

01;03

Параметрическая раскачка неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости на фоне неустойчивости Кельвина–Гельмгольца

© А.И. Григорьев, А.С. Голованов, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 26 апреля 2002 г.)

Рассмотрены особенности реализации неустойчивости капиллярно-гравитационных волн на заряженной плоской поверхности сред, когда верхняя среда движется параллельно границе раздела со скоростью, зависящей от времени, содержащей как постоянную, так и переменную во времени компоненты. Показано, что уравнение Матье–Хилла, описывающее временную эволюцию амплитуд капиллярных волн в такой системе, имеет неустойчивые решения при значениях физических параметров (напряженности электрического поля и скорости ветра), согласующихся с реально регистрируемыми в природных условиях при зажигании огней Св. Эльма.

1. Среди не полностью понятных проявлений грозового электричества числятся и огни Св. Эльма. На основе статистической обработки данных наблюдений этого феномена в природных условиях [1,2] можно прийти к выводу, что традиционная его интерпретация как мощной формы коронного разряда не совсем соответствует реальности: почти 80% описаний наблюдений огней Св. Эльма связывают их появление с электростатической неустойчивостью в грозовом электрическом поле заряженной пленки или капель воды, покрывающих предметы, в окрестности которых феномен наблюдается. Об этом же свидетельствуют и результаты различных экспериментов [3–6]. В связи со сказанным в [1,7] (см. также [2]) была предложена модель огней Св. Эльма, связывающая их появление с эмиссией во внешнем электрическом поле поверхностью жидкости высокодисперсных сильно заряженных капелек, в окрестности которых из-за наличия весьма интенсивного электрического поля собственного заряда и зажигается коронный разряд, обеспечивающий возникновение свечения. Характерный линейный размер языков свечения огней Св. Эльма определяется расстоянием, на которое улетают капельки, пока не погаснет коронный разряд в их окрестности.

Тем не менее теоретические оценки показывают, что реализация неустойчивости поверхности воды в электростатическом поле требует на порядок больших значений напряженности приземного электрического поля грозового облака, чем наблюдается в естественных условиях [8]. Согласно данным наблюдений [1,2], интенсивность огней Св. Эльма существенно возрастает с увеличением скорости ветра. Это наталкивает на мысль о возможной положительной роли неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в снижении критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости [9]. Однако полученное в [9] снижение критической величины напряженности внешнего электрического поля оказалось недостаточным. Не спас положения и учет

конечности слоя верхней среды [10], приводящей к появлению линейного взаимодействия волн и реализации дополнительной колебательной неустойчивости границы раздела сред. Остается исследовать влияние зависимости от времени скорости ветра, характерной для грозовой (штормовой) погоды, когда и наблюдаются огни Св. Эльма. Такая зависимость может привести, согласно [11,12], к реализации параметрической неустойчивости заряженной поверхности жидкости при значениях внешнего электрического поля, согласующихся с реалиями грозовой и штормовой погоды.

2. Будем решать задачу об устойчивости тангенциального разрыва двух несмешивающихся идеальных несжимаемых жидкостей различных плотностей ρ_1 и ρ_2 , каждая из которых заполняет в поле силы тяжести полубесконечное пространство, а верхняя жидкость движется с переменной во времени скоростью $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ параллельно границе раздела сред. Верхнюю жидкость (величины, относящиеся к ней, будем помечать индексом 1) примем диэлектрической с проницаемостью $\varepsilon_1 = \varepsilon$, а нижнюю идеально проводящей (величины относящиеся к ней будем помечать индексом 2). Под действием однородного электростатического поля \mathbf{E}_0 в верхней среде, направленного параллельно направлению ускорения свободного падения \mathbf{g} на невозмущенной плоской границе раздела сред, описываемой в декартовой системе координат уравнением $z = 0$ (орт $\mathbf{n}_z \parallel \mathbf{g}$, а орт $\mathbf{n}_x \parallel \mathbf{U}$), появится индуцированный поверхностный заряд, характеризующийся постоянной плотностью $\sigma = E_0/4\pi$. В силу теплового движения молекул в обеих средах будет иметь место капиллярное волновое движение весьма малой амплитуды ($\xi_0 \sim (kT/\alpha)^{1/2}$, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, α — коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред), приводящее к появлению возмущения границы раздела сред $\xi(x, t)$, так что уравнение границы раздела будет иметь вид $z = \xi(x, t)$.

