Псевдо-ϵ-разложение и двумерная модель Изинга

© А.И. Соколов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет „ЛЭТИ“,
197376 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ais2002@mail.ru

(Поступила в Редакцию 14 января 2005 г.)

На основе пятипетлевых ренормгрупповых рядов для двумерной модели Изинга найдены псевдо-ϵ-разложения для координаты фиксированной точки g^*, критических индексов и эффективной константы связи шестого порядка g_6. Псевдо-ϵ-разложения для g^*, обратного индекса γ и константы g_6, как оказалось, обладают замечательным свойством — высшие члены этих рядов столь малы, что получить надежные численные результаты можно, не прибегая к борелевскому суммированию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-02-16189).

Двумерная модель Изинга, точно решенная Онсагером 60 лет назад, широко используется как испытательный полигон для тестирования различных приближенных методов [1–10]. Недавно для теоретико-полевой версии этой модели — двумерной скалярной евклидовой теории $\lambda\varphi^4$ — были найдены пятипетлевые вклады в ренормгрупповые (РГ) функции [7,10], что в сочетании с известными четырехпетлевыми разложениями [4] позволило получить РГ ряды рекордной длины. Пересуммирование этих рядов показало [7] однако, что высокий порядок теории возмущений не гарантирует достаточной точности при нахождении численных результатов. Так, координата вильсоновской фиксированной точки, даваемая пятипетлевым рядом для β-функции, превышает известное высокоточное значение [11]

$$g^* = 1.7543637(25) \tag{1}$$

на 5%, а ренормгрупповая оценка критического индекса η отличается от $1/4$ почти вдвое [7]. Эта ситуация резко контрастирует с тем, что мы имеем в случае трехмерных систем [4–6,12].

Существует ли способ улучшить численные оценки, извлекаемые из двумерных РГ разложений? Ниже показано, что такой способ есть. Он состоит в превращении РГ разложений в альтернативные степенные ряды, обладающие более благоприятным поведением коэффициентов. Речь идет об использовании техники псевдо-ϵ-разложения, предложенной Б. Никелом (см. ссылку 19 в работе [5]). Идея Б. Никела состоит в замене коэффициента при линейном члене в разложении β-функции на фиктивный малый параметр τ, нахождении координаты нетривиальной фиксированной точки g^* в виде ряда по τ и получении τ-разложений для критических индексов. Фактически этот метод уже применялся для вычисления критических индексов в двух измерениях [5], однако использование сравнительно коротких рядов не позволило выявить его преимуществ.

Итак, будем работать с двумерной массивной теорией типа $\lambda\varphi^4$, нормированной на нулевых внешних импульсах. Пятипетлевые РГ разложения для β-функции и критических индексов γ и η в этом случае имеют вид [7]

$$\frac{\beta(g)}{2} = -g + g^2 - 0.716173621g^3 + 0.930766443g^4 - 1.58238834g^5 + 3.26042g^6, \tag{2}$$

$$\gamma^{-1} = 1 - \frac{1}{3}g + 0.125023295g^2 - 0.122455138g^3 + 0.164004651g^4 - 0.288554g^5, \tag{3}$$

$$\eta = 0.033966147g^2 - 0.002022555g^3 + 0.011393097g^4 - 0.0137362g^5; \tag{4}$$

уточненное значение пятипетлевого вклада в γ^{-1} взято из [10]. Заменим первый член в правой части (2) на $-\tau g$ и реализуем описанный выше алгоритм. В результате этой процедуры получим следующие выражения:

$$g^* = \tau + 0.716173621\tau^2 + 0.095042867\tau^3 + 0.086080396\tau^4 - 0.204139\tau^5, \tag{5}$$

$$\gamma^{-1} = 1 - \frac{1}{3}\tau - 0.113701246\tau^2 + 0.024940678\tau^3 - 0.039896059\tau^4 + 0.0645212\tau^5, \tag{6}$$

$$\eta = 0.033966147\tau^2 + 0.046628762\tau^3 + 0.030925471\tau^4 + 0.0256843\tau^5. \tag{7}$$

Как видно, ряды по τ для g^* и γ^{-1} выгодно отличаются от РГ разложений в пространстве физической размерности тем, что их старшие коэффициенты численно малы, хотя и имеют нерегулярные знаки. Малость коэффициентов позволяет получать из (5), (6) надежные численные оценки, не прибегая к популярным сегодня методам суммирования, основанным на преобразовании Бореля.

В этом легко убедиться, строя для g^* и γ^{-1} обычные аппроксиманты Паде $[L/M]$ и полагая в них $\tau = 1$.

