

01;03

Неустойчивость сферической заряженной капли, движущейся параллельно внешнему электростатическому полю

© В.А. Коромыслов, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 13 февраля 2002 г.)

Показано, что при совместном действии на поверхность капли давления электростатического поля собственного и поляризованного зарядов и аэродинамического давления ламинарно обтекающей каплю при ее движении потока газа имеет место снижение критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности капли. Рассчитан спектр капиллярных осцилляций капли в указанных условиях. Найдено, что при различных значениях заряда, напряженности поля и скорости колебательная неустойчивость поверхности капли реализуется за счет взаимодействия различных мод: второй и третьей, второй и четвертой, третьей и пятой.

В разнообразных задачах технической физики, геофизики и технологии приходится сталкиваться с заряженными каплями, движущимися относительно среды во внешнем электростатическом поле [1–3], и вопрос об устойчивости таких капель представляет значительный интерес. Согласно экспериментальным данным [4], обдувание обводненной градины потоком воздуха снижает критическую для зажигания коронного разряда величину напряженности внешнего электростатического поля. В теоретических расчетах [5,6] показано, что движение заряженной капли относительно окружающей среды приводит к снижению устойчивости капли по отношению к собственному заряду из-за наличия на границе раздела тангенциального разрыва поля скоростей. Более общая задача об исследовании капиллярных осцилляций и устойчивости заряженной капли, движущейся относительно среды в однородном электростатическом поле, пока нерешена, хотя и представляет большой интерес.

1. Будем решать задачу об отыскании критических условий неустойчивости заряженной поверхности сферической капли радиуса R идеальной идеально проводящей несжимаемой жидкости с плотностью ρ_z , имеющей заряд Q и находящейся в однородном электростатическом поле с напряженностью E_0 , движущейся вдоль E_0 с постоянной скоростью U относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды, имеющей плотность ρ_1 и диэлектрическую проницаемость ϵ . Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред обозначим σ .

Волновые движения в окружающей среде и в капле будем считать гармоническими потенциальными с потенциалами скоростей Ψ_1 и Ψ_2 соответственно. Искажение границы раздела сред $\xi(\mathbf{r}, t)$, появляющееся из-за теплового движения молекул, будем считать осесимметричным и малым $|\xi(\Theta, t)/R| \ll 1$. Рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре капли в линейном приближении по $|\xi/R|$.

Предположение о сферичности капли, позволяющее существенно снизить степень громоздкости предстоящих расчетов, введено из следующих соображений.

Известно [7], что покоящаяся в однородном электростатическом поле капля электропроводной жидкости принимает форму, близкую к вытянутому вдоль поля сфероиду. Давление ламинарно обтекающей каплю потока действует в обратном направлении: приводит к сплющиванию капли вдоль потока, поскольку в силу уравнения Бернулли снижение давления из-за увеличения скорости достигает наибольшего значения в окрестности экваториальной области капли. В ситуации, когда направление движения капли коллинеарно направлению напряженности внешнего электростатического поля, две упомянутые тенденции могут скомпенсировать друг друга, и капля будет иметь форму, близкую к сферической.

Для упрощения расчетов введем безразмерные переменные, в которых $R = 1$, $\sigma = 1$, $\rho_2 = 1$. Тогда все остальные физические величины, входящие в формулировку задачи (за которыми оставим обычные обозначения), будут выражены в единицах своих характерных значений

$$\begin{aligned} r_* = R, \quad t_* = R^{3/2} \rho_2^{1/2} \sigma^{-1/2}, \quad U_* = R^{-1/2} \rho_2^{-1/2} \sigma^{1/2}, \\ P_* = R^{-1} \sigma, \quad Q_* = R^{3/2} \sigma^{1/2}, \\ E_* = R^{-1/2} \sigma^{1/2}, \quad \rho_1/\rho_2 \equiv \rho. \end{aligned}$$

Уравнение возмущенной поверхности капли запишется в виде

$$r(\Theta, t) = 1 + \xi(\Theta, t).$$

Математическая формулировка обсуждаемой задачи имеет вид

$$\Delta \Phi = 0, \quad \Delta \Psi_i = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

$$r = 0: \quad \Phi = \text{const}, \quad \nabla \Psi_2 = 0, \quad (2)$$

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \Theta} \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial r}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}, \quad (4)$$

$$-\rho \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\nabla \Psi_1)^2 - P_E + P_\sigma = 0, \quad (5)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi \rightarrow -E_0 r, \quad \nabla \Psi_1 \rightarrow \mathbf{U}, \quad (6)$$

$\Phi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал электрического поля; $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$ — потенциалы поля скоростей во внешней среде и капле соответственно; $\mathbf{n}_z \parallel \mathbf{E}_0$; $P_\sigma = P_\sigma^0 + P_\sigma(\xi)$ — давление сил поверхностного натяжения; $P_E = P_E^0 + P_E(\xi)$ — давление электрического поля на поверхности капли, расчет которого приведен в Приложении; величины P_E^0 и P_σ^0 имеют нулевой порядок малости, а $P_E(\xi)$ и $P_\sigma(\xi)$ первый порядок малости по $|\xi/R|$.