Пусть потенциалы полей скоростей движения верхней и нижней жидкостей есть $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\psi_2(\mathbf{r}, t)$, а потенциал полного электрического поля — $\phi(\mathbf{r}, t)$. Тогда математическая формулировка задачи об исследовании временной эволюции амплитуд капиллярных волн примет вид [13,14]

$$\Delta\phi = 0; \quad \phi \equiv E_0 \cdot z + \varphi(\mathbf{r}, t); \quad (1)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \varphi \rightarrow 0; \quad (2)$$

$$z = \xi(x; t): \quad \varphi = \text{const}; \quad (3)$$

$$\Delta\psi_i = 0; \quad i = 1, 2; \quad (4)$$

$$z \Rightarrow -\infty \quad \psi_1 - x \cdot U(t) \Rightarrow \text{const} = 0; \quad (5)$$

$$z \Rightarrow \infty \quad \psi_2 \Rightarrow \text{const} = 0; \quad (6)$$

$$z = \xi(x; t): \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \approx U \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}; \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \approx \frac{\partial\xi}{\partial t}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \rho_1 g \xi + \frac{1}{2} \rho_1 [(\nabla\psi_1)^2 - U^2(t)] \\ = \rho_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \rho_2 g \xi + P_E - P_\alpha, \end{aligned} \quad (8)$$

k — волновое число; $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал электрического поля, генерируемого возмущением границы $\xi(x; t)$, имеющий тот же порядок малости; P_E — давление электрического поля на поверхность раздела сред, которое определяется при решении электростатической задачи (1)–(3) и имеет вид $P_E = 4\pi\sigma^2 k \xi$ [13]; $P_\alpha = \alpha \partial^2 \xi / \partial x^2$ — лапласовское давление под искаженной волновым движением поверхностью жидкости.

Зададимся целью вывести дифференциальное уравнение, описывающее временную эволюцию (в результате действия давления электрического поля и тангенциального разрыва поля скоростей на границе раздела сред) амплитуд фиксированных мод тепловых капиллярных волн. Учтем, что в соответствии с (5), (6) потенциалы полей скоростей в обеих средах, являющиеся решениями уравнений (4), при бесконечном удалении от границы раздела должны убывать до нуля. Это означает, согласно [12,13], что $\psi_1(\mathbf{r}, t) \sim \exp(kz)$, а $\psi_2(\mathbf{r}, t) \sim \exp(-kz)$. Это требование приводит к соотношениям

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = k\psi_1; \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = -k\psi_2. \quad (9)$$

Учтем теперь, что возмущение границы раздела, связанное с капиллярным волновым движением, должно иметь периодический вид

$$\xi \sim \exp(ikx), \quad (10)$$

и, подставляя (9), (10) в граничные условия (6), найдем

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{k} \left(U(t) \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t} \right) = \frac{1}{k} \left(ikU(t) \cdot \xi + \frac{\partial\xi}{\partial t} \right); \quad (11)$$

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{k} \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad (12)$$

i — мнимая единица.

Подставим теперь (11), (12) в (8) и в линейном по ξ приближении получим искомое дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию со временем амплитуд капиллярных волн,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2ikU(t) \frac{\rho_1}{(\rho_1 + \rho_2)} \frac{\partial \xi}{\partial t} + ik\rho \frac{\partial U(t)}{\partial t} \xi \\ + \frac{k}{(\rho_1 + \rho_2)} \left[g(\rho_1 - \rho_2) - k\rho_1 U^2(t) - 4\pi\sigma^2 k + \alpha k^2 \right] \xi = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

При $U(t) = U_0 = \text{const}$ уравнение (13) становится обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, описывающим временную эволюцию амплитуд капиллярных волн при реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца и Тонкса–Френкеля, и имеет решение

$$\begin{aligned} \xi = \xi_0 \text{Re} \left\{ \exp \left[ikU_0 t \frac{\rho_1}{(\rho_1 + \rho_2)} + it\omega(k) \right] \right\}; \\ \omega^2(k) \equiv \frac{k}{(\rho_1 + \rho_2)} \left[g(\rho_2 - \rho_1) + \alpha k^2 - k \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} U_0^2 - 4\pi\sigma^2 k \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Критические условия наступления неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца и Тонкса–Френкеля определяются из требования прохождения функции $\omega^2(k)$ через нуль в область отрицательных значений. При этом в (14) в показателе экспоненты перед $\omega^2(k)$ появляется $\pm i$ и (14) дает два решения: одно — периодическое экспоненциально затухающее, второе — периодическое экспоненциально нарастающее, которое при $\sigma = 0$ соответствует неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Если $U_0 = 0$, то из (14) получается два аperiodических решения, одно из которых, экспоненциально нарастающее, описывает поведение поверхности жидкости при неустойчивости Тонкса–Френкеля. В общем случае при $U_0 \neq 0$ и $\sigma \neq 0$ (14) описывает поведение границы раздела сред при комбинированной неустойчивости, когда играют роль и давление электрического поля, и аэродинамическое давление над возмущенной границей раздела сред.

3. Для дальнейшего исследования зададимся определенным общим видом зависимости скорости верхней среды от времени $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$, представляя ее в виде отрезка ряда Фурье,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 + \sum_{j=1}^m \mathbf{U}_{*j} \cos(j\omega_0 t); \\ (\mathbf{U}_0 \parallel \mathbf{U}_{*j}) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (13), получим для характеристики временной эволюции амплитуд капиллярных волн в описанной системе дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Для отыскания его решений

произведем замену искомой переменной

$$\xi = \zeta \exp(i\Phi(t));$$

$$\Phi = -k\rho \left[U_0 t + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j\omega_0} U_{*j} \sin(j\omega_0 t) \right];$$

$$\xi = \zeta \exp \left\{ ik\rho \left[U_0 t + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j\omega_0} U_{*j} \sin(j\omega_0 t) \right] \right\}.$$

