{ed} + n_e V/4$ , использованном также в [1–5], где  $V$  — хаотическая скорость электронов, фактор ухода  $f_{es}$ , определенный согласно  $\gamma_{eff} = f_{es}\gamma$ , есть

$$f_{es} = 1/(1 + V/4V_{ed}) = 1/(1 + 3\lambda_T/2\lambda). \quad (2)$$

Здесь введена величина  $\lambda_T = T_e/eE$  — характерная длина установления дрейфовой скорости электрона (длина его энергетической релаксации [11]). Видно, что пока  $V_{ed} \ll V$ , большая часть эмитированных электронов будет возвращаться обратно на катод, и сама эта доля будет меняться при изменении  $E/p$ .

Наиболее детально эта проблема рассмотрена в [12,13]. В этих работах была использована одна и та же запись кинетического уравнения

(см. ниже (9)), основанная на нелокальном приближении [11] (см. (2) в [12] и (12) в [13]). Для сечений неупругих процессов с порогом  $\varepsilon^*$  в [12] и [13] была выбрана одинаковая линейная аппроксимация, так что и результирующие формулы ((6) в [12] и (24) в [13]) полностью идентичны. Так как начальные энергии  $\varepsilon_e$  электронов эмиссии обычно малы (порядка нескольких eV), в [12,13] рассматривался лишь случай  $\varepsilon_e \ll \varepsilon^*$ . Доля быстрых электронов с  $\varepsilon > \varepsilon^*$  при этом мала. Выражения же для EDF в этой области энергий достаточно сложны. Это привело к тому, что даже для моноэнергетического источника электронов конечные выражения в [12,13] весьма громоздки и с трудом поддаются интерпретации. Вклад этой части EDF может быть существен лишь в случае смесей газов, в которых легкоионизируемая компонента представляет собой малую присадку.

В данном сообщении для разрядов на правой ветви кривой Пашена получены простые кинетические выражения для  $\gamma_{eff}$ , обобщающие и упрощающие результаты [12,13]. Показано, что попытки нахождения  $\gamma_{eff}$  в рамках гидродинамического подхода бесперспективны.

Действительно, в рамках гидродинамического приближения уравнение непрерывности в медленном меняющемся поле имело бы вид

$$D_e n_e'' - V_{ed} n_e' + v_i n_e = 0. \quad (3)$$

При записи (3) учтена диффузия электронов, роль которой вблизи катода может быть значительна [10]. Если использовать характерные размеры:  $\lambda_T = T_e/eE$  и  $\alpha = v_i/V_{ed}$ , то решение уравнения (3) при ненулевой граничной концентрации электронов  $n_e(0) = n_{e0}$  есть

$$n_e(x) = n_{e0} \exp(x/2\lambda_T) \text{sh}((L-x)\sqrt{1-4\alpha\lambda_T/2\lambda_T}) / \text{sh}(L\sqrt{1-4\alpha\lambda_T/2\lambda_T}). \quad (4)$$

Поскольку зазор  $L$  составляет несколько длин ионизации  $\alpha^{-1}$ , а на правой ветви кривой Пашена  $\alpha\lambda_T \ll 1$ , то, разлагая (4) по этому параметру, получим хорошо известный закон Таунсенда

$$n_e(x) = n_{e0} \exp(\alpha x), \quad j_e(x) = j_{e0} \exp(\alpha x). \quad (5)$$

Соответствующий результирующий поток от катода

$$j_{e0} = j_e(0) = -D_e n_e' + V_{ed} n_e = -V_{ed} \alpha \lambda_T n_{e0} + V_{ed} n_{e0} \approx V_{ed} n_{e0} \quad (6)$$

определяется в основном дрейфом. Другими словами, при  $L \gg \lambda_T$  роль диффузии мала и ее учет не изменяет классическую формулу

Таунсенда (5) для электронного тока в разрядном промежутке. Простейший учет кинетического характера проблемы соответствует известному приближению средней длины пробега [14]. При этом поток электронов представляется как разность  $j_e(0) = j_{e+}(0) - j_{e-}(0)$  односторонних потоков от катода (+) и к катоду (-) (см., например, [14])

$$j_{e+}(0) = \frac{n_{e0}V}{4} + \left( \frac{-D_e n'_e}{2} + V_{ed} n_e \right), \quad j_{e-}(0) = \frac{n_{e0}V}{4} - \frac{-D_e n'_e}{2}. \quad (7)$$

