01;03

Анализ соотношений Онзагера с помощью эллипсоидально-статистического уравнения

© *А.В. Латышев, А.А. Юшканов*

Московский педагогический университет
E-mail: latyshev@orc.ru, yushkanov@inbox.ru

Поступило в Редакцию 3 декабря 2001 г.

Выполнена проверка известных соотношений Онзагера $L_{12} = L_{21}$ в кинетической теории газов с учетом потоков массы и тепла вблизи поверхности. С помощью аналитического решения эллипсоидально-статистического уравнения (приводящего к истинному числу Прандтля) показано, что соотношения Онзагера выполняются, по крайней мере, с точностью до экспоненциальных поправок $\exp(-1/\mathrm{Kn})$ по числу Кнудсена Kn.

Настоящая работа является продолжением нашей работы [1], в которой проверка соотношений Онзагера основана на использовании БКВ-уравнения (Больцман, Крук, Веландер). Однако, БКВ-уравнение, как известно [2], приводит к неправильному числу Прандтля $\mathrm{Pr} = 1$. Поэтому проверка соотношений Онзагера, основанная на использовании кинетического уравнения, приводящего к истинному числу Прандтля ($\mathrm{Pr} \approx 2/3$), остается до сих пор открытой. Цель настоящей заметки — устранить этот пробел. Для этой цели используется эллипсоидально-статистическое уравнение (кратко: ЭС-уравнение), приводящее к правильному (истинному) числу Прандтля.

Рассмотрим классическую задачу о движении газа и переносе массы и тепла в канале под действием перепада температуры и давления [2]. При этом относительные перепады температуры и давления предполагаются малыми, что позволяет линеаризовать задачу. Будем предполагать, что число Кнудсена Kn, равное отношению длины свободного пробега молекул газа к толщине канала, мало. Отметим, что некоторые из рассмотренных потоков локализованы в слое Кнудсена. Поэтому, хотя число Кнудсена и мало, его нельзя считать равным нулю.

Возьмем декартову систему координат с центром в середине канала, с плоскостью yz, параллельной верхней и нижней стенкам. Предположим, что потоки массы и тепла параллельны оси z, а также, что относительные перепады температуры и давления удовлетворяют неравенствам $|\Delta T|/T \ll 1$, $|\Delta p|/p \ll 1$. Здесь $\Delta T = T_2 - T_1$, $\Delta p = p_2 - p_1$; T_1, p_1 и T_2, p_2— температура и давление газа соответственно в начале и конце канала. Потоки массы J_M газа и тепла J_Q вдоль канала пропорциональны перепадам давления и температуры и могут быть представлены в следующем виде [3]:

$$J_m = -2L_{11}(aL)v\frac{\Delta p}{p} - 2L_{12}(aL)\frac{\Delta T}{T^2},$$

$$J_Q = -2L_{21}(aL)v\frac{\Delta p}{p} - 2L_{22}(aL)\frac{\Delta T}{T^2}.$$

Здесь $v = 1/\rho = 1/(\mathrm{nm})$ — удельный объем, a — толщина канала, L — ширина канала (вдоль оси y).

Как уже указывалось, целью данной работы является доказательство соотношений Онзагера. Линеаризованную функцию распределения представим в виде $f = f_0(1+\varphi)$ (f_0 — абсолютный максвеллиан) и введем безразмерную скорость газовых молекул $\mathbf{c} = \sqrt{\beta}\,\mathbf{v}$, $\beta = m/2kT$. Выразим потоки массы и тепла через функцию φ:

$$\sqrt{\beta}\,J_M = nm\pi^{-3/2}\int dx\,dy\int \exp(-c^2)c_z\varphi d^3c,$$

$$\sqrt{\beta}\,J_Q = nkT\pi^{-3/2}\int dx\,dy\int \exp(-c^2)c_z\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\varphi d^3c,$$

$$\int dx\,dy = \int dy\int\limits_{-a}^{a} dx = \frac{L}{\nu\sqrt{\beta}}\int\limits_{-b}^{b} dx', \quad b = a\sqrt{\beta}\,\nu \sim 1/\mathrm{Kn}.$$

Безразмерные потоки массы и тепла выражаются равенствами

$$J'_M = \frac{\nu}{4aLnkT}\,J_M, \quad J'_Q = \frac{m\nu}{4aLnk^2T^2}\,J_Q,$$

или, в терминах L_{ij},

$$J'_M = -\frac{v\nu}{2}L_{11}\frac{\Delta p}{p} - \frac{\nu}{2Tp}L_{12}\frac{\Delta T}{T}, \quad J'_Q = -\frac{\nu}{2pT}L_{21}\frac{\Delta p}{p} - \frac{\rho\nu}{2p^2T}\,\frac{\Delta T}{T}.$$