В итоге (8) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi \left[\omega^2(k) - 2U_0 \chi \sum_{j=1}^m U_{*j} \cos(j\omega_0 t) \right. \\ \left. + \chi \sum_{j=1}^m U_{*j}^2 \cos^2(j\omega_0 t) \right] = 0; \\ \chi \equiv k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

4. Для проведения предварительного качественного анализа примем $m = 1$ и, преобразовывая (16), перепишем его в безразмерных переменных, в которых частота переменной компоненты скорости верхней среды ω_0 , плотность нижней среды ρ_2 и капиллярная постоянная нижней жидкости a приняты равными единице ($\alpha = \omega_0 = \rho_2 = 1$),

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi [\delta - 2\varepsilon \lambda \cos t + 2\varepsilon \cos 2t] = 0; \quad (17)$$

$$\omega_*^2 \equiv \frac{k\alpha}{(1 + \rho_1)} \left[(1 - \rho_1) + k^2 - k \frac{\rho_1}{(1 + \rho_1)} We - k\omega \right];$$

$$\delta \equiv \omega_*^2 + 2\varepsilon;$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4} U_*^2 \chi; \quad \lambda \equiv U_0 / U_*; \quad \chi \equiv k^2 \frac{\rho_1}{(1 + \rho_1)^2};$$

$$We \equiv U_0^2 / \alpha; \quad \omega \equiv 4\pi\sigma^2 / \alpha.$$

Параметр δ характеризует частоту капиллярных колебаний. За всеми физическими величинами оставлены прежние обозначения.

В принятых обозначениях область реализации неустойчивостей Тонкса–Френкеля и Кельвина–Гельмгольца (в отсутствии параметрических колебаний), согласно вышесказанному, выделяется условием $\delta < 2\varepsilon$.

4а. В частном случае $U_0 = 0$ уравнение (17) переходит в классическое уравнение Маттье, границы нескольких первых зон неустойчивости решений которого, рассчитанных методом растянутых параметров [15], путем разложения по безразмерному параметру ε , который для асимптотических расчетов можно принять малым (хотя в общем случае ε может принимать как угодно большие значения [16]), приведены на рис. 1. Видно, что вершины зон неустойчивости начинаются на оси абсцисс при целочисленных значениях параметра $\delta^{1/2}$, т.е. при $\delta^{1/2} = n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.

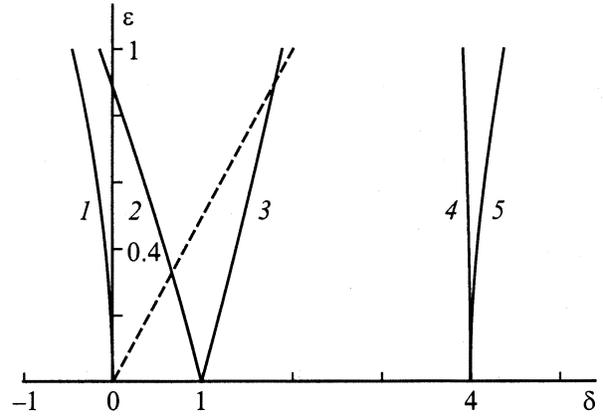


Рис. 1. Границы зон неустойчивости в плоскости параметров δ и ε для уравнения Маттье (уравнения (17) при $\lambda = 0$).

Неустойчивым по отношению к параметрической раскачке состояниям на плоскости $(\delta; \varepsilon)$ соответствует область, лежащая левее кривой 1, а также области между кривыми 2 и 3, 4 и 5. Состояния с параметрами δ и ε , лежащими между кривыми 1 и 2, 3 и 4, устойчивы. Как показывает прямой расчет по уравнению (17) при $\lambda = 0$ (при $U_0 = 0$), также устойчивы состояния в области значений параметров δ и ε между кривой 1, уравнение которой в четвертом порядке приближений по ε имеет вид

$$n = 0: \quad \delta = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{7}{128} \varepsilon^4 - \dots,$$

и пунктирной прямой $\delta = 2\varepsilon$, левее которой должна реализовываться неустойчивость Тонкса–Френкеля. Таким образом, имеет место подавление этой неустойчивости параметрическими колебаниями поверхности, поскольку неустойчивость Кельвина–Гельмгольца при $U_0 = 0$ не имеет места.

Границы следующих двух зон (для $n = 1$ и $n = 2$) неустойчивости уравнения Маттье во втором порядке приближений по ε определяется соотношениями [15,17]

$$n = 1:$$

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\varepsilon}{\delta} \right) + \frac{7}{32} \left(\frac{2\varepsilon}{\delta} \right)^2 \ll \delta \ll 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\varepsilon}{\delta} \right) + \frac{7}{32} \left(\frac{2\varepsilon}{\delta} \right)^2;$$

$$n = 2:$$

$$4 + \frac{2}{3} \left(\frac{2\varepsilon}{\delta} \right)^2 - \left(\frac{2\varepsilon}{\delta} \right)^2 \ll \delta \ll 4 + \frac{2}{3} \left(\frac{2\varepsilon}{\delta} \right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon}{\delta} \right)^2. \quad (18)$$

