

01;07;12

Фокусировка сферической рентгеновской волны одноосно изогнутым кристаллом. Схема Иоганна и логарифмическая спираль

© Т. Чен

Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова,
117571 Москва, Россия
e-mail: docent65@mtu-net.ru, ttchen@e-mail.ru

(Поступило в Редакцию 14 сентября 2001 г.)

Теоретически рассмотрена фокусировка сферической волны в известной схеме Иоганна. Получена аналитическая формула для размера поверхности изогнутого кристалла, дифракционно отражающей излучение в схеме Иоганна. Получена формула распределения интенсивности вблизи фокуса. Проанализирована сферическая aberrация дифрагировавшего пучка. Показано, что aberrация минимизирована при обратном рассеянии. Обсуждены спектральные характеристики спектрометра Иоганна. На основе геометрических представлений рассмотрена фокусировка сферической волны кристаллом, изогнутым в форме логарифмической спирали. Показано, что схема Иоганна является частным случаем логарифмической спирали.

Введение

Фокусировка рентгеновского излучения в схеме Иоганна [1] является одним из наиболее привлекательных способов получения светосильных пучков. Особенностью этой схемы является то, что в любой точке поверхности кристалла отражающие плоскости образуют одинаковый угол с плоскостями гармониками падающей сферической волны. Пространственные и спектральные свойства рентгеновских пучков, полученных с помощью схемы Иоганна, исследовались теоретически и экспериментально в целом ряде работ [2–8]. В частности, теория фокусирующего спектрометра Иоганна была развита в работах [2,3,7]. Однако в этих работах никак не учитывается сферическая aberrация дифрагировавшего пучка.

В настоящей работе сделана попытка учесть эти aberrации, что приводит к распределению интенсивности, не совпадающему с результатом, полученным в [2,3,7].

1. Область дифракционного отражения в схеме Иоганна

Рассмотрим геометрическую картину брэгговской фокусировки сферической рентгеновской волны одноосно-изогнутым кристаллом по аналогии с [9]. Примем во внимание, что дифракционное отражение волны носит когерентный упругий характер, т.е. $\mathbf{k}_0 + \mathbf{h} = \mathbf{k}_h$, $k_h^2 = k_0^2 = k^2$. Здесь \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_h — волновые векторы падающей и дифрагированной волн. Вектор \mathbf{h} обратной решетки изогнутого кристалла равен

$$\mathbf{h}(h_x, h_y, h_z) = \mathbf{h}_0 - \nabla(\mathbf{h}_0 \mathbf{u}), \quad (1)$$

где \mathbf{h}_0 — вектор обратной решетки неизогнутого кристалла; $h_0 = 2k \sin \Theta_B$; $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны падающего излучения; Θ_B — брэгговский угол.

Вектор $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ смещений атомов кристаллической решетки для упруго изогнутого кристалла запишем

в виде

$$u_x = -xz/R_x, \quad u_z = x^2/2R_x, \quad (2)$$

где R_x — радиус изгиба кристалла.

Квадратичными по z слагаемыми в (2) пренебрежем. Рассмотрим лучи, падающие из источника S только в плоскости дифракционного рассеяния кристалла (рис. 1). В отличие от [9] для направляющих косинусов γ_{0x} и γ_{0z} волнового вектора \mathbf{k}_0 учтем члены второй и третьей степени по x . Здесь x — координата по оси X точки падения произвольного луча. Тогда направляющие

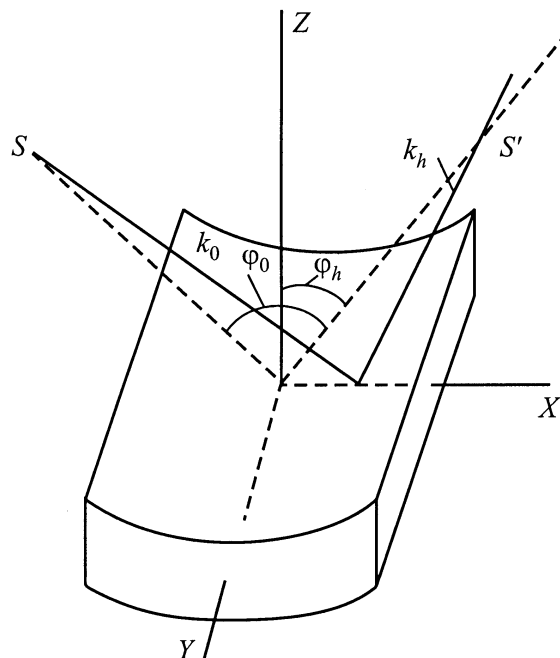


Рис. 1. Геометрия одномерной фокусировки сферической волны одноосно изогнутым кристаллом: S — точечный источник, S' — его изображение.