Таблица 1. Значения координаты вильсоновской фиксированной точки g^*, извлекаемые из псевдо-ϵ-разложения (5) с помощью аппроксимант Паде $[L/M]$

M/L	1	2	3	4	5
0	1.000	1.716	1.811	1.897	1.693
1	$3.523_{1.4}$	$1.826_{7.5}$	$2.724_{1.1}$	1.837	
2	1.425	$1.918_{3.0}$	$1.850_{6.1}$		
3	$2.601_{1.4}$	1.751			
4	1.194				

Примечание. Здесь и далее в виде индексов у чисел приведены координаты „опасных“ полюсов соответствующих аппроксимант, т.е. тех полюсов, которые лежат на вещественной положительной полуоси.

Таблица 2. Значения критического индекса γ, получаемые путем суммирования разложения (6) для γ^{-1} методом Паде

M/L	0	1	2	3	4	5
0	1.000	1.500	1.808	1.730	1.859	1.660
1	1.333	$2.024_{2.9}$	1.744	1.778	1.777	
2	1.558	1.702	$1.800_{5.2}$	1.777		
3	1.646	$6.871_{1.1}$	1.772			
4	1.732	1.718				
5	$1.714_{6.1}$					

Соответствующие результаты приведены в табл. 1 и 2. Поскольку τ-разложение для g^* начинается с линейного члена, максимальное значение ранга аппроксимант $L+M$ здесь фактически равно 4, тогда как для γ^{-1} $(L+M)_{\max}=5$. По этой причине число строк и столбцов в табл. 2 на единицу больше, чем в табл. 1. В виде индексов у чисел приведены координаты тех полюсов аппроксимант Паде, которые лежат на вещественной положительной полуоси τ. Поскольку наилучшими аппроксимирующими свойствами обладают диагональные $[L/L]$ и близкие к ним аппроксиманты Паде, не имеющие полюсов при $\tau>0$, наиболее достоверными оценками g^* следует считать числа 1.751 и 1.837 из табл. 1. Усредняя по ним, приходим к результату $g^*=1.794$, который лишь на 2% отличается от точного значения (1). Как видно из табл. 1, столь хорошую оценку позволяет получить именно пятипетлевое приближение; в более низких порядках почти все аппроксиманты Паде имеют „опасные“ полюсы, что ведет к сильному разбросу численных результатов. Этим, по-видимому, объясняется пессимизм, возникший ранее при работе с четырехпетлевыми рядами [5].

Аналогичная ситуация складывается при расчете критического индекса γ. Из табл. 2 видно, что и здесь надежные оценки обеспечивает только пятипетлевое приближение. Действительно, числа, даваемые основными рабочими аппроксимантами [2/3] и [3/2], а также аппроксимантой [4/1], почти совпадают друг с другом и близки к точному значению $\gamma=1.75$. Напротив, аппроксиманты [2/2] и [1/3], отвечающие четырехпетлевому приближению, имеют опасные полюсы, причем у второй из них полюс лежит рядом с физическим значением $\tau=1$, что ведет к сильному искажению результата.

Перейдем далее к вычислению индекса Фишера η. Сопоставляя ряды (4) и (7), можно заключить, что обращение к псевдо-ϵ-разложению не дает в этом случае никаких преимуществ. Более того, переходя к разложению по τ, вместо знакопеременного получаем знакопостоянный ряд, коэффициенты которого примерно одинаковы по величине. Складывая четыре члена этого ряда при $\tau=1$, получаем $\eta=0.137$, а использование единственной работоспособной аппроксиманты Паде [2/2] (остальные имеют опасные полюсы) дает $\eta=0.0565$. Обе эти оценки далеки от точного значения $\eta=0.25$, как впрочем и результат обработки РГ разложения (4) с помощью техники Паде–Бореля–Леруа — $\eta=0.146$ [7].

Мы попытались улучшить ситуацию, обрабатывая вместо ряда (7) для „малого“ индекса η ряды для „больших“ индексов ν и $\eta^{(2)}$, связанных с η известными соотношениями. С этой целью были найдены разложения по τ для ν и ν^{-1}

$$\nu=\frac{\gamma}{2-\eta}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\tau+0.1208977\tau^2+0.0584363\tau^3+0.0568918\tau^4+0.0037987\tau^5, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\nu}=2-\frac{2}{3}\tau-0.2613686\tau^2+0.0145746\tau^3-0.0913127\tau^4+0.118121\tau^5. \tag{9}$$

Первое из них, как оказалось, малопригодно для получения численных оценок: все порождаемые им аппроксиманты Паде, за исключением [5/0] и [0/5], имеют опасные полюсы, лежащие недалеко от физического значения $\tau=1$. Ряд для ν, таким образом, допускает лишь прямое суммирование и суммирование соответствующего обратного ряда. Эти операции дают почти совпадающие результаты — $\nu=0.907$ и $\nu=0.898$, которые, однако, далеки от точного значения $\nu=1$.