В этих выражениях $\delta^{1/2}$ имеет смысл частоты капиллярных волн. Если нижнюю жидкость считать не идеальной, а маловязкой с коэффициентом кинематической вязкости ν , декремент затухания капиллярных волн в которой определяется известным выражением $\gamma \equiv 2\nu k^2$ [14] (условие малой вязкости имеет вид $\gamma \ll 1$) то в (17) учет вязкости сведется к добавлению

слагаемого, пропорционального первой производной: $\gamma(\partial\xi/\partial t)$ [17]. Это приводит к появлению порога по амплитуде переменной компоненты скорости U_* или в обозначениях (17) по величине ε , начиная с которой может реализоваться параметрическая неустойчивость. Высота такого порога растет с увеличением номера зоны неустойчивости n . Для зон $n = 1$ и $n = 2$ критические значения ε определяются (в тех же безразмерных переменных) соотношениями [17]

$$\begin{aligned} n = 1: \quad & \varepsilon/\delta > 2\gamma; \\ n = 2: \quad & \varepsilon/\delta > (2\gamma)^{1/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Оценим возможность одновременного выполнения условий (18) и (19) для системы вода–воздух, для которой $\rho_1/\rho_2 \approx 10^{-3}$, $\nu = 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$, $\alpha = 72 \text{ dyn/cm}$.

Для самой широкой по ε зоны (с $n = 1$), согласно (18), должно выполняться условие $\delta \approx \omega_0^2$ или в размерном виде

$$\omega_*^2 + 2\varepsilon \approx \omega_0^2. \quad (20)$$

Из условия (19) для $n = 1$ аналогично в размерном виде получим, используя (20),

$$\varepsilon > 2(\omega_*^2 + 2\varepsilon)\gamma/\omega_0 \cong 2\gamma\omega_0$$

или, еще раз используя (20),

$$\varepsilon^2 > 4\gamma^2(\omega_*^2 + 2\varepsilon).$$

Рассматривая получившееся соотношение как алгебраическое уравнение относительно ε , несложно найти его единственный положительный корень

$$\varepsilon > \gamma[\gamma + (\gamma^2 + \omega_*^2)^{1/2}]. \quad (21)$$

Проанализируем условие (21), имея в виду, что для системы вода–воздух величина декремента для волнового числа $k = a^{-1}$, где a — капиллярная постоянная воды, определяется соотношением $\gamma \approx 0.2 \text{ s}^{-1}$. Что касается частоты капиллярных колебаний жидкости ω_* , то ее величина, согласно (17), при $We \approx 0$ зависит от величины поверхностной плотности индуцированного внешним электростатическим полем заряда σ (величины параметра ω). Когда ω близко к критическому значению в смысле возможности реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля, ω_*^2 близко к нулю, поскольку, согласно вышесказанному, критические условия реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля определяются условием $\omega_*^2 \leq 0$. В таком случае в (21) γ^2 и ω_*^2 имеют один порядок величины. Примем для определенности $\omega_*^2 = 3\gamma^2$ и из (21) получим $\varepsilon = 3\gamma^2$. Или, переходя в соответствии с (17) от ε к скорости U_* , перепишем это условие в виде $U_* \approx 7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Таким образом, параметрическая неустойчивость заряженной поверхности жидкости может быть вызвана, согласно (20), переменной компонентой ветра с частотой ω_0 , определяющейся соотношением $\omega_0^2 = 3\gamma^2 + 6\gamma^2$ или $\omega_0 = 3\gamma \approx 0.6 \text{ s}^{-1}$.

Примерно такой порядок величины и имеет частота пульсаций ветра в условиях развитой конвекции [18]. Амплитуда пульсаций при этом может быть достаточно малой $U_* \sim 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Проведенная оценка справедлива для малых частот капиллярных волн, которые могут иметь место лишь при очень больших напряженностях внешнего электростатического поля, предельных в смысле возможности реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля, измеряемых десятками киловольт на сантиметр. Поля такой величины у поверхности земли в грозовую погоду не наблюдаются. Да и внутри грозовых облаков такие поля отмечаются крайне редко [8]. Иначе говоря, рассмотренный канал зажигания огней Св. Эльма маловероятен.

Рассмотрим другую крайнюю ситуацию, когда напряженность грозового электрического поля у поверхности земли мала. Пусть для определенности она на порядок меньше, чем требуется для реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля. Тогда частота гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости ω_* от напряженности электрического поля будет зависеть весьма слабо, а определится ускорением свободного падения и величиной коэффициента поверхностного натяжения. Для $k = a^{-1}$ частота капиллярных волн будет порядка сотни герц ($\omega_* \approx 70 \text{ s}^{-1}$). Это означает, что неравенство $\omega_*^2 \gg \gamma^2$ будет выполняться с большим запасом. Тогда из (21) несложно получить $\varepsilon \approx \gamma\omega_*$. При переходе к размерным переменным это условие приведет к критическому для реализации неустойчивости поверхности жидкости амплитудному значению переменной компоненты скорости верхней среды $U_* \approx 1 \text{ m/s}$ при частоте пульсаций $\omega_0 \approx 70 \text{ s}^{-1}$. Появление подобной компоненты ветра может быть связано с мелкомасштабной турбулизацией атмосферы, связанной, например, с дождем.