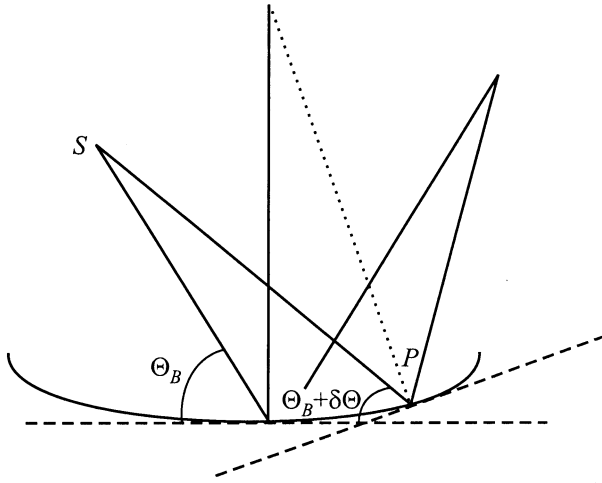


Рис. 2. К вычислению размера дифракционно отражающей области кристалла.

косинусы равны

$$\begin{aligned} \gamma_{0x} = & \sin \varphi_0 + x \cos^2 \varphi_0 / L_0 - x^2 \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 / L_0^2 \\ & - x^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 (\cos \varphi_0 - L_0 / R_x) / 2L_0^2 \\ & + x^3 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 / L_0^3 - x^3 \cos^3 \varphi_0 (\cos \varphi_0 \\ & - L_0 / R_x) / 2L_0^3 + x^3 \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0 (\cos \varphi_0 - L_0 / R_x) / L_0^3, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{0z} = & -\cos \varphi_0 + x \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 / L_0 + x^2 / 2R_x L_0 \\ & - x^2 \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0 / L_0^2 + x^2 \cos^2 \varphi_0 (\cos \varphi_0 - L_0 / R_x) / 2L_0^2 \\ & - x^3 \sin \varphi_0 / 2R_x L_0^2 + x^3 \sin^3 \varphi_0 \cos \varphi_0 / L_0^3 \\ & - x^3 \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 (\cos \varphi_0 - L_0 / R_x) / 2L_0^3 \\ & - x^3 \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 (\cos \varphi_0 - L_0 / R_x) / L_0^3, \end{aligned} \quad (4)$$

$$h_x = -2k \sin \Theta_B (x \cos \Psi / R_x + \sin \Phi),$$

$$h_z = 2k \sin \Theta_B (\cos \Psi - x \sin \Psi / R_x), \quad (5)$$

Ψ — угол наклона отражающих плоскостей к поверхности кристалла.

Из рис. 2 видно, что угол между лучом, падающим в точке P , и нормалью к поверхности кристалла в этой точке равен

$$\Omega = \pi/2 - (\Theta_B + \delta\Theta).$$

Принимая во внимание, что

$$\cos \Omega = -(\mathbf{k}_0 \mathbf{h}) / kh,$$

$$\gamma_{0x} = (x + L_0 \sin \varphi_0) / |SP|,$$

$$\gamma_{0z} = (z - L_0 \cos \varphi_0) / |SP|, \quad (6)$$

и положив $\delta\Theta = \Delta\Theta = |\chi_{hr}| / \sin 2\Theta_B$, получим для симметричной дифракции размер x_{eff} области на поверхности кристалла, в пределах которой дифрагированный

луч не „выходит“ за границу области полного отражения

$$x_{\text{eff}} = \Delta\Theta |\sin \Theta_B / L_0 - 1/R_x|^{-1}, \quad L_0 \neq R_x \sin \Theta_B. \quad (7)$$

Для схемы Иоганна ($L_0 = R_x \sin \Theta_B$) получим с помощью (3)–(6)

$$x_{\text{eff, Johann}} = R_x (2\Delta\Theta \text{tg } \Theta_B)^{1/2}. \quad (8)$$

Здесь $\Delta\Theta$ — полуширина кривой брэгговского отражения, χ_{hr} — фурье-компонента рентгеновской поляризуемости. Из (7), (8) видно, что расположение на круге Роуланда в схеме Иоганна позволяет существенно (на 2–3 порядка) увеличить светосилу пучка по сравнению со случаем $L_0 \neq R_x \sin \Theta_B$.