Разложение обратного индекса ν, напротив, имеет благоприятную в смысле суммирования по Паде структуру. Из табл. 3, где приведены результаты вычислений, видно, что все старшие (пятый порядок) аппроксиманты,

Таблица 3. Треугольник Паде для критического индекса ν, вычисляемого путем суммирования псевдо-ϵ-разложения (9) для ν^{-1}

M/L	0	1	2	3	4	5
0	0.500	0.750	0.933	0.920	1.005	0.898
1	0.667	$1.107_{2.6}$	0.921	0.931	0.955	
2	0.788	0.901	$0.971_{3.6}$	$0.959_{5.2}$		
3	0.846	$2.999_{1.1}$	0.959			
4	0.903	0.907				
5	0.907					

Таблица 4. Треугольник Паде для универсального отношения R_6, даваемого псевдо-ϵ-разложением (12)

M/L	1	2	3	4
0	4.000	2.364	3.587	1.837
1	2.839	3.064	2.867	
2	$3.148_{4.5}$	2.940		
3	2.621			

за исключением одной, свободны от опасных полюсов. Кроме того, аппроксиманты [2/3], [3/2] и [4/1] дают очень близкие числа. Тем не менее, принимая в качестве наиболее достоверных значения $\gamma = 1.78$, $\nu = 0.96$, вытекающие из таблиц 2 и 3, мы приходим к результату $\eta = 0.156$, который лишь чуть лучше прямой оценки $\eta = 0.137$.

Неэффективной, к сожалению, оказывается и работа с индексом $\eta^{(2)} = (2-\eta)(\gamma^{-1} - 1)$. Хотя псевдо-$\epsilon$-разложение для него хорошо суммируется по Паде — все старшие аппроксиманты не имеют полюсов при $\tau > 0$ и наиболее симметричные из них дают близкие значения $\eta^{(2)}$ (-0.851, -0.854, -0.837) — результирующая оценка индекса существенно отличается от точного значения $\eta^{(2)} = -0.75$.

Наряду с критическими индексами универсальные значения при $T \to T_c$ принимают и некоторые другие величины. К ним относятся, в частности, высшие эффективные константы связи $g_6, g_8, \ldots$, которые входят в уравнение состояния и определяют нелинейные восприимчивости системы χ_{2n} (см., например, [13–17]). Эти константы могут быть представлены в виде рядов по ренормированному заряду g. Ренормгрупповое разложение для константы g_6 двумерной скалярной теории $\lambda\varphi^4$ известно сегодня в четырехпетлевом приближении [16]

$$g_6 = \frac{4\pi^2}{81}\, g^3(1 - 1.125210g + 1.822531g^2 - 3.64849g^3). \tag{10}$$

Подставляя в этот ряд разложение (5), легко найти псевдо-ϵ-разложение для g_6

$$g_6 = \frac{4\pi^2}{81}\,(\tau^3 + 1.023311\tau^4 + 0.422991\tau^5 + 0.021201\tau^6). \tag{11}$$

Коэффициенты полученного ряда быстро убывают по величине. Попытка просуммировать его с помощью аппроксимант Паде наталкивается, однако, на проблему опасных полюсов. Лишь одна из аппроксимант, отвечающих четырехпетлевому приближению — [4/2] — свободна от них; ее использование дает $g_6 = 1.122$. Эта оценка хорошо согласуется с результатом суммирования РГ разложения (10) методом Паде–Бореля–Леруа — $g_6 = 1.10$ [16].

С другой стороны, известно, что в уравнение состояния и в выражение для нелинейной восприимчивости χ_6 входит не сама вершина g_6, а отношение $R_6 = g_6/g_4^2$ [13–17], где $g_4 = g\pi/9$ [16]. Интересно поэтому найти ряд по τ для этого отношения. Он имеет вид

$$R_6 = 4\tau(1 - 0.409036\tau + 0.305883\tau^2 - 0.437676\tau^3). \tag{12}$$

Старшие коэффициенты этого разложения не имеют выраженной тенденции к убыванию. Тем не менее использование аппроксимант Паде и в этом случае оказывается продуктивным. Как видно из табл. 4, полюс при $\tau > 0$ имеет только аппроксиманта [1/2], а числа, даваемые рабочими аппроксимантами [2/2] и [3/1], весьма близки друг к другу. Усредняя их, получим $R_6 = 2.90$. Эта оценка лишь на 1.5% отличается от результатов анализа многопетлевых РГ рядов $R_6 = 2.94$ [16], $R_6 = 2.95 \pm 0.03$ [18] и высокотемпературных разложений $R_6 = 2.943 \pm 0.007$ [19], а также от найденных недавно высокоточных значений $R_6 = 2.94294$ [11] и $R_6 = 2.94238$ [9,20].