2. Решение уравнений Лапласа (1) для потенциалов скоростей $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$, $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$ с учетом граничных условий (2), (6) и возмущение $\xi(\Theta, t)$ будем искать в виде разложения по нормированным осесимметричным сферическим функциям $Y_n(\mu)$

$$\begin{aligned} \Psi_1(\mathbf{r}, t) &= \varphi(\mathbf{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-(n+1)} Y_n(\mu) \exp(St), \\ \Psi_2(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n Y_n(\mu) \exp(St), \\ \xi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} Z_n Y_n(\mu) \exp(St), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mu \equiv \cos \Theta$; S — комплексная частота; амплитуды разложения A_n , B_n , Z_n — постоянные коэффициенты, имеющие один порядок малости; $\varphi(\mathbf{r})$ — потенциал поля скоростей внешней среды в окрестности невозмущенной сферической поверхности.

Суммирование в разложении для ξ начинается с $n = 2$, так как нулевая мода соответствует радиальным осцилляциям, невозможным в несжимаемой жидкости, и, следовательно, $Z_0 = 0$; первая же мода соответствует трансляционному движению капли и в системе отсчета, связанной с центром масс капли, используемой в настоящем рассмотрении, $Z_1 = 0$.

Градиент $\varphi(\mathbf{r})$ дает выражение для поля скоростей невозмущенного потока идеальной жидкости в окрестности сферы [8]

$$\mathbf{V} = \nabla \varphi = -\frac{R^3}{2r^3} [3\mathbf{n}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{U}] + \mathbf{U},$$

\mathbf{n} — вектор нормали к поверхности сферической капли.

Согласно вышесказанному, направление скорости \mathbf{U} совпадает с направлением орта \mathbf{n}_z в декартовой системе координат. Учитывая, что $\mathbf{e}_z \equiv \mathbf{e}_r \cos \Theta - \mathbf{e}_\Theta \sin \Theta$, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_r$, запишем выражение для скорости течения жидкости в окрестности сферической капли в виде

$$\mathbf{V} = U \cos \Theta \left[1 - \frac{R^3}{r^3} \right] \mathbf{e}_r - U \sin \Theta \left[1 + \frac{R^3}{2r^3} \right] \mathbf{e}_\Theta. \quad (8)$$

Подставляя выражения (7), (8) в граничные условия (3)–(5) и используя рекуррентное соотношение [9]

$$\begin{aligned} \sin \Theta \frac{\partial Y_n}{\partial \Theta} &= \frac{n(n+1)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} Y_{n+1} \\ &\quad - \frac{n(n+1)}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}} Y_{n-1}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} r = 1: \quad \sum_n S Z_n Y_n(\mu) \exp(St) \\ - \frac{3}{2} U \sum_n Z_n \left(\frac{n(n+1)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} Y_{n+1} \right. \\ \left. - \frac{n(n+1)}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}} Y_{n-1} \right) \exp(St) \\ + \sum_n (n+1) A_n Y_n(\mu) \exp(St) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sum_n S Z_n Y_n(\mu) \exp(St) = \sum_n n B_n r^n Y_n(\mu) \exp(St), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -\rho S \sum_n A_n Y_n \exp(St) + S \sum_n B_n Y_n \exp(St) - P_E(\xi) \\ + P_\sigma(\xi) + 3\rho U \sum_n A_n \left[\frac{n(n+1)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} Y_{n+1} \right. \\ \left. - \frac{n(n+1)}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}} Y_{n-1} \right] \exp(St) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где было учтено, что

$$\begin{aligned} r = 1: \quad \nabla \Psi_1 = \left[-\sum_n A_n (n+1) Y_n(\mu) \exp(St) \right] \mathbf{e}_r \\ + \left[-\frac{3}{2} U \sin \Theta + \sum_n A_n \frac{\partial Y_n}{\partial \Theta} \exp(St) \right] \mathbf{e}_\Theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \Psi_1)^2 &\approx \frac{9}{4} U^2 \sin^2 \Theta \\ &\quad - 3U \sum_n A_n \left[\frac{n(n+1)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} Y_{n+1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{n(n+1)}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}} Y_{n-1} \right] \exp(St). \end{aligned}$$

Выражение для добавки к лапласовскому давлению $P_\sigma(\xi)$, связанной с отклонением формы капли от сферической, записывается в виде [10]

$$P_\sigma(\xi) = \sum_n (n-1)(n+2) Z_n Y_n(\mu) \exp(St).$$

Выражение же для давления электрического поля на возмущенную капиллярным волновым движением