Перепишем эти потоки через безразмерные коэффициенты Онзагера L'_{ij}:

$$J'_M = -L'_{11}\frac{\Delta p}{p} - L'_{12}\frac{\Delta T}{T}, \quad J'_Q = -L'_{21}\frac{\Delta p}{p} - L'_{22}\frac{\Delta T}{T},$$

$$L'_{12} = \frac{\nu}{2Tp}L_{12}, \quad L'_{21} = \frac{\nu}{2Tp}L_{21},$$

а также в терминах функции φ:

$$J'_M = \pi^{-3/2}\int\limits_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2)c_z\varphi d^3c,$$

$$J'_Q = \pi^{-3/2}\int\limits_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2)c_z\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\varphi d^3c.$$

Тогда имеем

$$J'_M = -S_{11}k_p - S_{12}k_t, \quad J'_Q = -S_{21}k_p - S_{22}k_t, \quad k_t = \frac{\partial \ln T}{\partial z'}, \quad k_p = \frac{\partial \ln p}{\partial z'},$$

$$\frac{\Delta p}{p} = z'_0 k_p, \quad \frac{\Delta T}{T} = z'_0 k_t, \quad z'_0 = \nu\sqrt{\beta}\,z_0, \quad S_{ij} = L'_{ij}z'_0,$$

где z'_0 — безразмерная, а z_0 — размерная длина канала, ν — частота столкновений.

Теперь требуется доказать, что $S_{12} = S_{21}$. Разложим функцию φ на два слагаемых, пропорциональных соответственно k_p и k_t:

$$\varphi = \varphi_p k_p + \varphi_t k_t. \tag{1}$$

Тогда потоки массы и тепла выражаются равенствами

$$-S_{12} = \pi^{-3/2}\int\limits_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2)c_z\varphi_t d^3c,$$

$$-S_{21} = \pi^{-3/2}\int\limits_{-b}^{b} dx' \int \exp(-c^2)c_z\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\varphi_p d^3c.$$

Возьмем ЭС-уравнение в безразмерных переменных

$$c_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + c_z k_p + c_z\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)k_t + \varphi(x, \mathbf{c})$$
$$= 2c_z\pi^{-3/2}\int \exp(-c'^2)c'_z(1 - c_x c'_x)\varphi(x, \mathbf{c}')d^3c'. \tag{2}$$

Будем считать, что молекулы отражаются диффузно от стенок канала, тогда на верхней и нижней границах канала

$$\varphi(\pm b, c_x) = 0, \quad \mp c_x > 0. \tag{3}$$

Уравнение (2) имеет частное решение

$$\varphi_0(x, \mathbf{c}) = c_z \left[2U + 2\left(x - \frac{2}{3}c_x\right)k_t + \left(2c_x^2 - 2xc_x + \frac{3}{2}x^2\right)k_p - \left(c^2 - \frac{5}{2}k_t\right)\right].$$

Разложим задачу (2), (3) согласно (1) на две, одна из которых пропорциональна k_p, вторая — k_t.

Получим следующие две задачи. Задача 1:

$$c_x\frac{\partial\varphi_p}{\partial x} + \varphi_p(x, \mathbf{c}) + c_z = 2c_z\pi^{-3/2}\int \exp(-c'^2)c_z'(1 - c_x c_x')\varphi_p(x, \mathbf{c}')d^3c',$$

$$\varphi_p(\pm b, c_x) = 0, \quad \mp c_x > 0.$$

Задача 2:

$$c_x\frac{\partial\varphi_t}{\partial x} + \varphi_t(x, \mathbf{c}) + c_z\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)$$

$$= 2c_z\pi^{-3/2}\int \exp(-c'^2)c_z'(1 - c_x c_x')\varphi_t(x, \mathbf{c}')d^3c',$$

$$\varphi_t(\pm b, c_x) = 0, \quad \mp c_x > 0.$$

Решение задачи 1 ищем в виде $\varphi_p = c_z\psi(x, \mu)$, $\mu = c_x$. Получим следующую задачу 1′:

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi(x, \mu) + 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2)(1 - \mu\mu')\psi(x, \mu')\psi(x, \mu')d\mu', \tag{4}$$

$$\psi(\pm b, \mu) = 0, \quad \mp\mu > 0.$$

Уравнение (4) имеет частное решение

$$\psi_0(x, \mu) = 2U_p + \left(2\mu^2 - 2x\mu + \frac{3}{2}x^2\right).$$

Возьмем однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (4):

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2)(1 - \mu\mu')\psi(x, \mu')d\mu'. \tag{5}$$

Разделение переменных в этом уравнении

$$\psi_\eta(x, \mu) = \exp(-x/\eta)F(\eta, \mu)$$

(η — спектральный параметр) сводит последнее к характеристическому уравнению

$$(\eta - \mu)F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)F(\eta, \mu)d\mu \equiv 1.$$

Решение характеристического уравнения возьмем в пространстве обобщенных функций [4]

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2)\lambda(\eta)\delta(\eta).$$

Здесь

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) \frac{du}{u - z}$$

— дисперсионная функция Черчиньяни [5].