В свою очередь, граничное условие на катоде находится из условия

$$j_{e+}(0) = j_{e0} = \gamma j_i(0), \quad (8)$$

которое после использования (4)–(6) дает для фактора  $f_{es}$  выражение (2), совпадающее с полученным еще в [10]. В рамках этого приближения дальнейшее уточнение граничных условий [15,16] представляется малоперспективным. Поскольку сама fluid модель (в том числе и понятие о  $V_{ed}$ ) применима лишь с расстояний  $x > \lambda_T$  от границ разрядного объема, то, чтобы проследить более детально за динамикой формирования дрейфового потока электронов от катода, необходим последовательный кинетический анализ. Основываясь на развитом в [11] подходе, ниже мы дадим простое и физически прозрачное рассмотрение.

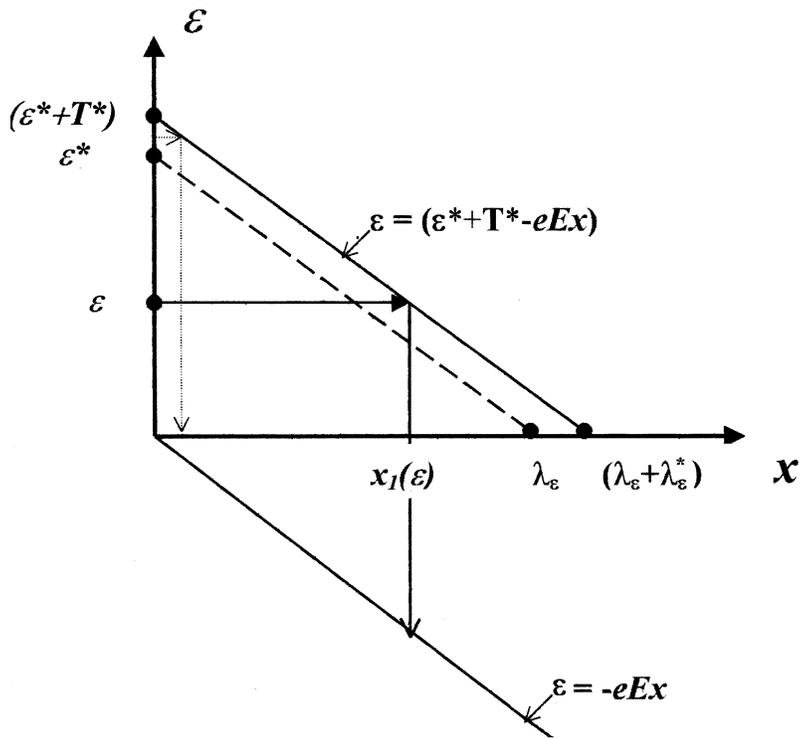
Кинетическое уравнение для изотропной части EDF в переменных  $x$  и полной энергии  $\varepsilon = mV^2/2 - eEx$  при неупругом балансе энергии электронов в поле ( $eE\lambda > \varepsilon_1\sqrt{2m/M}$ ) имеет вид [11]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{(\varepsilon + eEx)}{3N\sigma(\varepsilon + eEx)} \frac{\partial f_0(\varepsilon, x)}{\partial x} \right) = N\sigma^*(\varepsilon + eEx)f_0(\varepsilon, x)(\varepsilon + eEx), \quad (9)$$

где  $\sigma, \sigma^*$  — соответственно сечения упругого и неупругого рассеяния, зависящие от кинетической энергии  $w = \varepsilon + eEx$ , а  $\lambda = 1/N\sigma$  — длина пробега электрона.