Вычислительный потенциал псевдо-ϵ-разложения применительно к R_6 не исчерпывается приведенной выше оценкой. Величину этого отношения можно уточнить, пересуммировав ряд (12) методом Паде–Бореля. Как показывает расчет, аппроксиманты [2/2] и [3/1], построенные для борелевского образа R_6, не имеют опасных полюсов, а их обработка соответственно дает $R_6 = 2.970$ и $R_6 = 2.909$. Усредняя эти числа, приходим к значению $R_6 = 2.94$, которое совпадает с результатами работ [11,16,19,20].

В заключение отметим, что модель Изинга — не единственная система, для которой старшие коэффициенты псевдо-ϵ-разложений малы по сравнению с коэффициентами РГ рядов по ϵ и g. Недавно аналогичная особенность была обнаружена для трехмерных кубической [21] и киральной [22] моделей, а также для двумерной MN-модели [10]. Это позволило, в частности, получить альтернативные численные оценки для граничных размерностей параметра порядка, т. е. тех значений N и M, которые разделяют области различных режимов критического поведения [10,21,22].

Автор благодарен Е.В. Орлову за проведение некоторых контрольных вычислений.

Список литературы

[1] Th. Neimeyer, J.M.J. van Leeuwen. Physica **71**, *1*, 17 (1974).
[2] L.P. Kadanoff, A. Houghton. Phys. Rev. B **11**, *1*, 377 (1975).
[3] B. Nienhuis, M. Nauenberg. Phys. Rev. B **11**, *11*, 4152 (1975).
[4] G.A. Baker, jr., B.G. Nickel, D.I. Meiron. Phys. Rev. B **17**, *3*, 1365 (1978).
[5] J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. Phys. Rev. B **21**, *9*, 3976 (1980).
[6] J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. J. Phys. (France) Lett. **46**, L131 (1985); J. Phys. (France) **48**, 19 (1987); **50**, 1365 (1989).
[7] Е.В. Орлов, А.И. Соколов. ФТТ **42**, *11*, 2087 (2000).
[8] Б.Н. Шалаев. ТМФ **131**, *2*, 206 (2002).

[9] A. Pelissetto, E. Vicari. Phys. Reports **368**, *6*, 549 (2002).
[10] P. Calabrese, E.V. Orlov, D.V. Pakhnin, A.I. Sokolov. Phys. Rev. B **70**, *9*, 094425 (2004).
[11] M. Caselle, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, E. Vicari. J. Phys. A **33**, *46*, 8171 (2000); J. Phys. A **34**, *14*, 2923 (2001).
[12] S.A. Antonenko, A.I. Sokolov. Phys. Rev. E **51**, *3*, 1894 (1995).
[13] A.I. Sokolov, E.V. Orlov, V.A. Ul'kov. Phys. Lett. A **227**, *3–4*, 255 (1997).
[14] R. Guida, J. Zinn-Justin. Nucl. Phys. B **489**, *3*, 626 (1997).
[15] А.И. Соколов. ФТТ **40**, *7*, 1284 (1998).
[16] A.I. Sokolov, E.V. Orlov. Phys. Rev. B **58**, *5*, 2395 (1998).
[17] A.I. Sokolov, E.V. Orlov, V.A. Ul'kov, S.S. Kashtanov. Phys. Rev. E **60**, *2*, 1344 (1999).
[18] A. Pelissetto, E. Vicari. Nucl. Phys. B **522**, *3*, 605 (1998).
[19] S.L. Zinn, S.N. Lai, M.E. Fisher. Phys. Rev. E **54**, *2*, 1176 (1996).
[20] P. Fonseca, A. Zamolodchikov. Препринт hep-th/0112167 (2001).
[21] R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii. Phys. Rev. B **62**, *18*, 12 195 (2000).
[22] Yu. Holovatch, D. Ivaneyko, B. Delamotte. J. Phys. A **37**, *11*, 3569 (2004).