01;05;06;08;11

Лазерное возбуждение изгибных волн и их рассеяние фрактальными неоднородностями в тонкой пластине

© М.Л. Лямшев

Научный центр волновых исследований Института общей физики РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: lyamshev@kapella.gpi.ru

(Поступило в Редакцию 30 октября 2001 г.)

Рассматриваются возбуждение изгибных волн в тонкой пластине (пленке) гармонически модулированным лазерным излучением и их рассеяние на малых статистических фрактальных неоднородностях. Получено выражение для средней интенсивности флуктуаций поля рассеянных волн. Установлена связь интенсивности с параметрами лазерного излучения, характеристиками пластины и фрактальной размерностью неоднородностей. Обсуждается ожидаемая частотная зависимость затухания изгибных волн в пластине, обусловленная их рассеянием на фрактальных неоднородностях.

Пленки из различных материалов с различными физическими свойствами служат основой приборов современной электроники и лазерной техники. К настоящему времени достигнут значительный прогресс в их получении. Например, удается выращивать алмазные пленки большой площади (до тысяч cm^2) и толщиной порядка 1–2 mm [1]. Алмазные пленки могут найти применение при создании алмазных окон для мощных CO_2-лазеров.

Поверхность любой пленки является шероховатой (неровной). Это связано, в частности, с технологическими процессами выращивания пленки из газовой фазы ростового вещества. Шероховатость пленки может достигать до 10% от толщины пленки. Следует отметить, что поверхности реальных тел всегда являются шероховатыми. Даже в тех случаях, когда они кажутся идеально ровными (гладкими), в действительности они шероховаты, и дело лишь в масштабах этих шероховатостей [2]. Недавно сообщалось, например, что на поверхности жесткого диска компьютера наряду с регулярными неровностями-бороздками, несущими сигнальную информацию, всегда существуют статистические неровности с фрактальными свойствами [3]. Большое влияние на физические свойства пленок (механические, электрические, магнитные и другие свойства) оказывает их внутренняя структура. Нередко микроструктура пленки является неупорядоченной и фрактальной. Это в полной мере относится, например, к пленке — слою аморфного полупроводника [4].

С акустической точки зрения пленки можно рассматривать как тонкие пластины с неоднородностями, обусловленными неровностями поверхности и микронеоднородностями внутренней структуры. Ниже рассматривается возбуждение изгибных волн в тонкой пластине гармоническим модулированным лазерным излучением и их рассеяние неоднородностями пластины. Предполагается, что поглощение лазерного излучения происходит в тонком приповерхностном слое пластины, толщина которого значительно меньше толщины пластины. Неоднородности предполагаются случайными, статистически однородными и малыми (слабыми). Для решения задачи используется метод малых возмущений. Полученные результаты могут представить интерес в связи с лазерной оптоакустической диагностикой неоднородностей в пленках применительно к неразрушающему контролю пленок.

Рассеяние изгибных волн на случайных неоднородностях в пластине уже рассматривалось ранее. Неоднородности предполагались либо дельта-коррелированными [5], либо их статистические свойства описывались гауссовой корреляционной функцией [6]. Однако неоднородностями в пленках-пластинах часто присущи фрактальные свойства. Фрактальные структуры характеризуются масштабной инвариантностью или скейлингом. Как следствие этого корреляционные функции и спектры статистических фракталов описываются степенными законами с дробным показателем [2]. Принятые в [5,6] статистические модели неоднородностей могут оказаться неадекватными реальным неоднородностям в пластинах (пленках).

Пусть на тонкую пластину падает вертикально к ее поверхности луч лазера с гармонически модулированной интенсивностью. Для смещений $u(x,y)$ пластины, совершающей вынужденные изгибные колебания, справедливо уравнение [7]

$$[\Delta^2 - k^4(x,y)]u(x,y) = \frac{F(x,y)}{g}, \tag{1}$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad g = \frac{Eh^3}{3(1-\sigma^2)},$$

$$k^4(x,y) = k^4\bigl(1+\mu(x,y)\bigr)^4, k^4 = [3\omega^2\rho(1-\sigma^2)]/Eh^2,$$

g — цилиндрическая жесткость; E — модуль Юнга; σ — коэффициент Пуассона; $2h$ — толщина; ρ — плотность материала пластины; ω — круговая частота модуляции интенсивности лазерного излучения; k — волновое число распространяющихся изгибных волн (колебаний) в пластине; $\mu(x,y)$ — случайная статистически однородная функция, характеризующая неоднородности в пластине; $\langle\mu(x,y)\rangle = 0$ и $|\mu(x,y)| \ll 1$; $F(x,y)$ — функция, характеризующая внешнюю силу, обусловленную действием лазерного излучения на пластину.