Характер движения электронов с начальной энергией  $\varepsilon$  иллюстрирует рисунок. При  $\varepsilon < \varepsilon^*$  на длине  $x_1(\varepsilon) = (\varepsilon^* - \varepsilon)/eE$  кинетическая энергия электронов меньше  $\varepsilon^*$  и они двигаются с сохранением полной энергии  $\varepsilon$ . Поскольку при этом  $\sigma^* = 0$ , то дифференциальный поток

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{2(\varepsilon + eEx)}{3m} f_1(\varepsilon, x) = \frac{2(\varepsilon + eEx)}{3mN\sigma(\varepsilon + eEx)} \frac{\partial f_0(\varepsilon, x)}{\partial x} \quad (10)$$



также сохраняется. При  $x > x_1(\varepsilon)$  электрон претерпевает неупругий удар, т. е. скачкообразно теряет энергию возбуждения  $\varepsilon^*$  (перескакивает на нижележащую ступеньку  $\varepsilon = -eEx$  на рисунке). Только эти электроны далее „подхватываются“ полем и не могут возвратиться обратно на катод (в отличие от электронов в верхней полуплоскости  $\varepsilon > 0$ , которые возвращаются). В условиях применимости двучленного разложения EDF ( $\sigma \gg \sigma^*$ ) характерные пространственный  $\lambda_\varepsilon^* = \sqrt{\lambda\lambda^*}/3$  и энергетический  $T^* = eE\lambda_\varepsilon^*$  масштабы спада EDF при  $\varepsilon > \varepsilon^*$  малы по сравнению с  $\lambda_\varepsilon = \varepsilon_1/eE$  и  $\varepsilon_1$  соответственно. Поэтому EDF за порогом  $\varepsilon^*$  резко падает, и для ее нахождения можно воспользоваться моделью „черной стенки“, наложив нулевое граничное условие при энергии  $(\varepsilon^* + T^*)$ , соответствующей расстоянию  $(x_1(\varepsilon) + \lambda_\varepsilon^*)$  (см.

рисунок) [11]. Решение (9) можно представить в виде

$$f_0(\varepsilon, x) / \int_x^{x_1(\varepsilon)} \frac{\sigma(\varepsilon + Ex) dx}{(\varepsilon + eEx)} = f_0(\varepsilon, 0) / \int_0^{x_1(\varepsilon)} \frac{\sigma(\varepsilon + eEx) dx}{(\varepsilon + eEx)} = \Phi(\varepsilon), \quad (11)$$

где  $x_1(\varepsilon) = (\varepsilon^* + T^* - \varepsilon)/eE = \lambda_\varepsilon + \lambda_\varepsilon^* - \varepsilon/eE$ . Поскольку  $\lambda_\varepsilon \gg \lambda_\varepsilon^*$ , то, как уже отмечалось выше, вклад быстрых электронов с  $\varepsilon > \varepsilon^*$  в ток и в концентрацию мал (порядка  $\lambda_\varepsilon^*/\lambda_\varepsilon \ll 1$ ).

Из условий Маршака [17] для EDF у стенки (ср. с (7))

$$j_+ = f_0/4 + f_1/2, \quad j_- = f_0/4 - f_1/2 \quad (12)$$

следует граничное условие на катоде (ср. с (8))

$$j_+(\varepsilon, 0) = j_0(\varepsilon), \quad (13)$$

где  $j_0(\varepsilon)$  — поток эмитируемых с катода электронов.

Подставляя EDF (10) в (12), получим для парциального (т.е. соответствующего моноэнергетическому источнику электронов на катоде) фактора  $f_{es}(\varepsilon)$ :

$$\frac{1}{f_{es}(\varepsilon)} = \frac{\gamma(\varepsilon)}{\gamma_{eff}(\varepsilon)} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^{x_1(\varepsilon)} \frac{N\sigma(\varepsilon + eEx) dx}{(\varepsilon + eEx)}, \quad (14)$$

Проще всего выглядит решение, если подынтегральная зависимость  $2(\varepsilon + eEx)/mN\sigma(\varepsilon + eEx) \approx \text{const}$ , что приближенно выполняется для рамзауровских газов (Ar, Kr, Xe). Тогда из (11) получаем линейно падающую по координате EDF:

$$f_0(\varepsilon, x) = f_0(\varepsilon, 0) \left(1 - eEx/(\varepsilon^* + T^* - \varepsilon)\right), \quad (15)$$

а выражение для  $f_{es}$  (14) при этом совпадает с (2) с  $\lambda_T = x_1(\varepsilon) = \lambda_\varepsilon + \lambda_\varepsilon^* - \varepsilon/eE$ .