Следует указать, что обсуждаемая неустойчивость может реализовываться различным образом в зависимости от конкретных значений параметров δ и ε , как это видно из рис. 2, на котором приведены результаты прямого расчета по уравнению (17) в различных точках плоскости (δ, ε) .

4b. Пусть теперь постоянная компонента скорости U_0 отлична от нуля (т. е. в (17) $\lambda \neq 0$). Считая безразмерный параметр ε малым, можно рассчитать методом растянутых параметров, подробно описанным в [15], положения нескольких первых зон неустойчивости решений полного уравнения (17). Уравнения граничных кривых для трех первых зон неустойчивости имеют вид

$$\begin{aligned} Ce_0 &= \left(-\frac{1}{2} - 2\lambda^2\right)\varepsilon^2 - 3\lambda^2\varepsilon^3 + \left(\frac{7}{128} - \frac{20\lambda^2}{9} + \frac{7\lambda^2}{2}\right)\varepsilon^4; \\ Ce_1 &= 1 - \varepsilon + \left(-\frac{1}{8} + \frac{5\lambda^2}{3}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{64} + \frac{121\lambda^2}{36}\right)\varepsilon^3 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{1536} + \frac{6233\lambda^2}{2880} - \frac{763\lambda^4}{216}\right)\varepsilon^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Se_1 &= 1 + \varepsilon + \left(-\frac{1}{8} - \frac{\lambda^2}{3}\right) \varepsilon^2 + \left(-\frac{1}{64} - \frac{7\lambda^2}{36}\right) \varepsilon^3 \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{1536} - \frac{217\lambda^2}{2880} + \frac{5\lambda^4}{216}\right) \varepsilon^4; \\
 Ce_2 &= 4 + \left(\frac{5}{12} + \frac{2\lambda^2}{15}\right) \varepsilon^2 - \frac{31}{90} \lambda^2 \varepsilon^3 \\
 &\quad + \left(-\frac{763}{13824} + \frac{58\lambda^2}{1575} + \frac{433\lambda^4}{13500}\right) \varepsilon^4; \\
 Se_2 &= 4 + \left(-\frac{1}{12} + \frac{2\lambda^2}{15}\right) \varepsilon^2 + \frac{19}{90} \lambda^2 \varepsilon^3 \\
 &\quad + \left(\frac{5}{13824} + \frac{142\lambda^2}{1575} - \frac{317\lambda^4}{13500}\right) \varepsilon^4. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Здесь функция Ce_n определяет правую границу зоны неустойчивости с номером n , а функция Se_n — левую. Ограничение на применимость соотношений (22)

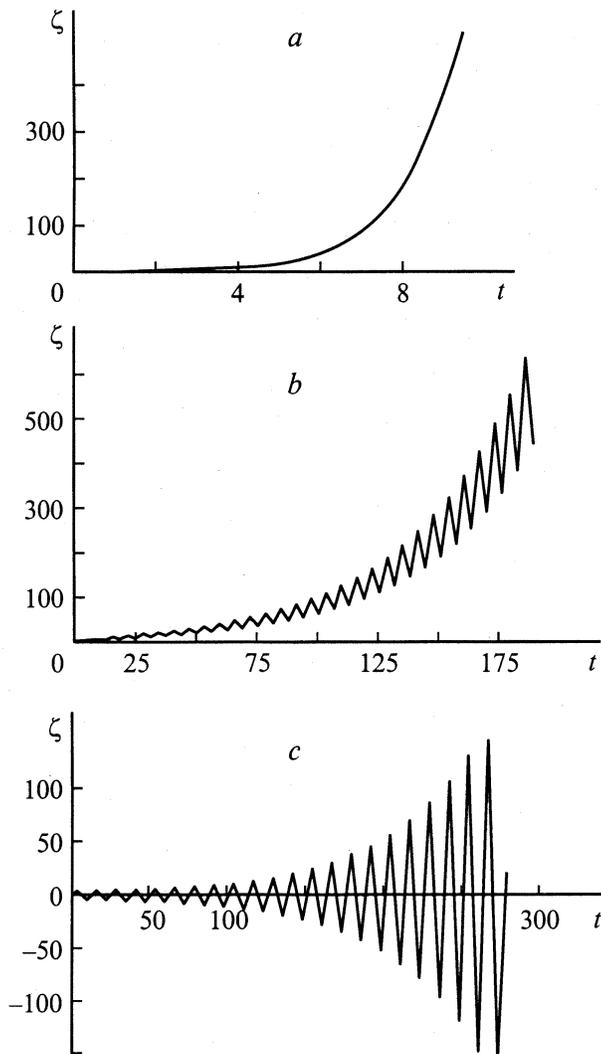


Рис. 2. Возможные временные зависимости неустойчивых решений уравнения (17) при $\lambda = 1$: а) $\delta = -0.5$, $\varepsilon = 0.1$; б) $\delta = -0.03$, $\varepsilon = 0.1$; в) $\delta = 1$, $\varepsilon = 0.2$.