поверхность капли $P_E(\xi)$ выведено в Приложении. Подставляя выражения $P_E(\xi)$ и $P_\sigma(\xi)$ в (9)–(11), умножая (9)–(11) на $Y_m(\mu)$ и интегрируя по углу Θ , получим систему однородных уравнений относительно амплитуд A_n, B_n, Z_n

$$SZ_n - \frac{3}{2} U(\alpha_n Z_{n-1} - \beta_n Z_{n+1}) + (n+1)A_n = 0, \quad (12)$$

$$SZ_n = nB_n, \quad (13)$$

$$-\rho SA_n + SB_n + 3\rho U[\alpha_n A_{n-1} - \beta_n A_{n+1}] + P_\sigma - P_E = 0,$$

$$\alpha_n \equiv \frac{n(n-1)}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}, \quad \beta_n \equiv \frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}. \quad (14)$$

Из (12) и (13) несложно найти

$$A_n = \frac{1}{(n+1)} \left\{ \frac{3}{2} U(\alpha_n Z_{n-1} - \beta_n Z_{n+1}) - SZ_n \right\},$$

$$B_n = \frac{1}{n} SZ_n.$$

Подставив эти соотношения в выражение (14), получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений для отыскания амплитуд капиллярных колебаний капли

$$\begin{aligned} & [WeK_n - wT_n]Z_{n-2} - [\rho USL_n + \sqrt{wWF_n}]Z_{n-1} \\ & + \{\chi_n S^2 - WeM_n + \gamma_n\}Z_n - [\rho USI_n + \sqrt{wWX_n}]Z_{n+1} \\ & + [WeJ_n - wG_n]Z_{n+2} = 0, \end{aligned}$$

$$We \equiv \rho U^2, \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}, \quad w = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi},$$

$$K_n \equiv \frac{9\alpha_n \alpha_{n-1}}{2n}, \quad L_n \equiv \frac{(9n+6)\alpha_n}{2n(n+1)},$$

$$T_n \equiv 9 \frac{n(n-1)(n-2)}{\sqrt{(2n-3)(2n-1)^2(2n+1)}},$$

$$F_n \equiv 3 \frac{n(2n-3)}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}, \quad \chi_n \equiv \frac{\rho}{(n+1)} + \frac{1}{n},$$

$$\gamma_n \equiv (n-1)[n+2-W] - w\lambda_n, \quad M_n \equiv \frac{9\alpha_n \beta_{n-1}}{2n} + \frac{9\beta_n \alpha_{n+1}}{2(n+2)},$$

$$I_n \equiv \frac{(9n+12)\beta_n}{2(n+1)(n+2)},$$

$$\lambda_n \equiv 9 \left(\frac{n^3}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{(n+1)^2(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{4n(n+1)-2}{(2n-1)(2n+3)} \right),$$

$$X_n \equiv 3 \frac{(n+1)(2n-1)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}, \quad J_n \equiv \frac{9\beta_n \beta_{n+1}}{2(n+2)},$$

$$G_n \equiv 9 \frac{n(n+1)(n+2)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)^2(2n+5)}}. \quad (15)$$

Здесь переменные We, W, w определяют соответственно параметры Вебера, Рэлея и Тейлора.

Необходимым и достаточным условием существования решения однородной системы (15) является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при искомым амплитудах Z_n ,

$$\begin{vmatrix} \chi_2 S^2 - WeM_2 + \gamma_2 & \rho USI_2 - (wW)^{1/2} X_2 & WeJ_2 - wG_2 & 0 & \dots \\ -\rho USL_3 - (wW)^{1/2} F_3 & \chi_3 S^2 - WeM_3 + \gamma_3 & \rho USI_3 - (wW)^{1/2} X_3 & WeJ_3 - wG_3 & \dots \\ WeK_4 - wT_4 & -\rho USL_4 - (wW)^{1/2} F_4 & \chi_4 S^2 - WeM_4 + \gamma_4 & \rho USI_4 - (wW)^{1/2} X_4 & \dots \\ 0 & WeK_5 - wT_5 & -\rho USL_5 - (wW)^{1/2} F_5 & \chi_5 S^2 - WeM_5 + \gamma_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Соотношение (16) является дисперсионным уравнением, определяющим спектр капиллярных колебаний капли в зависимости от безразмерных физических параметров W, w и We . При варьировании этих величин изменяется спектр капиллярных колебаний и при определенных значениях W, w и We некоторые из решений S_n^2 могут перейти через нуль и стать отрицательными. При выполнении этого условия амплитуды соответствующих капиллярных колебаний будут экспоненциально расти со временем, т.е. капля станет неустойчивой и распадется по закону, описанному в [11]. Условием появления нулевых решений дисперсионного уравнения является обращение в нуль свободного коэффициента дисперсионного уравнения (16)

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 - WeM_2 & -(wW)^{1/2} X_2 & WeJ_2 - wG_2 & 0 & 0 & \dots \\ -(wW)^{1/2} F_3 & \gamma_3 - WeM_3 & -(wW)^{1/2} X_3 & WeJ_3 - wG_3 & 0 & \dots \\ WeK_4 - wT_4 & -(wW)^{1/2} F_4 & \gamma_4 - WeM_4 & -(wW)^{1/2} X_4 & WeJ_4 - wG_4 & \dots \\ 0 & WeK_5 - wT_5 & -(wW)^{1/2} F_5 & \gamma_5 - WeM_5 & -(wW)^{1/2} X_5 & \dots \\ 0 & 0 & WeK_6 - wT_6 & -(wW)^{1/2} F_6 & \gamma_6 - WeM_6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Система (15) бесконечная и определители (16) и (17) также будут иметь бесконечно большой порядок. Поэтому критические условия появления неустойчивости капиллярных колебаний (т.е. критическую зависимость между W, w, We) целесообразно искать методом последовательных приближений, рассматривая два, три и т.д. уравнения системы (15). Тем не менее некоторые выводы о решениях уравнения (17) можно сделать сразу.