Из (12)–(14) нетрудно получить общее выражение для произвольных энергетических зависимостей источника  $f_0(\varepsilon, 0)$  и частоты упругих

столкновений  $\sigma(\varepsilon + eEx)$ :

$$\frac{1}{f_{es}} = \frac{\gamma}{\gamma_{eff}} = \frac{1}{2} + \frac{\int_0^{\varepsilon_1+T^*} f_0(\varepsilon, 0) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{4 \int_0^{\varepsilon_1+T^*} \frac{f_0(\varepsilon, 0) d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon} \int_0^{x_1(\varepsilon)} \frac{N\sigma(\varepsilon+eEx) dx}{(\varepsilon+eEx)}}}, \quad (16)$$

которое можно рекомендовать для вычисления  $\gamma_{eff}(E/p)$  по известному истинному  $\gamma$ .

Обычно значения  $f_0(\varepsilon, 0)$  эмитированных электронов более или менее постоянны в диапазоне энергий от 0 до  $\varepsilon_e$ , где  $\varepsilon_e = \varepsilon_i - 2e\varphi$  для потенциальной эмиссии ионами или  $\varepsilon_e = \varepsilon^* - e\varphi$  для эмиссии метастабильными атомами ( $\varepsilon_i, e\varphi$  — соответственно потенциал ионизации газа и работа выхода материала катода) [16]. Тогда (16) можно упростить, полагая, что  $f_0(\varepsilon, 0)$  не зависит от энергии до  $\varepsilon \leq \varepsilon_e$ , т.е.  $f_0(\varepsilon, 0) = 3n_{e0}/2\varepsilon_e^{3/2} = \text{const}$ .

Для однокомпонентной среды  $\varepsilon_e < \varepsilon^*$  и  $f_{es}$  (16) приближенно соответствует (2) с  $\lambda_T \approx \lambda_e$ . Например, для  $f_0(\varepsilon, 0) = 3n_{e0}/2\varepsilon_e^{3/2} = \text{const}$  и зависимости  $2(\varepsilon + eEx)/mN\sigma(\varepsilon + eEx) \approx \text{const}$  из (16) имеем (2) с  $\lambda_T \approx \varepsilon_e^2/(6eE\varepsilon_1 \ln((\sqrt{\varepsilon^*} + \sqrt{\varepsilon_e})/(\sqrt{\varepsilon^*} - \sqrt{\varepsilon_e}))) \approx \lambda_e$ . В смесях же газов, у которых значения  $\varepsilon_i$  заметно различаются, при использовании катодов с малыми  $e\varphi$  (например, He, Ne+Xe с катодом из MgO, используемые в PDP [1–10]), следует ожидать  $\varepsilon_e > \varepsilon^*$ . Действительно, при вторичной эмиссии электронов ионами и метастабильными атомами гелия или неона, имеющими  $\varepsilon_i(\text{He}) = 24.6 \text{ eV}$ ,  $\varepsilon_i(\text{Ne}) = 21.6 \text{ eV}$ , энергия  $\varepsilon_e$  будет превышать порог возбуждения ксенона  $\varepsilon^* = 8, 3 \text{ eV}$ . Поэтому для части эмитируемых электронов с энергией  $\varepsilon_e - \varepsilon^*$  в выражение для фактора ухода (2) вместо длины  $\lambda_T$  будет входить не  $\lambda_e$ , а  $\lambda_e^* < \lambda_e$  (траектория движения таких электронов на фазовой плоскости  $(\varepsilon, x)$  изображена на рис. 1 пунктиром). Возможно, что этот факт является одной из причин улучшения характеристик разряда в ячейках PDP при использовании смеси Xe с буферными He, Ne.