Получим теперь выражение для расстояния $|SP|$ (рис. 2) в виде степенного ряда по x . Рассмотрим два случая. В случае а) учтем кривизну поверхности кристалла, считая, что $z \approx x^2/R_x$. Тогда легко находим

$$\begin{aligned} |SP| \cong & L_0 [1 + x \sin \varphi_0 / L_0 + x^2 \cos^2 \varphi_0 / 2L_0^2 \\ & - x^2 \cos \varphi_0 / 2L_0 R_x - \sin \varphi_0 (1/L_0 - \cos \varphi_0 / R_x) x^3 / 2L_0^2 \\ & + \sin^3 \varphi_0 x^3 / 2L_0^3]. \end{aligned} \quad (9)$$

При $L_0 = R_x \cos \varphi_0$ квадратичные и кубические члены в (9) исчезают и необходимо учитывать члены четвертого порядка степени x . Аналогично найдем $|S'P|$

$$\begin{aligned} |S'P| \cong & L_h [1 + x \sin \varphi_h / L_h + x^2 \cos^2 \varphi_h / 2L_h^2 \\ & - x^2 \cos^2 \varphi_h / 2L_h R_x - \sin \varphi_h (1/L_h - \cos \varphi_h / R_x) \\ & \times x^3 / 2L_h^2 + \sin^3 \varphi_h x^3 / 2L_h^3]. \end{aligned} \quad (10)$$

Второй случай: б) кристалл изогнут так, что отражающая поверхность остается плоской ($z \approx 0$). Тогда имеем

$$\begin{aligned} |SP| = & L_0 [1 + x \sin \varphi_0 / L_0 + x^2 \cos^2 \varphi_0 / 2L_0^2 \\ & - x^3 \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 / 2L_0^3]. \end{aligned} \quad (11)$$

Для расстояния $|S'P|$ получим аналогичное (11) выражение с заменой $L_0 \rightarrow L_h$, $\varphi_0 \rightarrow \varphi_h$. В зависимости от того, какую модель изгиба кристалла (а или б) мы используем, получаются различные выражения для распределения интенсивности в фокусе. В случае а это будет интеграл Пирси, в случае б — функция Эйри.

2. Сферическая абберация отраженного пучка

Из результатов предыдущего раздела следует, что дифрагировавший пучок в схеме Иоганна обладает сферической абберацией. Обозначим $|S'P| = L_h$, $|OS'| = L_{h(0)}$. Рассмотрим симметричную геометрию дифракции. Тогда в случае а получим

$$L_h(x) \cong L_{h(0)} (1 + x \cos \Theta_B / (R_x \sin \Theta_B)),$$

т.е. сферическая aberrация будет существенной для сильно изогнутых кристаллов, когда $x \leq R_x$. Видно, что при обратном рассеянии в схеме Иоганна aberrация отсутствует до членов $\sim x^3$ включительно.

В случае б, когда кривизной отражающей поверхности кристалла мы пренебрегаем, присутствует сферическая aberrация с первого по третий порядок включительно. Используя геометрию обратного рассеяния, можно минимизировать влияние aberrации. При этом остается aberrация только второго порядка.

3. Распределение интенсивности волны вблизи фокуса

С учетом aberrаций дифрагированного пучка найдем интенсивность вблизи фокуса в вакууме. В соответствии с теорией динамической брэгговской дифракции в толстых кристаллах, развитой в работах [2,3,7,10], амплитуда дифрагированной волны на входной поверхности кристалла ($z \approx 0$) равна (с точностью до несущественных множителей)

$$E_h(x, 0) = (2k)^{1/2} |\chi_{hr}| \sigma_h C \gamma_0 \exp(ikL_0) \exp(i\pi/2) \times \exp(-ik \cos \varphi_h x^2 / 2R_x) [8\pi L_0 \sin(\varphi_0 + \varphi_h)]^{-1} \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{y} R(\tilde{y}) \exp(-i\tilde{y} \sigma_h x), \quad (12)$$

где

$\tilde{y} = \{\Delta\Theta_B - \chi_0(\cos \varphi_0 + \cos \varphi_h) / 2 \sin(\varphi_0 + \varphi_h)\} \sin 2\Theta_B / |\chi_{hr}|$ — нормированная угловая переменная (с учетом преломления), $\Delta\Theta_B$ — отклонение от точного брэгговского угла, $\sigma_h = k\chi_h / 2 \cos \Theta_B$, C — поляризационный множитель.