В пренебрежении взаимодействием мод, критические условия устойчивости n -й моды капиллярных колебаний определяются приравнением нулю n -й диагональной компоненты определителя (17) и имеют простой аналитический вид

$$(n-1)(n+2) - WeM_n - (n-1)W - w\lambda_n = 0. \quad (18)$$

На рис. 1 приведена критическая зависимость параметра Рэлея $W = W(We, w)$ от параметров Вебера We и Тейлора w , рассчитанная по (18) для основной моды ($n = 2$). Тройка чисел, соответствующая координатам точки в пространстве переменных W, w, We , определяет критическое значение параметров We, W, w , при которых основная мода становится неустойчивой. Из (18) и рис. 1 видно, что попарная зависимость параметров

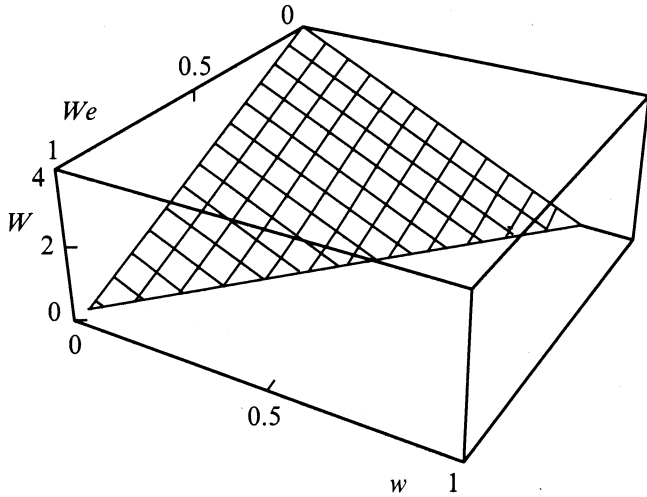


Рис. 1. Взаимозависимость критических значений параметров Рэлея W , Вебера We и Тейлора w для основной (второй) моды.

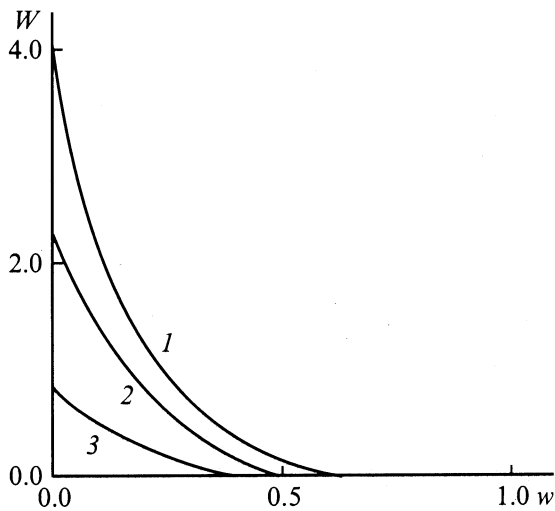


Рис. 2. Зависимость критического значения параметра Рэлея W от безразмерного параметра Тейлора w для основной моды при различных значениях скорости U : 1 — 0, 2 — 20, 3 — 30.

друг от друга, является линейной. При равенстве нулю двух из трех параметров критические значения третьего параметра определены равенствами: $We = 0.97$, $W = 4$, $w = 0.86$.

На рис. 2 представлена зависимость параметра Рэлея W от параметра Тейлора w для основной моды ($n = 2$) при различных значениях скорости U , рассчитанная по (17) на основе определителя порядка 6×6 . Здесь и на остальных рисунках отношение плотностей $\rho = 10^{-3}$. Зависимость $W(w)$, приведенная на рис. 2, учитывает взаимодействие мод и в отличие от представленной на рис. 1 не является линейной. Кроме того, при равенстве нулю параметра Рэлея критическое значение параметра Тейлора меньше, чем в линейном случае, и составляет

примерно $w = 0.63$. Как видно из рис. 1 и 2, в соответствии с ожиданием [12] критические условия реализации неустойчивости заряженной поверхности капли существенно зависят от скорости ее движения.