Аналогично [1] можно показать, что решение задачи $1'$ имеет вид

$$\psi(x, \mu) = \psi_0(x, \mu) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-x/\eta)F(\eta, \mu)d\eta,$$

где $a(\eta)$ — неизвестная функция (коэффициент непрерывного спектра).

Рассуждая так же, как и в [1], найдем

$$2U_p = 2(V_1^2/2 - 3/4) - 2V_1(b + V_1) - 3b^2/2,$$

$$2\sqrt{\pi}\, i\mu a_p(\mu) \exp(b/\mu) = 2(b + V_1 + \mu)\left(\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)}\right),$$

где

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp\left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\theta(u) - \pi}{u - z}\, du\right), \quad V_1 = -\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty [\theta(u) - \pi] du,$$

$$\theta(u) = \arg \lambda^+(u), \quad \theta(0) = 0.$$

Теперь находим поток тепла:

$$-S_{21} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-b}^{b} dx' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2) \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) \psi_p(x, \mu) d\mu$$

$$= b + (b + V_1) \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{3}{4}\right) + V_3^*,$$

где

$$V_3^* = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{X^+(u)} - \frac{1}{X^-(u)}\right] u\, du.$$

Решение задачи 2 ищем в виде

$$\varphi_t = c_z \left[f(x, \mu) + (c_y^2 + c_z^2 - 2)\xi(x, \mu)\right], \qquad \mu = c_x.$$

Получим следующие две задачи. Задача 2а:

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, \mu) + \mu^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2)(1 - \mu\mu') f(x, \mu') d\mu',$$

$$f(\pm b, \mu) = 0, \qquad \mp\mu > 0,$$

причем $f_{to}(x, \mu) = 2U_t - (\mu^2 - \frac{1}{2})$.

Задача 2б:

$$\mu \frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi(x, \mu) = 0, \quad \xi(\pm b, \mu) = 0, \quad \mp\mu > 0.$$

Решение задачи 2б далее не понадобится. Задача 2а имеет решение

$$f(x, \mu) = f_{to}(x, \mu) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-x/\eta) F(\eta, \mu) a_t(\eta) d\eta.$$

В этом разложении

$$2U_t = V_1^2 - 1/2 - V_1^2/2 + 3/4 = (V_1^2 + 1/2)/2,$$

$$2\sqrt{\pi}\, i\mu a_t(\mu)\exp(b/\mu) = -(V_1 + \mu)\left[\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)}\right].$$

Теперь находим поток массы:

$$-S_{21} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-b}^{b} dx' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2) f(x',\mu)d\mu = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-b}^{b} dx' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)$$

$$\times\left[2U_t - \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + 2\int\limits_{0}^{\infty} \exp(-x'/\eta)F(\eta,\mu)a_t(\eta)d\eta\right]d\mu$$

$$= 2bU_t + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\exp(b/\eta)\eta a_t(\eta)d\eta = b + (b + V_1)(V_1^2/2 - 3/4) + V_3^*,$$

что в точности совпадает с выражением $-S_{12}$.

Отметим, что величины S_{12} и S_{21} можно представить в виде

$$S_{ij} = 2br_{ij} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \qquad r_{ij} = r_{ij}^{(0)} + \frac{1}{b}r_{ij}^{(1)}. \tag{6}$$

Величины $r_{ij}^{(0)}$ и $r_{ij}^{(1)}$ соответствуют потокам на единицу толщины канала, так как $2b$ — безразмерная толщина канала. При этом выполняются равенства

$$r_{12}^{(0)} = r_{21}^{(0)}, \quad r_{12}^{(1)} = r_{21}^{(1)}. \tag{7}$$

Соотношения (6) являются разложениями величин r_{12} и r_{21} в ряд по степеням числа Kn, так как $1/b \sim \text{Kn}$. В разложениях (6) приведены все отличные от нуля степени; опущены только члены, пропорциональные $\exp(-1/\text{Kn})$, которые не разложимы в степенной ряд по степеням Kn.

Из двух соотношений (7) ранее в [6,7] было рассмотрено с использованием приближенного моментного метода (для БКВ-уравнения) только первое соотношение. В настоящей работе справедливость обоих соотношений (7) доказана аналитически с использованием ЭС-уравнения.

Итак, соотношения Онзагера строго выполняются для кинетического ЭС-уравнения с точностью, по крайней мере, до экспоненциальных поправок $\exp(-1/\mathrm{Kn})$ по числу Кнудсена.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта: 99–01–00336).

Список литературы

[1] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Изв-во РАН. Сер. МЖГ. 2001. № 1. С. 173–181.
[2] *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М: Наука, 1967. 440 с.
[3] *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
[4] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
[5] *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
[6] *Яламов Ю.И., Гайдуков М.Н.* // Коллоид. ж. 1976. Т. 38. № 6. С. 1149–1155.
[7] *Яламов Ю.И., Гайдуков М.Н., Голиков А.М.* // Коллоид. ж. 1977. Т. 39. № 6. С. 1132–1138.