Предположим, что пластина непрозрачна для лазерного излучения и оно поглощается в тонком приповерхностном слое пластины. Это не ограничивает общности рассмотрения проблемы. Обычно распределение интенсивности $I_0(x,y)$ лазерного излучения на поверхности пластины подчиняется гауссову закону. С учетом сказанного для $F(x,y)$ можно написать выражение [8]

$$F(x,y) = -\frac{E\alpha\mu_1 m}{C_p} I_0 \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right], \qquad (2)$$

где a — радиус лазерного луча (пучка) на поверхности пластины, α — коэффициент объемного теплового расширения, C_p — удельная теплоемкость материала пластины, m — коэффициент модуляции ($0 \le m \le 1$) и μ_1 — коэффициент поглощения лазерного излучения в пластине.

Представим смещение пластины в виде

$$u(x,y) \cong u_0(x,y) + u_1(x,y) + \ldots, \qquad (3)$$

где $u_1(x,y)$ — смещения, обусловленные рассеянием изгибных волн „нулевого“ приближения со смещениями $u_0(x,y)$.

Подставляя (3) в (1) и принимая во внимание (2), получаем для $u_0(x,y)$ и $u_1(x,y)$ следующие уравнения:

$$(\Delta^2 - k^4)u_0(x,y) = -\frac{E\alpha\mu_1}{C_p g} I_0 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right), \qquad (4)$$

$$(\Delta^2 - k^4)u_1(x,y) = -4k^4\mu(x,y)u_0(x,y). \qquad (5)$$

Пользуясь методом функции Грина, решения уравнений (4) и (5) можно написать в виде

$$u_i(x,y) = \int\limits_S Q_i(x_0,y_0)G(x_0,y_0/x,y)ds(x_0,y_0), \qquad (6)$$

где $Q_i(x,y)$ — функции, описывающие правые части уравнений (4) и (5) $(i=0,1)$; $G(x_0y_0/x,y)$ — функция Грина, являющаяся решением уравнения

$$(\Delta^2 - k^4)G(x_0,y_0/x,y) = \delta(x_0-x)\delta(y-y_0) \qquad (7)$$

и удовлетворяющая условию излучения на бесконечности. Предположим, что кривизна фронта падающей на неоднородности „нулевой“ изгибной волны не влияет на эффекты рассеяния, т. е. фронт волны на масштабах корреляции неоднородностей можно считать плоским. Поле рассеянных волн будем рассматривать в зоне Фраунгофера по отношению к размерам радиуса корреляции неоднородностей. В этом случае для отыскания нулевого и первого приближений смещений пластины достаточно знать асимптотику функции Грина, как это следует из теоремы взаимности [8]. Она имеет вид [7]

$$G(x_0,y_0/x,y) = -\frac{\exp(ikR)}{\sqrt{32\pi i k^5 R}} \exp(ik_x x_0 + ik_y y_0), \qquad (8)$$

где $R = \sqrt{x^2+y^2}$; (x,y) — координаты точки наблюдения; (x_0,y_0) — координаты точки источника; $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Подставляя (8) в (6) и интегрируя, получим для нулевого приближения $u_0(x,y)$

$$u_0(x,y) = \frac{E\alpha\mu_1 m I_0 \pi a^2}{C_p g\sqrt{32\pi i k^5}} \frac{\exp(ikR)}{\sqrt{R}} \exp\left(-\frac{k^2a^2}{4}\right). \qquad (9)$$

Из (9) следует, что „нулевая“ изгибная волна в зоне Фраунгофера представляет собой цилиндрическую расходящуюся волну, амплитуда которой определяется мощностью $(I_0\pi a^2)$ лазерного излучения и параметрами пластины. Обращает на себя внимание множитель

$$\exp\left(-\frac{k^2a^2}{4}\right),$$

из которого следует, что амплитуда „нулевой“ волны существенно зависит от параметра (ka), характеризующего размеры лазерного „пятна“ на поверхности пластины по сравнению с длиной волны. Можно видеть, что для эффективного возбуждения нулевой изгибной волны в пластине необходимо, чтобы размеры лазерного пятна на поверхности пластины удовлетворяли условию $ka \ll 1$.