На рис. 3 представлена зависимость вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты S от безразмерной скорости среды U при докритических значениях параметров Рэлея ($W = 1$) и Тейлора ($w = 0.1$). Номера кривых 2–7 соответствуют номерам мод. В расчетах учтены шесть первых уравнений системы (15). В итоге рассчитанные критические зависимости для второй и третьей мод получены с точностью до третьего знака, тогда как для шестой и седьмой мод рассчитанные значения практически соответствуют нулевому приближению. Обращает на себя внимание эффект взаимодействия второй и третьей мод, приводящий к по-

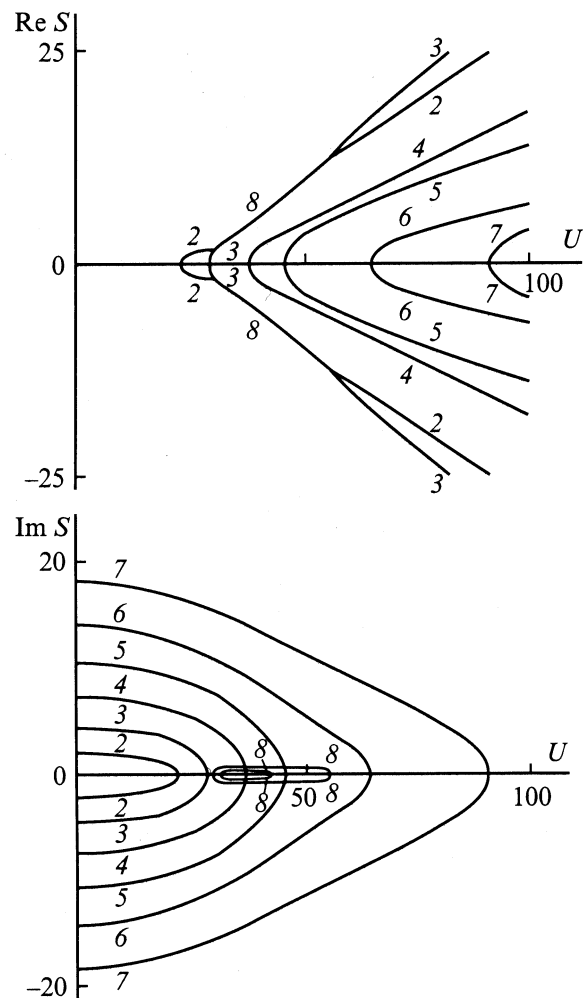


Рис. 3. Зависимость вещественно $Re S$ и мнимой $Im S$ компонент безразмерной комплексной частоты S капиллярных движений жидкости от безразмерной скорости U обтекающего каплю потока при докритических значениях параметров Рэлея $W = 1$ и Тейлора $w = 0.1$. 2–7 совпадают с номерами мод капиллярных движений жидкости, 8, соответствующая колебательной неустойчивости, является результатом взаимодействия 2-й и 3-й мод.

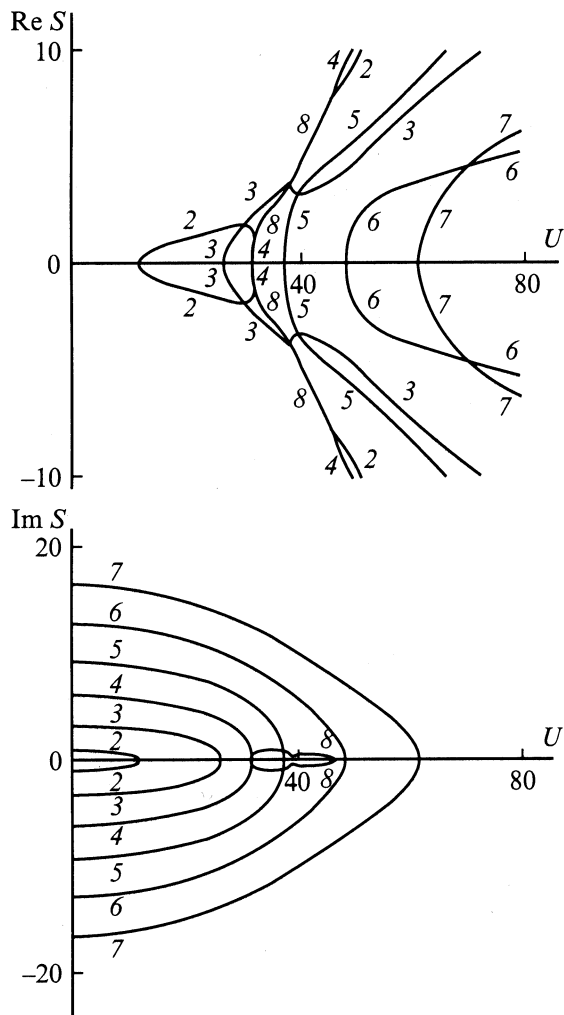


Рис. 4. Зависимость вещественной $Re S$ и мнимой $Im S$ компонент безразмерной комплексной частоты S капиллярных движений жидкости от безразмерной скорости U обтекающего каплю потока при равном нулю заряде капли $W = 0$ и сильном электрическом поле $w = 0.6$. Номера кривых 2–7 совпадают с номерами мод капиллярных движений жидкости. Кривая 8, соответствующая колебательной неустойчивости, является в отличие от рис. 3 результатом взаимодействия 2-й и 4-й мод.