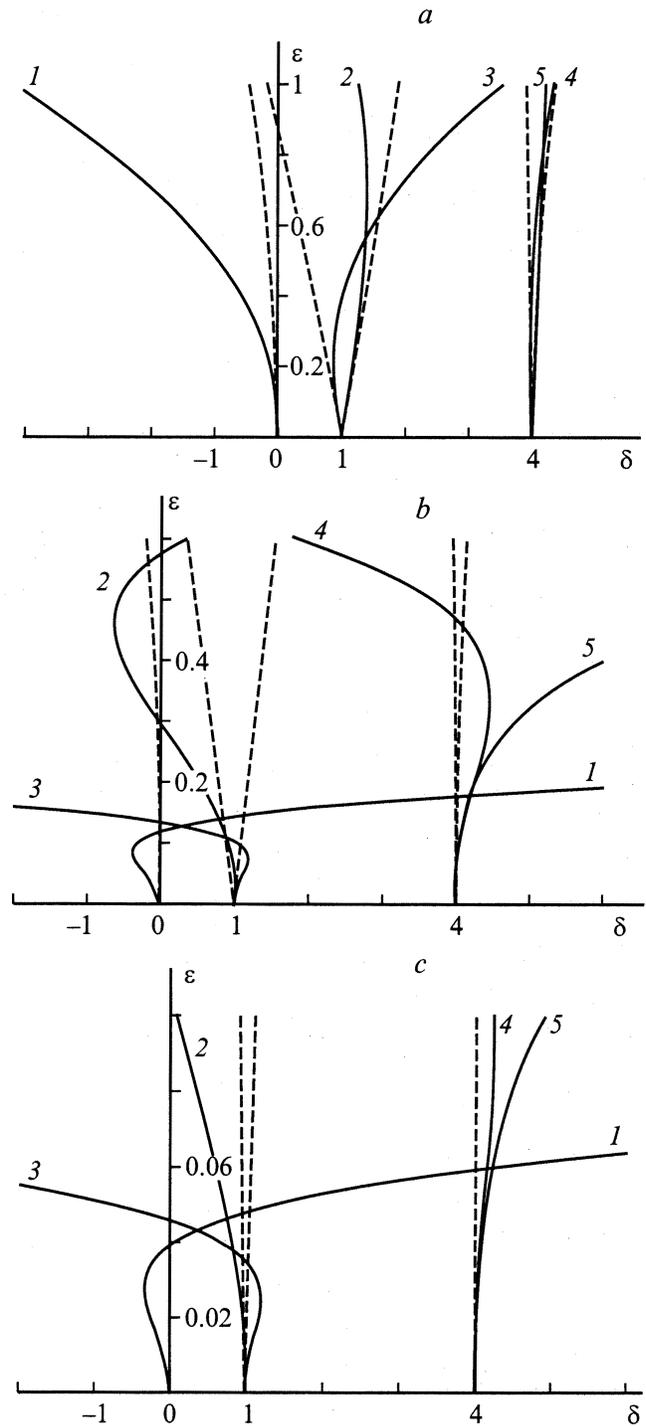


Рис. 3. То же, что на рис. 1, для уравнения (17) при разных λ : а) — 1; б) — 7; в) — 20.

в соответствии с требованиями теории приближений накладывается условием $\lambda\varepsilon \ll 1$.

Результаты численных расчетов формы зон неустойчивости по соотношениям (22) при различных значениях параметра λ приведены на рис. 3. Видно, что наличие в (17) двух косинусов приводит к деформации границ зон, в которых существуют неустойчивые решения,

вплоть до их пересечения. Степень деформации зон зависит от величины параметра λ . Прямые расчеты по уравнению (17) показывают, что при пересечении левой и правой границ одной зоны решения, соответствующие значениям δ и ε , расположенным выше точки пересечения решения уравнения (17), становятся устойчивыми. Области же значений параметров ε и δ , при которых (17) имеет неустойчивые решения, становятся замкнутыми (кроме, естественно, нулевой зоны, ограниченной лишь с одной стороны). Другими словами, имеет место стабилизация параметрической неустойчивости из-за взаимодействия периодически зависящих от времени коэффициентов уравнения (17). Из рис. 3 несложно видеть, что по мере увеличения параметра λ (по мере увеличения постоянной компоненты скорости верхней среды U_0) размеры зон параметрической стабилизации неустойчивостей уменьшаются. Таким образом, наличие постоянной и переменной компонент скорости верхней среды дестабилизирует границу раздела, расширяя область значений параметров δ и ε , в которой граница раздела сред неустойчива.

Интересно, что по мере увеличения U_0 имеет место не только перекрытие левой и правой границ зон параметрической устойчивости, но перекрываются граничные кривые соседних зон, приводя к расширению области значений параметров δ и ε , в которой граница раздела сред неустойчива, как это видно из рис. 3, *b, c*. В первую очередь сказанное относится к границе нулевой зоны, которая, загибаясь вправо, пересекает и первую и вторую зоны. Неустойчивые решения будут реализовываться при δ и ε , лежащих слева и сверху от границы нулевой зоны на рис. 3, *b, c* (естественно, в пределах применимости проведенных расчетов $\varepsilon\lambda < 1$).

