

07

## Рождение, уничтожение и эволюция непараксиальных оптических вихрей: 2. Топологический диполь

© А.В. Воляр, Т.А. Фадеева, С.Н. Лапаева

Таврийский национальный университет им. В.И. Вернадского  
E-mail: volyar@ccssu.crimea.ua

Поступило в Редакцию 23 апреля 2001 г.

Исследованы события рождения и уничтожения оптических вихрей в топологически нейтральных непараксиальных комбинированных модовых пучках (топологических диполях). Показано, что существует обширная область параметров элементарных пучков, для которых оптические вихри диполя аннигилируют вблизи фокальной плоскости, восстанавливая волновое поле без дислокаций волнового фронта.

Собственными модами оптического волокна являются волновые поля, переносящие оптические вихри [1]. Даже если модовый пучок, возбуждающий оптическое волокно, — топологически нейтральный (т.е. сумма топологических зарядов поля равна нулю), очень слабые возмущения волокна приводят к конверсии энергии из основной моды в поля, содержащие оптические вихри в связанном состоянии. Свет, излучаемый из многомодового волокна, также переносит множество связанных оптических вихрей, вследствие чего излучение имеет резко нерегулярное распределение интенсивности, называемое спекл-структурой [2]. Вместе с тем вихревой состав излучаемого из волокна света существенно зависит от расстояния от выходного торца. Наиболее ярко это выражено в излучении волнового поля из маломодового световода вблизи фокальной плоскости микрообъектива, выводящего излучение. Оказывается, что при определенных условиях оптические вихри исчезают вблизи фокальной плоскости, но затем вновь появляются в дальней зоне излучения. Такие внезапные появления и исчезновения фазовых сингулярностей первоначально гладкого светового поля — дислокационные реакции — очень характерны для непараксиальных

лазерных пучков вблизи фокальной каустики [3]. Они проявляются в виде событий рождения и аннигиляции аномальных колец Эйри.

Целью настоящей работы явилось изучение событий рождения и уничтожения оптических вихрей в топологически нейтральном непараксиальном модовом пучке, переносящем две чисто винтовые дислокации с равными по величине, но противоположными по знаку топологическими зарядами. Такие сингулярные состояния называются топологическими диполями [4].

Анализ поведения непараксиального топологического диполя предполагает, что известен вид волновой функции модовых пучков высших порядков, удовлетворяющих волновому уравнению Гельмгольца. В первой части данной статьи мы показали, что волновая функция модовых пучков, которые в предельном случае сводятся к параксиальным пучкам Лагерра–Гаусса, может быть сформирована из нескольких элементарных пучков Лежандра–Бесселя. Однако в параксиальной асимптотике  $kz_0 \gg 1$  такая  $\Psi$ -функция будет согласовываться с волновой функцией соответствующего параксиального пучка не на всем протяжении оптической оси, а либо вблизи фокальной плоскости  $kz \ll 1$ , либо вдали от нее  $kz \gg kz_0$ . Составим новую волновую функцию комбинированного непараксиального пучка в виде:

$$\Psi^{(D)} = A \cdot \Psi_{02}^{(LB)} + B \cdot \Psi_{11}^{(ED)} + C \cdot \Psi_0^{(0)}, \quad (1)$$

где

$$\Psi_{02}^{(LB)} = \left(1 - \frac{2}{3} kz_0\right) j_0(kR) - \frac{1}{3} kz_0 \left(2 - 3 \frac{r^2}{R^2}\right) j_2(kR)$$

— комбинированный пучок Лежандра–Бесселя, согласующийся вблизи фокальной плоскости при  $kz \ll 1$  с пучком Лагерра–Гаусса  $\tilde{\Psi}_{01}^{(LG)}$ ;  $\Psi_{11}^{(ED)} = \frac{r}{R} \cos \varphi j_1(kR)$  — пучок Лежандра–Бесселя с  $m = l = 1$ , согласующийся на протяжении всей оптической оси с параксиальным пучком  $\tilde{\Psi}_{10}^{(ED)}$ ;  $\Psi_0^{(0)} = j_0(kR)$  — основной пучок Лежандра–Бесселя с  $m = l = 0$ , согласующийся на протяжении всей оптической оси с фундаментальным гауссовым пучком  $\tilde{\Psi}_0^{(0)}$ ;  $j_m(kR)$  — сферические функции Бесселя первого рода  $m$ -го порядка,  $R = \sqrt{r^2 + (z + iz_0)^2}$  — комплексный радиус пучка.