В (12) учтено, что в схеме Иоганна $L_0 = R_x \cos \varphi_0$. Для амплитудного плосковолнового коэффициента отражения $R(\tilde{y})$ слабо изогнутым кристаллом будем использовать его асимптотическое выражение, совпадающее с коэффициентом отражения идеального неизогнутого кристалла,

$$R(\tilde{y}) = \tilde{y} - (\tilde{y}^2 - 1)^{1/2}.$$

Используя рентгено-дифракционный и рентгено-оптический принципы Гюйгенса–Френеля и учтя результаты раздела 1, получим для интенсивности дифрагированной волны в точке ξ_p вблизи фокуса

$$I_h(\xi_p) \sim \left| k^2 C \chi_{hr} \sigma_h (8\pi^{3/2} R_x^2 \sin^2 2\Theta_B)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{y} R(\tilde{y}) \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\{ik [\xi_p \gamma_{hx} / L_h - \tilde{y} \sigma_h x / k + \cos^2 \varphi_h x^2 / 2L_h - \cos \varphi_h x^2 / 2R_x - x^3 \sin \varphi_h \cos^2 \varphi_h / 2L_h^2]\} \right|^2. \quad (13)$$

Интеграл по координате x в (13) сведем к функции Эйри

$$I_h(\xi_p) \sim \left| k^2 C \chi_{hr} \sigma_h (4\pi R_x^2 \sin^2 2\Theta_B)^{-1} \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{y} R(\tilde{y}) (3A_2)^{-1/3} \Phi(A_1 / \{3A_2\}^{1/3}) \right|^2, \quad (14)$$

где

$$\Phi(t) = (\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} \cos(u^3/3 + ut) du = (2^{-1} \pi^{-1/2}) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(ut + u^3/3)\} du$$

— функция Эйри. Здесь в случае симметричной геометрии дифракции $A_1 = -k\xi_p/R_x + \tilde{y}\sigma_h$, $A_2 = -k \cos \Theta_B / 2R_x^2$. Интеграл по \tilde{y} в (13) вычисляем методом стационарной фазы. Стационарная точка $\tilde{y}_{st} \approx 0$.

Интенсивность $I_h(\xi_p)$ обращается в нуль при $t_{\min} = -2.33811$. Учет влияния сферической aberrации приводит к несовпадению положения геометрического фокуса ($\xi_p = 0$) и максимума интенсивности сфокусированной волны. Наибольший максимум функции Эйри, равный 0.9494, достигается при $t_{\max} \cong -1.02$. Для отражения (220) излучения $\text{CuK}\alpha$ от кристалла кремния ($R_x \approx 1$ м) координата максимума интенсивности равна $\xi_p^{\max} \approx -0.1 \mu\text{m}$.

Получим формулу для дифракционной ширины максимума функции (14). Учтем, что $\Phi(-2.34) = -0.0024$, $\Phi(4.00) = 0.0016866$. Тогда пространственная ширина максимума интенсивности определяется следующей формулой:

$$\Delta\xi_p \approx 6.34 R_x^{1/3} \lambda^{2/3} \cos \Theta_B^{1/3} / (2\pi)^{2/3} (2/3)^{1/3} \approx (3\pi)^{1/3} R_x^{1/3} \lambda^{2/3} (\cos \Theta_B)^{1/3}. \quad (15)$$

Оценивая с помощью (15) ширину фокуса для использованных выше числовых значений параметров схемы Иоганна, получим $\Delta\xi \approx 0.6 \mu\text{m}$. Ширина фокуса на полувисоте интенсивности $\geq 0.1 \mu\text{m}$. Дифракционное уширение без учета сферической aberrации, рассчитанное по формуле $\Delta\xi = \lambda R_x / x_{\text{eff}}$, взятой из работ [2,3,7], дает $\Delta\xi \approx 1.5 \cdot 10^{-2} \mu\text{m}$.

4. Фокусирующий спектрометр Иоганна

Спектральные характеристики спектрометра Иоганна, рассчитанные с учетом формулы (15), оказываются на несколько порядков хуже по сравнению с соответствующими характеристиками, полученными авторами [2,7].