явлению колебательных решений 8. На зависимостях $Re S(U)$ область (рис. 3), расположенная выше оси ординат, соответствует неустойчивым решениям, т.е. положительные части ветвей кривых 2–8 определяют величину инкремента неустойчивости соответствующей моды капиллярных колебаний капли. Ветвь 8 обладает в отличие от ветвей 2–7 и действительной, и мнимой компонентами. Таким образом, в определенном диапазоне скоростей U неустойчивость капли является колебательной, что характерно для неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца и обусловлено наличием на границе раздела сред тангенциального разрыва поля скоростей [8,13].

Из рис. 3 видно, что с ростом скорости инкремент аperiodической неустойчивости третьей моды превыша-

ет инкремент аperiodической неустойчивости второй моды. Т.е. при достаточно больших скоростях обтекающего потока капля должна от эллипсоидальной формы деформироваться к парашютообразной, что скажется и на закономерностях ее дробления при реализации неустойчивости [1]. Отмечается в экспериментах и колебательная неустойчивость свободно падающей капли [1].

Следует отметить, что рассчитанные критические значения скорости для шестой и седьмой мод получены при малой степени межмодового взаимодействия, так как при численных расчетах использовались только первые шесть уравнений системы (15), и критические зависимости для 6-й и 7-й мод получаются с большой погрешностью. Этим объясняется некоторое отличие от более низких мод качественного хода зависимостей $Im S(U)$ для шестой и седьмой мод.

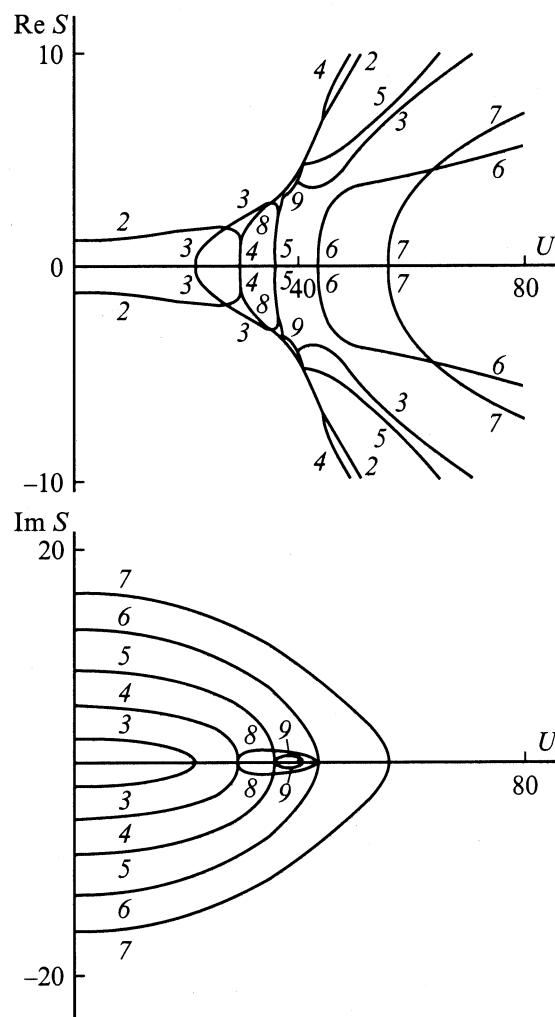


Рис. 5. Зависимость вещественной $Re S$ и мнимой $Im S$ компонент безразмерной комплексной частоты S капиллярных движений жидкости от безразмерной скорости U обтекающего каплю потока при $W = 0$ и критическом для основной моды значении параметра Тейлора $w = 0.7$. Нумерация кривых совпадает с принятой на рис. 4. Кривая 9 соответствует взаимодействию 3-й и 5-й мод.

При приближении величины параметра Тейлора w к критическому значению $w \rightarrow 0.63$ ход расчетных кривых и характер их взаимодействия становятся качественно иными, чем при $w \rightarrow 0$. Так, если при приближении параметра Рэлея к критическому значению характер хода кривых практически не меняется, лишь картинка в целом как бы смещалась влево по оси абсцисс (см. [14] и представленные там рисунки), то в данном случае меняется картина в целом. На рис. 4 приведена зависимость, аналогичная представленной на рис. 3, полученная при $W = 0$ и $w = 0.6$. Кривая δ в данном случае является результатом взаимодействия второй и четвертой мод, а не второй и третьей, как на рис. 3. При этом колебательная неустойчивость, характеризующая ветвью δ , реализуется в довольно узком диапазоне скоростей, а при дальнейшем увеличении скорости становится неустойчивой четвертая мода. Предположительно это связано с тем, что давление внешней среды стремится деформировать каплю к сплюснутому вдоль \mathbf{U} (вдоль \mathbf{E}_0) сфероиду, а давление электрического поля стремится деформировать каплю к вытянутому вдоль \mathbf{E}_0 сфероиду. Поэтому в результате конкуренции этих влияний форма капли будет близка к форме, определяемой четвертым полиномом $P_4(\mu)$, и неустойчивой станет четвертая мода.