Загиб нулевой зоны вправо, кроме того, приводит и к ограничению по ε сверху для зон существования параметрической стабилизации при $\delta > 0$ в силу того, что проведенные расчеты справедливы лишь в области $\varepsilon\lambda < 1$ (хотя на рисунках для наглядности граничные кривые приведены в большем диапазоне значений ε). Так, видно, что при $\lambda \geq 7$ условие $\varepsilon\lambda < 1$ практически уничтожает область стабилизации.

5. Примем теперь в (16) $m = 2$ и посмотрим, какой будет тенденция изменения контуров зон неустойчивости получившегося уравнения. Примем для простоты, что $U_{*1} = U_{*2} = U_*$. Тогда уравнение (16) во введенных безразмерных переменных переписется в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi [\delta - 2\varepsilon\lambda(\cos t + \cos 2t) + 0.5\varepsilon(\cos 2t + \cos 4t)] = 0, \quad (23)$$

где параметр δ и граница области реализации неустойчивостей Тонкса–Френкеля и Кельвина–Гельмгольца немного изменятся: $\delta \equiv \omega_*^2 + \varepsilon$.

На рис. 4 приведены рассчитанные по (19) при различных значениях параметра λ контуры зон неустойчивости. Из сравнения с рис. 2 видно, что увеличение количества

учитываемых в (15) гармоник приводит к увеличению деформации контуров зон параметрической неустойчивости и расширению геометрического места точек (в пространстве значений ε, δ), где неустойчивость реализуется. Это подтверждается и рис. 5, на котором приведены рассчитанные контуры зон неустойчивости при учете четырех первых ($m = 4$) гармоник из (15).

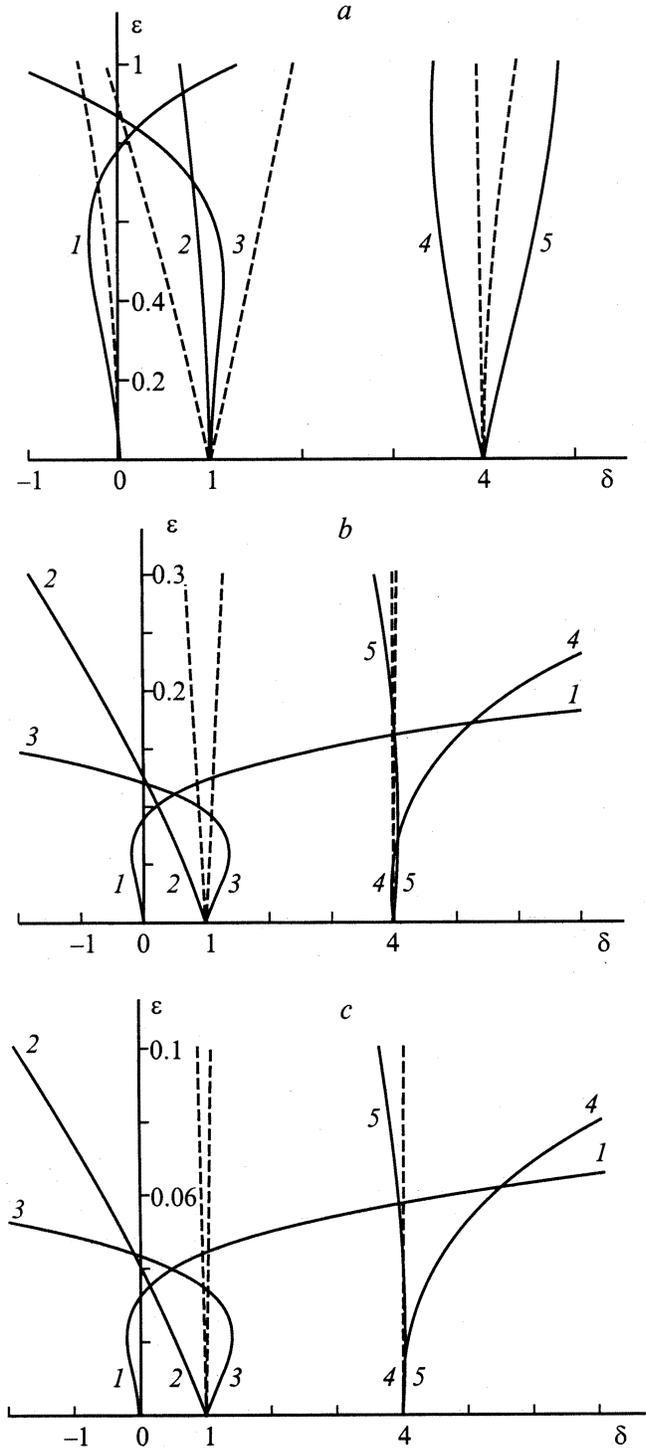


Рис. 4. То же, что на рис. 1 для уравнения (19) при разных $\lambda_1 = \lambda_2$: *a* — 1; *b* — 7; *c* — 20.