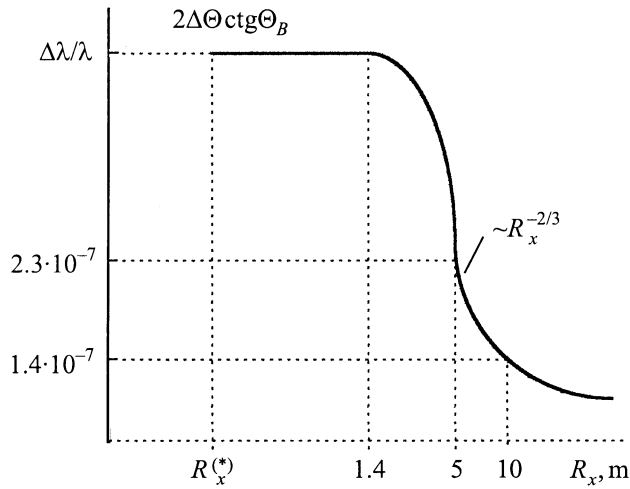


Рис. 3. Спектральное разрешение фокусирующего спектрометра Иоганна в зависимости от радиуса изгиба кристалла. $d = 10 \mu\text{m} = \text{const}$. Плоский участок кривой соответствует радиусам $R_x \gg (3\pi \cos \Theta_B)^{1/2} \lambda / \{(2\Delta\theta \sin \Theta_B)^{3/2}\}$. R_x^* — „критический“ радиус, удовлетворяющий условию слабого изгиба отражающих плоскостей.

Спектральное разрешение найдем исходя из уравнения Брэгга–Вульфа

$$\Delta\lambda/\lambda = \text{ctg} \Theta_B \Delta\theta_\xi,$$

где $\Delta\theta_\xi \approx \Delta\xi_p/L_h$, $L_h = R_x \sin \Theta_B$.

Для протяженного источника размером d лишь часть его $d_{\text{coh}} \sim 2\Delta\theta L_0 = 2\Delta\theta R_x \sin \Theta_B$ участвует в когерентном брэгговском отражении. Здесь для определенности мы рассматриваем симметричную дифракцию, $\Delta\theta$ — полуширина кривой брэгговского отражения. Тогда, положив $\Delta\xi_p$ равным сумме дифракционной ширины фокуса (15) и d_{coh} , найдем спектральное разрешение

$$\Delta\lambda/\lambda \sim \text{ctg} \Theta_B \left\{ (3\pi \cos \Theta_B)^{1/3} \lambda^{2/3} / (R_x^{2/3} \sin \Theta_B) + 2\Delta\theta \right\}. \quad (16)$$

Численная оценка на основе (16) при отражении (220) излучения $\text{CuK}\alpha$ от кристалла кремния $R_x = 1 \text{ m}$, $\lambda = 1.54 \text{ \AA}$ дает $\Delta\lambda/\lambda \sim 4.3 \cdot 10^{-5}$. Заметим, что при использованных выше числовых значениях вклад второго слагаемого в (16) является определяющим.

Величина спектрального разрешения при обратном рассеянии ($\Theta_B \approx \pi/2$)

$$(\Delta\lambda/\lambda)_{\pi/2} \leq (3\pi)^{1/3} \lambda^{2/3} (\Delta\theta)^{4/3} / R_x^{2/3} + 2(\Delta\theta)^2 \quad (17)$$

в несколько раз лучше, нежели при $\Theta_B \neq \pi/2$. Однако при слабом изгибе кристалла с радиусом $R_x \sim 1 \text{ m}$ величина

$$(\Delta\lambda/\lambda)_{\pi/2} \leq 2(\Delta\theta)^2 \approx 1.8 \cdot 10^{-5}.$$

Отметим, что формула (17) дает оценку верхнего предела для спектрального разрешения при обратном

рассеянии. Полуширина области полного отражения при дифракции в обратном направлении $\Delta\theta \sim |\chi_{hr}|^{1/2}$.

Из рис. 3 видно, что при фиксированном размере источника наилучшее разрешение спектрометра Иоганна достигается для кристаллов, изогнутых с радиусом изгиба $R_x > d/(2\Delta\theta \sin \Theta_B)$. При радиусах изгиба R_x , удовлетворяющих условию $R_x \gg R_{x,d} = d/(2\Delta\theta \sin \Theta_B)$, влиянием размера источника можно пренебречь. Спектральное разрешение в этом случае достигает по порядку величины $\sim 10^{-7}$.