Рассмотрим флуктуации смещений пластины в поле рассеянной волны. В предположении, что фронт падающей нулевой волны в области с коррелированными неоднородностями является плоским, решение уравнения (5) можно представить выражением

$$u_1(x_1,y_1) = A_0 \frac{k^2}{\sqrt{2\pi i k}} \frac{\exp(ikR_1)}{\sqrt{R_1}} \times \int\limits_S \mu(x_0,y_0)\exp[ik_x x_0 + ik_y y_0] \times \exp[-ik'_x x_0 - ik'_y y_0]ds(x_0,y_0). \qquad (10)$$

Здесь $A_0 \equiv u_0(x,y)$ — характеризует амплитуду падающей „нулевой“ волны на расстоянии $R = \sqrt{x^2+y^2}$ в области расположения неоднородностей; $\mathbf{r}_0(x_0,y_0)$ — координаты точки с недонородностями; $\mathbf{r}_1(x_1,y_1)$ — координаты точки наблюдения. Умножая (10) на комплексно-сопряженное выражение, получаем для среднего квадрата флуктуации смещений пластины в рассеянной волне.

$$\langle |u_1(x_1,y_1)|^2\rangle = |A_0|^2 \frac{k^3}{2\pi R_1} \iint\limits_S B(x'_0,y'_0,x''_0,y''_0) \times \exp[ik(\mathbf{n}-\mathbf{n}')(\mathbf{r}'_0-\mathbf{r}''_0)]dx(x'_0,y'_0)dx(x''_0,y''_0), \qquad (11)$$

где $B(x'_0,y'_0,x''_0,y''_0) \equiv \langle \mu(x'_0,y'_0)\mu^*(x''_0,y''_0)\rangle$ — функция корреляции случайных неоднородностей; $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ — векторы, характеризующие соответственно направление падающей („нулевой“) и рассеянной (первого приближения) волн.

Введем относительные координаты $\xi = x_0' - x_0''$ и $\eta = y_0' - y_0''$, и координаты центра тяжести $\rho_1 = 1/2(x_0' + x_0'')$ и $\rho_2 = 1/2(y_0' + y_0'')$. Принимая во внимание, что функция корреляции статистически однородных процессов зависит лишь от разности координат, а интегрирование по координатам центра тяжести дает величину площади S пластины, получаем

$$\langle |u_1(x_1, y_1)|^2 \rangle = |A_0|^2 \frac{k^3}{2\pi R_1} S \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (12)$$

В выражении (12) конечные пределы интегрирования, определяемые размерами площади пластины S, заменены на $\pm\infty$ в силу того, что величина функции корреляции быстро стремится к нулю за пределами области корреляции неоднородностей и

$$\mathbf{q} = k(\mathbf{n} - \mathbf{n}')\mathbf{r}'(x', y').$$

Интеграл в выражении (12) с точностью до множителя $(2\pi)^{-2}$ представляет собой пространственный энергетический спектр флуктуаций неоднородностей

$$G(\mathbf{q}) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (13)$$

Определим теперь, как это принято в статистической теории волн, коэффициент рассеяния m_S, который будет определяться потоком энергии через границу замкнутого контура радиуса R. С учетом (12) и (13) получим

$$m_S \sim 2\pi k^3 G(\mathbf{q}). \quad (14)$$

Важнейшей особенностью фрактальных моделей неоднородностей является степенной спектр флуктуаций, который можно представить в виде

$$G(\mathbf{q}) \sim \mathbf{q}^{\gamma}, \quad (15)$$

где параметр γ характеризуется дробной величиной, а для неоднородностей с фрактальной границей (фрактальной поверхностью) определяется выражением

$$\gamma = D - 2d. \quad (16)$$

Здесь D — фрактальная размерность, d — размерность пространства вложения. Для описания случайных фрактальных неоднородностей возьмем функцию корреляции в виде (см., например, [9])

$$B(\mathbf{r}) = \langle \mu^2 \rangle [2^{\nu-1}\Gamma(\nu)]^{-1} (\mathbf{r}/\mathbf{r}_0)^{\nu} K_{\nu}(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0), \quad (17)$$