На рис. 5 представлены расчетные зависимости $\text{Re } S(U)$ и $\text{Im } S(U)$ для случая поля \mathbf{E}_0 слабо закритического для основной моды ($w = 0.7$, $W = 0$). Видно, что в целом характер хода кривых мало изменяется, за исключением того, что вторая мода изначально неустойчива и появляется колебательная ветвь θ — результат взаимодействия третьей и пятой моды.

Заключение

Критические условия реализации неустойчивости капли по отношению к индуцированному заряду существенно снижаются при наличии на капле собственного заряда и обдувающего потока газа. Это происходит из-за суперпозиции двух типов неустойчивости: неустойчивости свободной поверхности капли по отношению к тангенциальному скачку поля скоростей и неустойчивости по отношению к собственному и индуцированному внешним полем зарядам. В зависимости от отношения плотностей капли и среды, величины ее заряда, напряженности электрического поля и скорости обдувающего потока капля может претерпевать как аperiodическую, так и колебательную неустойчивости. Аperiodическая неустойчивость при малых скоростях обдувающего потока реализуется в деформации к вытянутому сфероиду со сбросом избыточного поверхностного заряда путем эмиссии высокодисперсных сильнозаряженных капелек [11]; при больших скоростях обдувающего потока — в деформации к парашютообразной (при малых значениях напряженности электрического поля) или крестообразной (при больших значениях напряженности электрического поля) форме и распаду на множество мелких и несколько крупных капель.

Приложение

Расчет давления внешнего электрического поля и поля собственного заряда на возмущенную капиллярным волновым движением сферическую поверхность заряженной капли

Пусть идеальнопроводящая капля, имеющая заряд Q , находится в однородном электростатическом поле \mathbf{E}_0 в диэлектрической среде.

В сферической системе координат с началом в центре капли давление электрического поля на границу раздела проводящей и электрической сред, возмущенную капиллярным волновым движением, определяется следующим образом:

$$r = 1 + \xi : \quad P_E = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2, \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi.$$

Здесь потенциал полного электростатического поля в диэлектрике, который можно представить в виде $\Phi = \Phi_q + \Phi_e = \Phi_0 + \delta\Phi$, где $\Phi_0 = \Phi_q^0 + \Phi_e^0$ — потенциал электрического поля в отсутствие возмущения; $\delta\Phi = \delta\Phi_q + \delta\Phi_e$ — добавка к потенциалу Φ_0 , вызванная малым тепловым возмущением $|\xi| \ll R$ сферической поверхности капли, имеющая тот же порядок малости ($|\delta\Phi| \sim |\xi| \setminus R$). Здесь индексы q и e соответствуют вкладу в потенциал, обусловленному собственным зарядом Q и внешним электростатическим полем \mathbf{E}_0 соответственно. Таким образом,

$$r = 1 + \xi : \quad P_E = \frac{\varepsilon}{8\pi} (\nabla\Phi_0 + \nabla(\delta\Phi))^2.$$

Разложим это выражение в ряд с точностью до членов линейных по $|\xi|/R$ и $\delta\Phi$

$$P_E = \left[\frac{\varepsilon}{8\pi} (\nabla\Phi_0)^2 + \frac{\varepsilon}{8\pi} 2\nabla\Phi_0 \cdot \nabla(\delta\Phi) \right]_{r=1+\xi} \\ \approx \left[\frac{\varepsilon}{8\pi} (\nabla\Phi_0)^2 + \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{\partial(\nabla\Phi_0)^2}{\partial r} \cdot \xi + \frac{\varepsilon}{4\pi} (\nabla\Phi_0)(\nabla(\delta\Phi)) \right]_{r=1}.$$

Пользуясь тем, что на поверхности проводника электрическое поле перпендикулярно поверхности, получим

$$r = 1 : \quad P_E = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \right)^2 \\ + \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \right)^2 \right] \xi + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial r}. \quad (\text{П.1})$$

Поскольку вклад от заряда и внешнего поля в суммарный потенциал Φ не зависят друг от друга, разобьем задачу на две: нахождение потенциала электрического поля, обусловленного зарядом Q , и потенциала, обусловленного внешним электростатическим полем \mathbf{E}_0 .