Схема Иоганна является более чувствительной к размеру источника по сравнению со схемой Кошуа [11], используемой для лауэ-геометрии. Однако, несмотря на это, характеристики спектрометра Иоганна оказываются не хуже, чем для спектрометра Кошуа [12].

5. Фокусировка сферической волны кристаллом, изогнутым в логарифмическую спираль

Поверхность, изогнутая по логарифмической спирали, является одной из лучших с точки зрения получения фокусирующего эффекта. Для логарифмической спирали угол между любым лучом, исходящим из точки S , и поверхностью в точке падения постоянен (рис. 4). Расстояние от источника S до поверхности может варьироваться в некоторых пределах. При этом фокусирующее действие спирали сохраняется (см. ниже).

Рассмотрим симметричную дифракцию. Тогда размер поверхности кристалла, участвующей в отражении падающего излучения, равен

$$x_{\text{eff}} = (1 + \beta^2)^{1/2} L_0 \exp(\beta\varphi) \{ \exp(\beta\Delta\varphi) - 1 \} / \beta. \quad (18)$$

Здесь в случае симметричного отражения: $\beta = \text{ctg} \Theta_B$, $\Delta\varphi$ — расходимость падающего пучка. Из выражения (18) следует, что при симметричном обратном отражении ($\Theta_B = \pi/2$, $\cos \Theta_B \leq \Delta\theta$) сферически расходяще-

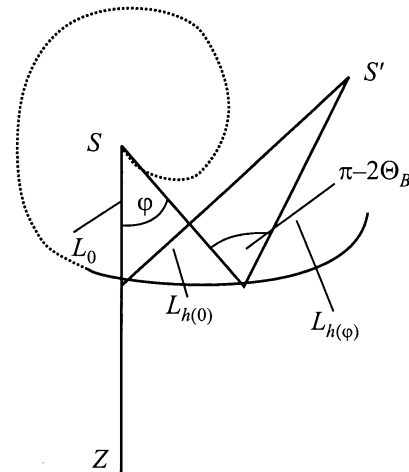


Рис. 4. Геометрия фокусировки сферической волны кристаллом, изогнутым в форме логарифмической спирали.

гося пучка размер отражающей поверхности ограничивается только максимальной расходимостью падающего пучка и расстоянием от источника до кристалла

$$x_{\text{eff}, \Theta=\pi/2} \sim L_0 \Delta\varphi. \quad (19)$$

Для источника, удаленного на достаточно большое расстояние $L_0 \approx 5 \text{ м}$ и $\Delta\varphi \approx 3 \cdot 10^{-3}$, находим $x_{\text{eff}, \Theta=\pi/2} \approx 1.5 \text{ см}$. Получим теперь формулу фокусирующей рентгеновской линзы, построенной на основе кристалла, изогнутого в форме логарифмической спирали. Из рис. 4 следует, что расстояние от точечного источника S до его изображения S' равно

$$|SS'| = L_S = (L_0^2 + L_{h(0)}^2 \pm 2L_0 L_{h(0)} \cos 2\Theta_B)^{1/2}. \quad (20)$$

Влияние геометрических aberrаций минимизировано и фокусировка происходит из „точки“ в „точку“, если для произвольного угла φ справедливо равенство

$$L_S = \left\{ L_0^2 \exp(2\beta\varphi) + L_{h,\varphi}^2 \pm 2L_0 L_{h,\varphi} \exp(\beta\varphi) \cos 2\Theta_B \right\}^{1/2}. \quad (21)$$

Из уравнений (20), (21) видно, что возможны два различных варианта фокусировки. В первом из них $\beta\varphi \ll 1$, влияние aberrаций мало и $L_{h,\varphi} \geq L_{h,0}$. Второй случай представляется нам более интересным, и поэтому рассмотрим сейчас именно его. Условия, при которых реализуется этот случай, имеют следующий вид:

$$L_0 = L_{h,\varphi}, \quad L_{h(0)} = L_{h,\varphi} \exp(\beta\varphi). \quad (22)$$