Таким образом, при  $\lambda_e \gg \lambda$  большая часть эмитированных с катода электронов будет возвращаться обратно, и эффективный коэффициент вторичной эмиссии будет мал. Чтобы величина  $\gamma_{eff}$  была близка к истинной  $\gamma$ , формально необходимо выполнение условия  $\lambda_e - \varepsilon^*/eE \approx \lambda$ , т.е. требуются такие сильные поля, чтобы электрон уже на одной

длине пробега сразу набирал энергию порядка  $\varepsilon^*$ . Использованное выше приближение „черной стенки“ становится тогда несправедливым, а неупругие процессы можно рассматривать как квазиупругие, т.е. формально спад EDF при  $\varepsilon > \varepsilon^*$  будет определяться величиной не  $T^*$ , а  $T_h^* = T^* \lambda_\varepsilon^* / \lambda_\varepsilon$ . К сожалению, основанное на двучленном разложении EDF рассмотрение, как и само понятие локального коэффициента  $\alpha(E/p)$ , становятся при этом неправомерными. Такие поля соответствуют насыщению экспоненциальной зависимости  $\alpha(E/p)$  и переходу к условиям на левой ветви кривой Пашена. На правой же ветви, чтобы подхватиться полем к аноду, электрон должен пройти путь  $x_1(\varepsilon_e) \approx (\varepsilon^* + T^* - \varepsilon_e) / eE = \lambda_\varepsilon + \lambda_\varepsilon^* - \varepsilon_e / eE$ . Для малых начальных энергий электронов  $\varepsilon_e$  это расстояние есть  $x_1 \approx \lambda_\varepsilon + \lambda_\varepsilon^*$ , в то время как для больших  $\varepsilon_e \approx \varepsilon^* - x_1 \approx \lambda_\varepsilon^* \ll \lambda_\varepsilon$ . Поэтому увеличения  $\gamma_{eff}$  при заданном  $E/p$  в этом случае можно достичь путем увеличения начальной энергии  $\varepsilon_e$  эмитированных электронов.

Таким образом, при гидродинамическом описании разрядов на правой ветви кривой Пашена необходимо учитывать изменение эффективного коэффициента вторичной эмиссии на катоде, вызванное обратным рассеянием электронов. При этом величина  $\gamma_{eff}$  определяется главным образом начальной энергией эмитируемых электронов и амплитудой приложенного поля.

Один из авторов (Л.Д. Цендин) благодарит за поддержку гранты РФФИ 01-02-16874 и NATO Sfr 974354.

## Список литературы

- [1] Meunier J., Belenguer Ph., Boeuf J.P. // J. Appl. Phys. 1995. V. 78. P. 731.
- [2] Boeuf J.P., Punset C., Hirech A., Doyeux H. // J. Phys. IV. 1997. V. 7. C. 4-3.
- [3] Veerasingam R., Campbell R.B., McGrath R.T. // Plasma Sources Sci. Technol. 1997. V. 6. P. 157.
- [4] Jeong H.S., Shin B.J., Whang K.W. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1999. V. 27. P. 171.
- [5] Rauf S., Kushner M.J. // J. Appl. Phys. 1999. V. 85. P. 3460.
- [6] Shin Y.K., Shon C.H., Kim W., Lee J.K. // IEEE Trans. Plasma. Sci. 1999. V. 27. P. 1366.
- [7] Oda A., Sakai Y., Akashi H., Sugawara H. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1999. V. 32. P. 2726.

- [8] Ikeda Y., Verboncoeur J.P., Christenson P.J., Birdsall C.K. // J. Appl. Phys. 1999. V. 86. P. 243.
- [9] Phelps A.V., Petrovic Z. // Plasma Sources Sci. Technol. 1999. V. 8. P. R21.
- [10] Thompson J.J. Conduction of electricity through gases. Cambridge Univ. Press, 1928.
- [11] Tsendin L.D. // Sov. J. of Plasma Phys. 1982. V. 8. P. 96, 228.
- [12] Shveigert V.A. // High Temperature. 1989. V. 27. P. 195.
- [13] Nagorny V.P., Drallos P.J. // Plasma Sources Sci. Technol. 1997. V. 6. P. 212.
- [14] McDaniel E.W. // Collision phenomena in ionized gases. NY–London–Sydney: J. Wiley & Sons, 1964.
- [15] Hagelaar G.J.M., Kroesen G.M.W., van Slooten U., Schreuders H. // J. Appl. Phys. 2000. V. 88. P. 2252.
- [16] Hagelaar G.J.M., de Hoog F.J., Kroesen G.M.W. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 1452.
- [17] Marshak R.E. // Rev. Mod. Phys. 1947. V. 19. P. 185.