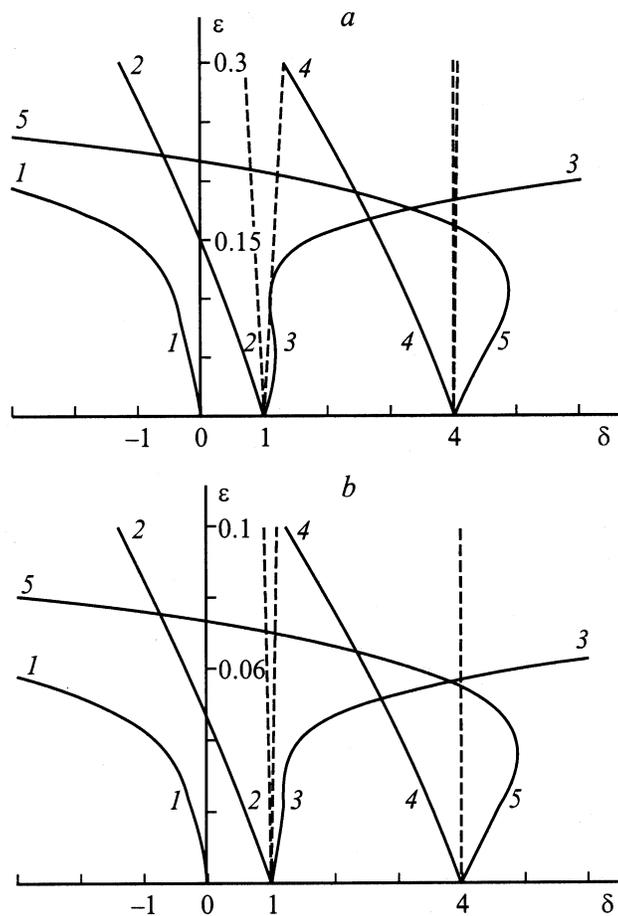


Рис. 5. То же, что на рис. 1, для уравнения (16) при разных $\lambda_1 = \lambda_2$: $a - 7$; $b - 20$.

Из рис. 3–5 видно, что степень деформации границ зон параметрической неустойчивости увеличивается с ростом количества гармоник в соотношении (15). Размеры зон реализации параметрической неустойчивости увеличиваются с ростом отношения постоянной компоненты скорости верхней среды к переменной.

6. Вышеприведенное рассмотрение было привязано к исследованию условий возникновения огней Св. Эльма. Тем не менее приведенные рассуждения применимы к истолкованию еще одного не до конца понятного природного феномена – генерации волн на поверхности водоема под влиянием ветра. Традиционно феномен раскачки ветром волн связывается с действием неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца и Майлза [19,20]. Обе эти неустойчивости связаны с движением с постоянной скоростью верхней среды параллельно границе раздела сред в двухслойной системе несмешивающихся жидкостей, подверженной действию сил тяжести. Влияние переменной компоненты ветра и возможность параметрической раскачки волн не учитываются, хотя в соответствии с проведенными расчетами такое влияние может быть существенным.

Заключение

Уравнение Матве–Хилла, описывающее временную эволюцию амплитуд капиллярных волн на заряженной границе раздела двух сред, верхняя из которых движется относительно более плотной нижней со скоростью, зависящей от времени, имеет неустойчивые решения, связанные как с реализацией неустойчивостей Тонкса–Френкеля и Кельвина–Гельмгольца, так и с параметрической неустойчивостью, характерной для уравнения Матве–Хилла. Наличие движения верхней среды параллельно границе раздела со скоростью, зависящей от времени, приводит к дестабилизации поверхности жидкости и снижению критического значения напряженности внешнего электростатического поля до значений, регистрируемых у поверхности Земли во время гроз, при которой зажигаются огни Св. Эльма.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ 00-15-9925).

Список литературы

- [1] Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryayeva S.O. // J. Sci. Exploration. 1991. Vol. 5. N 2. P. 1–28.
- [2] Григорьев А.И. // СОЖ. 2000. Т. 6. № 6. С. 37–43.
- [3] Войцеховский Б.В., Войцеховский Б.Б. // Письма ЖЭТФ. 1976. Т. 23. Вып. С. 37–39.
- [4] Войцеховский Б.Б. // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 1. С. 84–88.
- [5] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // Письма в ЖТФ. 1985. Т. II. Вып. 3. С. 182–187.
- [6] Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 1985. Т. II. Вып. 16. С. 1004–1009.
- [7] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 7. С. 1276–1283.
- [8] Мазина И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
- [9] Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 2. С. 23–34.
- [10] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 3. С. 9–16.
- [11] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 1. С. 24–26.
- [12] Григорьев А.И., Голованов А.С. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 20. С. 13–18.
- [13] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [14] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [15] Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
- [16] Справочник по спецфункциям/ Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 831 с.
- [17] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
- [18] Тверской П.Н. Курс метеорологии. Л.: Гидрометеоздат, 1962. 700 с.
- [19] Miles J.W. // J. Fluid Mech. 1993. Vol. 256. P. 427–441.
- [20] Кузнецов Е.А., Лушников П.М. // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. Вып. 2. С. 614–630.