Ясно, что при этом равенства (20), (21) одновременно справедливы и имеет место точечная фокусировка. Принимая во внимание, что радиус кривизны логарифмической спирали как функция угла φ имеет вид

$$R = R(\varphi) = (1 + \beta^2)^{1/2} L_0 \exp(\beta\varphi), \quad (23)$$

получим из (22) искомую формулу линзы

$$1/L_0 + 1/L_{h(0)} = [\exp(\beta\varphi) + 1]/(R \sin \Theta_B). \quad (24)$$

Для малых углов $\varphi \ll \beta^{-1}$ из (23), (24) находим

$$1/L_0 + 1/L_{h(0)} \cong 2/(R \sin \Theta_B), \quad (25)$$

причем $L_{h(0)} \approx L_{h,\varphi} = L_0 = R \sin \Theta_B$. Полученный здесь результат означает, что схема Иоганна является частным случаем логарифмической спирали. Отметим, что при соблюдении условий (22) точка S' является асимптотическим полюсом другой логарифмической спирали.

Исследуем теперь вопрос о влиянии aberrаций на фокусировку. Учитывая (22), продифференцируем расстояние L_S (21) по углу φ

$$dL_S/d\varphi = \beta L_0^2 \exp(\beta\varphi) [\exp(\beta\varphi) \pm \cos 2\Theta_B]/L_S. \quad (26)$$

Отсюда найдем величину aberrации вдоль отрезка SS' . При $L_0 \sim 1 \text{ м}$, $0 < \varphi \leq 10^{-5}$, $\Theta_B \approx 23.65^\circ$ получим

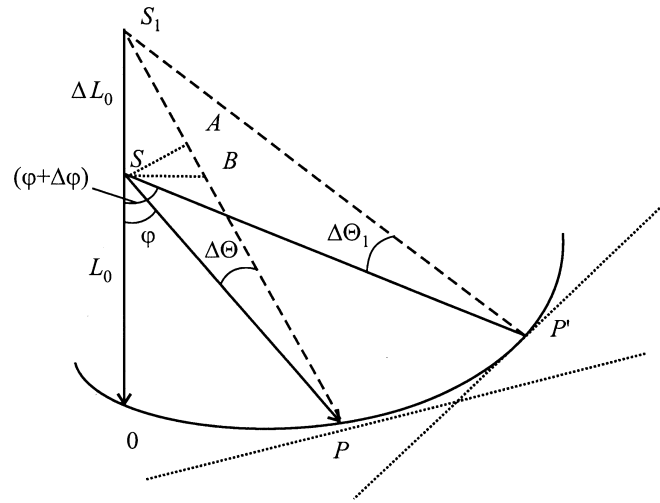


Рис. 5. К вопросу о влиянии смещения источника S на фокусировку сферической волны логарифмической спиралью.

численную оценку $\Delta L_s \approx 20 \mu\text{м}$. Из (26) видно, что для $\beta\varphi \ll 1$ величина aberrации зависит от φ линейно.

Aberrация отсутствует при $\beta = 0$, что в симметричном случае соответствует $\Theta_B = \pi/2$, и при $\varphi = \text{Ln}(\cos 2\Theta_B)/\beta$. Покажем теперь, что при определенных условиях смещение источника S не нарушает фокусировки. Из рис. 5 видно, что

$$\xi = \Delta L_0 \sin(\varphi - \Delta\Theta) = L_0 \exp(\beta\varphi) \sin(\Delta\Theta).$$

Пусть $\Delta\Theta$ — угловая полуширина кривой отражения. Тогда находим величину смещения источника

$$\Delta L_0 \cong L_0 \exp(\beta\varphi) \sin(\Delta\Theta) / |\sin(\varphi - \Delta\Theta)|. \quad (27)$$

Несложный анализ выражения (27) показывает, что при $\varphi \ll \Delta\Theta$ смещение источника $\Delta L_0 \geq L_0$ (при $\beta\varphi \ll 1$). В случае, если $\varphi \sim \Delta\Theta$, расстояние от источника до кристалла может варьироваться в очень широких пределах без существенного изменения фокусировки ($\Delta L_0 > L_0$). Наконец, при $\Delta\Theta \ll \varphi \ll 1$ получим, что $\Delta L_0 \ll L_0$.