где $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция; $K_{\nu}(u)$ — функция Макдональда порядка υ; r_0 — радиус корреляции неоднородностей.

Для энергетического спектра имеем

$$G(q) = \langle \mu^2 \rangle \nu r_0^2 [\pi(1 + q^2 r_0^2)^{\nu+1}]^{-1}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (14), получаем для коэффициента рассеяния

$$m_S \sim \langle \mu^2 \rangle 2\pi\nu k^3 r_0^2 [\pi(1 + q^2 r_0^2)^{\nu+1}]^{-1}. \quad (19)$$

Из выражения (19) следует, что при $q^2 r_0^2 \ll 1$ фрактальные свойства неоднородностей не играют роли в рассеянии волн. Напротив, при $qr_0 \gg 1$ получаем

$$m_S \cong \langle \mu^2 \rangle 2k^3 (qr_0)^{-2-2\nu}. \quad (20)$$

Оценим частотную зависимость затухания изгибных волн, обусловленную рассеянием на неоднородностях,

$$\beta(\omega) \sim \oint\limits_{\Gamma} m_S d\Gamma. \quad (21)$$

Рассмотрим случай неоднородностей в виде структур с фрактальной границей. Известно, что для таких структур фрактальная размерность границ может быть в пределах $D \approx 1,3{-}1,7$ (см., например, [2]). Подставляя это значение фрактальной размерности в (16) и принимая во внимание, что $d = 2$, получаем $\gamma = -(2,7{-}2,3)$. Приравнивая γ величине показателя при q в выражении (20), получаем значение ν, характеризующее порядок функции Макдональда $\nu = 0,35{-}0,15$. Имея в виду, что $q \sim k$, получаем для частотной зависимости коэффициента затухания

$$\beta(\omega) \sim \omega^{0,3-0,7}.$$

Можно видеть, что показатель в частотной зависимости затухания равен нецелому числу. Это обусловлено фрактальными свойствами неоднородностей. Показатель может служить мерой фрактальности неоднородностей [10]. Заметим, что теория затухания ультразвука в твердом теле, обусловленного наличием дислокаций, приводит к зависимости $\beta(\omega) \sim \omega^{-1}$, т.е. к нефрактальной зависимости: показатель в частотной зависимости затухания равен целому числу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-02-16334) и INTAS (грант № 97-31680).

Список литературы

[1] Handbook of Industrial Diamonds Films / Ed. M.A. Prulas, L. Popovie, L. Bigelow. Marcel Dekker, Inc., 1997.
[2] *Feder J.* Fractals. New York: Plenum Press, 1988.
[3] *Karaback T., Zhao Y.-P., Liew T.* et al. // J. Appl. Phys. 2000. Vol. 88. N 6. P. 3361–3366.
[4] *Chen Z., Zhang S., Tan S.O.* // J. Appl. Phys. 2001. Vol. 89 (1). P. 783–785.
[5] *Рыбак С.А.* // Акуст. журн. 1971. Т. 17. № 3. С. 412–418.
[6] *Красильников В.Н.* // Акуст. журн., 1962. Т. 8. № 2. С. 183–188.
[7] *Morse P.M., Ingard U.K.* Yheoretical Acoustics. New York: Mc. Graw-Hill Book Comp., 1968. 937 p.
[8] *Лямшев Л.М.* Лазерное термооптическое возбуждение звука. М.: Наука, 1989. 232 с.
[9] *Zhao Y.-P., Wang G.-C., Lu T.M.* // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 58 (11). P. 7300–7309.
[10] *West B.J., Shlesinger M.F.* // J. Stat. Phys. 1984. Vol. 36. P. 779–786.