Потенциал Φ_e является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_e &= 0, \\ r \rightarrow \infty: \quad \Phi_e &\rightarrow -E_0 r \cos \Theta, \\ r \rightarrow 1 + \xi: \quad \Phi_e &= \text{const.} \end{aligned}$$

Раскладывая эту краевую задачу по порядкам малости, для нулевого Φ_e^0 и первого $\delta\Phi_e$ порядков получим краевые задачи

$$\Delta\Phi_e^0 = 0, \quad \Delta(\delta\Phi_e) = 0, \quad (\text{П.2})$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_e^0 \rightarrow -E_0 r \cos \Theta, \quad \delta\Phi_e \rightarrow 0, \quad (\text{П.3})$$

$$r = 1: \quad \Phi_e^0 = 0, \quad \frac{\partial\Phi_e^0}{\partial r} \xi + \delta\Phi_e = 0. \quad (\text{П.4})$$

Решение в нулевом приближении уравнения (П.2) с учетом граничных условий (П.3) и (П.4) дает

$$\Phi_e^0 = -E_0 r \cos \Theta (1 - r^{-3}). \quad (\text{П.5})$$

Решение краевой задачи первого приближения для $\delta\Phi_e$ естественно искать в виде

$$\delta\Phi_e = \sum_n B_n(t) r^{-(n-1)}.$$

Учитывая граничные условия (П.3) и (П.4), разложение для $\xi(\Theta, t)$ (7) и рекуррентное соотношение для сферических функций [9]

$$\begin{aligned} \cos \Theta Y_n(\mu) &= \frac{(n+1)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} Y_{n+1}(\mu) \\ &+ \frac{n}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}} Y_{n-1}(\mu), \quad (\text{П.6}) \end{aligned}$$

найдем

$$\begin{aligned} \delta\Phi_e &= 3E_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[\frac{(n+1)Z_{n+1}}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} \right. \\ &\left. + \frac{(n+1)Z_{n-1}}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} \right] Y_n(\mu). \quad (\text{П.7}) \end{aligned}$$

Потенциал Φ_q является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_q &= 0, \\ r \rightarrow \infty: \quad \Phi_q &\rightarrow 0, \\ r = 1 + \xi: \quad \Phi_q &= \text{const.} \end{aligned}$$

Раскладывая эту краевую задачу по порядкам малости для нулевого Φ_q^0 и первого $\delta\Phi_q$ порядков, получим краевые задачи

$$\Delta\Phi_q^0 = 0, \quad \Delta(\delta\Phi_q) = 0, \quad (\text{П.8})$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_q^0 \rightarrow 0, \quad \delta\Phi_q \rightarrow 0, \quad (\text{П.9})$$

$$r = 1: \quad \Phi_q^0 = Q, \quad \delta\Phi_e = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \xi. \quad (\text{П.10})$$

Решение нулевого приближения уравнения (П.8) с учетом граничных условий (П.9) и (П.10) имеет ожидаемый вид

$$\Phi_q^0 = \frac{Q}{\varepsilon r}. \quad (\text{П.11})$$

Решение для $\delta\Phi_q$ будем искать в виде

$$\delta\Phi_q = \sum_n D_n(t) r^{-(n-1)}.$$

Учитывая граничные условия (П.9) и (П.10) и выражение (7) для разложения $\xi(\Theta, t)$, получим

$$\delta\Phi_q = \frac{Q}{\varepsilon} \sum_n \frac{1}{r^{n+1}} Z_n Y_n(\mu). \quad (\text{П.12})$$

Подставляя полученные выражения (П.5), (П.7), (П.11), (П.12) в выражение для давления (П.1), а также используя рекуррентные соотношения (П.6) и выражение [9]

$$\begin{aligned} (2n-1)(2n+3) \cos^2 \Theta Y_n(\mu) &= (2n-1) \\ &\times \frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{(2n+1)(2n+5)}} Y_{n+2}(\mu) + [2l(l+1) - 1] Y_n(\mu) \\ &+ (2n+3) \frac{n(n-1)}{\sqrt{(2n+1)(2n-3)}} Y_{n-2}(\mu), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} P_E &= \frac{W}{2} + 3\sqrt{wW} \cos \Theta + 18 \cos^2 \Theta \\ &+ \sum_n Y_n(\mu) \left\{ 9w \frac{n(n-1)(n-2)}{\sqrt{(2n-3)(2n-1)^2(2n+1)}} Z_{n-2} \right. \\ &+ 3\sqrt{wW} \frac{n(2n-3)}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} Z_{n-1} \\ &+ \left[W(n-1) + 9w \left(\frac{n^3}{(2n-1)(2n+1)} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{(n+1)^2(n-2)}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{4n(n+1)-2}{(2n-1)(2n+3)} \right) \right] Z_n \\ &+ 3\sqrt{wW} \frac{(n+1)(2n-1)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} Z_{n+1} \\ &\left. + 9w \frac{n(n+1)(n+2)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)^2(2n+5)}} Z_{n+2} \right\}. \quad (\text{П.13}) \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Гонор А.Л., Ривкинд В.Я. // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 17. М.: ВИНТИ, 1982. С. 98–159.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [3] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЭОМ. 2000. № 4. С. 17–28.
- [4] Дячук В.А., Мучник В.М. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
- [5] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 5. С. 7–14.
- [6] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 7. С. 26–34.
- [7] Taylor G. // Proc. Roy. Soc. A. 1964. Vol. 280. P. 383–397.
- [8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [9] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [10] Ширяева С.О., Лазаряц А.Э. и др. Препринт ИМРАН. Ярославль, 1994. № 27. 126 с.
- [11] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [12] Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 5. С. 12–17.
- [13] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 2. С. 23–34.
- [14] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 5. С. 7–14.