Для того чтобы при смещении источника в положение S_1 фокусировка сохранилась, необходимо, чтобы для луча SP' (рис. 5) угол $S_1P'S$ был равен $\Delta\Theta_1 = \Delta\Theta$. Учитывая, что

$$\Delta L_0 \approx L_0 \exp\{\beta(\varphi + \Delta\varphi)\} \sin(\Delta\Theta_1) / \sin\{(\varphi + \Delta\varphi) - \Delta\Theta_1\},$$

найдем

$$\begin{aligned} \text{tg}(\Delta\Theta_1) = & \sin(\varphi + \Delta\varphi) \sin(\Delta\Theta) / [\exp(\beta\Delta\varphi) \{ \sin(\varphi - \Delta\Theta) \} \\ & + \cos(\varphi + \Delta\varphi) \sin(\Delta\Theta)]. \end{aligned} \quad (28)$$

Смещение источника S в точку S_1 не нарушает фокусировку, если $\Delta\Theta_1 \approx \Delta\Theta$. В частности, при $\Delta\varphi \ll \varphi \ll 1$ и $\varphi \geq \Delta\Theta$ из (28) получается, что $\Delta\Theta_1 \cong \Delta\Theta$. При

этом $\Delta L_0 \leq L_0$, т.е. смещение точечного источника в довольно широком интервале расстояний не оказывает существенного влияния на фокусировку. С помощью рис. 5 оценим максимальный размер ξ_{\perp} источника в перпендикулярном к L_0 направлении, при котором еще имеет место фокусировка,

$$\xi_{\perp} \cong \Delta L_0 \operatorname{tg}[(\varphi + \Delta\varphi) - \Delta\Theta_1] = L_0 \exp[\beta(\varphi + \Delta\varphi)] \times \sin(\Delta\Theta_1) / \cos[(\varphi + \Delta\varphi) - \Delta\Theta]. \quad (29)$$

Из (29) видно, что например, при $(\varphi + \Delta\varphi) \sim \Delta\Theta_1$ поперечный размер источника (ξ_{\perp}) $> L_0\Delta\Theta_1$. Для $\Delta\Theta_1 = \Delta\Theta \sim 10^{-5}$ и $L_0 \approx 1$ м находим численную оценку для размера источника $\xi_{\perp} > L_0\Delta\Theta \approx 10 \mu\text{m}$.

В принципе для пучков, ось которых образует большой угол $\varphi \leq \pi/2cL_0$, максимально возможный размер источника сильно возрастает. В разделе 4 был получен результат, что в схеме Иоганна для протяженных источников с размерами $d > d_{\text{coh}} \cong 2L_0\Delta\Theta$ резко ухудшаются спектральные характеристики отраженного пучка. Как только что было показано, использование источников размером $> d_{\text{coh}}$ для кристалла, изогнутого по логарифмической спирали, не влияет на фокусировку. Этот результат является, несомненно, преимуществом логарифмической спирали над цилиндрически изогнутым кристаллом в схеме Иоганна, так как он дает возможность более широкого выбора источников.

В заключение заметим, что практическая реализация изгиба кристалла по логарифмической спирали не представляет особого труда и была осуществлена, например, в работе [13].

Список литературы

- [1] Johann H.H. // Z. Phys. 1931. Bd 69. N 3–4. S. 185.
- [2] Габриелян К.Т., Чуховский Ф.Н., Пинскер З.Г. // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 1. С. 3–11.
- [3] Чуховский Ф.Н. // Металлофизика. 1981. Т. 3. № 5. С. 3–50.
- [4] Wittry D.B., Sun S. // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 67 (4). P. 1633–1638.
- [5] Chang W.Z., Wittry D.B. // J. Appl. Phys. 1993. Vol. 74 (5), P. 2999–3008.
- [6] Chukhovskii F.N., Chang W.Z., Förster E. // J. Appl. Phys. 1995. Vol. 77 (5). P. 1843–1848.
- [7] Габриелян К.Т., Чуховский Ф.Н., Пискунов Д.И. // ЖЭТФ. 1989. Вып. 3 (9). С. 834–846.
- [8] Witz J. // Acta Cryst. 1969. Vol. A25. P. 30–42.
- [9] Чен Т., Бушуев В.А., Кузьмин Р.Н. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 10. С. 60–63.
- [10] Chukhovskii F.N., Gabrielyan K.T., Petrashen' P.V. // Acta Cryst. 1978. Vol. A34. P. 610–621.
- [11] Cauchois Y. // J. Phys. 1932. N 3. P. 320.
- [12] Габриелян К.Т., Чуховский Ф.Н., Пинскер З.Г. // ЖТФ. 1980. Вып. 8. С. 1641–1646.
- [13] De Wolff P.M. // Selected Topics on X-ray Crystallography / Ed. J. Bouman. Amsterdam: Morth Holland Publ. Co., 1951.