Пользуясь выражением (1), довольно трудно дать строгий анализ траекторий вихрей, поэтому для построения распределения интенсивности, амплитуды и фазы волны мы будем пользоваться точной

формой уравнения (1), в то время как для расчета траекторий в виде параметрически заданных кривых воспользуемся приближенным видом бесселевых функций [5]:  $j_m(kR) \approx (i)^m j_0(kR)$ ,  $R \approx z + iz_0 + \frac{r^2}{2(z+iz_0)}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ , который с высокой степенью точности выполняется даже при сравнительно малых значениях  $kz_0 \geq 10$ ,  $\frac{r}{z_0} < 1$ .

Наиболее часто встречаются два случая: 1) коэффициент  $B$  — действительная величина и 2)  $B$  — мнимая величина.

**1.  $B$  — действительная величина.** Приравняем к нулю действительные и мнимые части уравнения (1), затем вычтем из первого уравнения второе и в результате получим:

$$(X-G)^2 + Y^2 + FZ^2 = 3F + G^2, \quad 4F(1+Z^2) + DX [2(1+Z^2) + \mathcal{R}^2] = 0, \quad (2)$$

$$\mathcal{R}^2 = X^2 + Y^2, \quad F = \frac{A-C}{A(1+kz_0)-C}, \quad G = -\frac{B}{A(1+kz_0)-C},$$

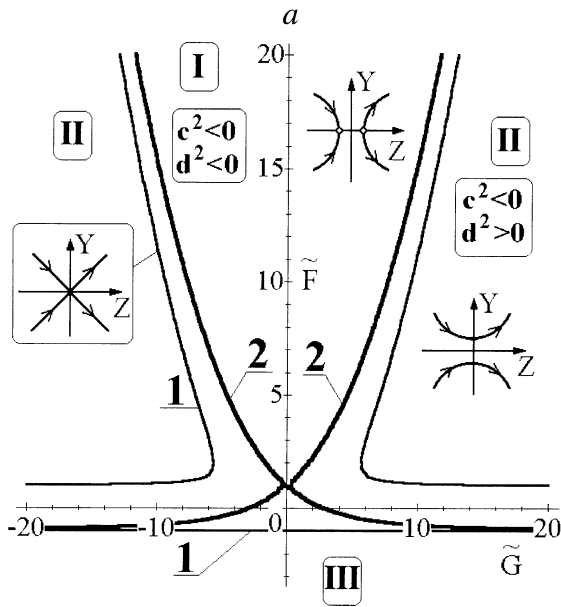
$$X = \frac{x}{z_0}, \quad Y = \frac{y}{z_0}, \quad Z = \frac{z}{z_0}.$$

В параксиальном приближении  $kz_0 \gg 1$ , и при  $\tilde{Z} = 0$  имеем:

$$\tilde{X} = aX, \quad \tilde{Y} = aY, \quad \tilde{Z} = Z, \quad F \approx \frac{1}{a^2} \frac{1-\tilde{F}}{2},$$

$$G \approx \frac{1}{a} \frac{\tilde{G}}{2}, \quad \tilde{F} = \frac{C}{A}, \quad \tilde{G} = \frac{B}{aA}, \quad a = \sqrt{\frac{kz_0}{2}}. \quad (3)$$

Параксиальные гауссовы пучки строго определены только вблизи оптической оси:  $r \ll z_0$ . Тогда членом  $\mathcal{R}^2 \ll 1$  в квадратных скобках в (2) можно пренебречь по сравнению с единицей. Кроме того, следует учесть, что волновые функции параксиального и непараксиального диполя эквивалентны друг другу только вблизи фокальной плоскости. Уравнение (1) характеризует поверхность второго порядка, в то время как поверхность (2) существенно отличается от плоскости, особенно в окрестности начала координат. Тем не менее для больших значений длины Рэлея  $kz_0 \gg 1$  или же вдали от фокальной плоскости  $kz \gg 1$  выражение (2) хорошо аппроксимируется уравнением плоскости  $2F + DX = 0$ . Вблизи начала координат эта поверхность колоколообразно выгнута в сторону положительного направления оси  $z$  для  $G < 0$  и в обратном



**Рис. 1.** Параметрические кривые параксиального (кривая 1) и непараксиального (кривая 2) топологического диполя для:  $a$  — действительного и  $b$  — мнимого значения коэффициента  $B$ .

направлении для  $G > 0$ . Как раз этот прогиб поверхности и определяет основные различия в поведении параксиального и непараксиального диполей.

Для анализа поведения волновой системы на параметрической плоскости  $\tilde{F}, \tilde{G}$  воспользуемся параксиальным переходом  $kz_0 \gg 1$  и, учитывая (3), сведем точные выражения (2) к виду:

$$\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 + \frac{1 - \tilde{F}}{2} \tilde{Z}^2 = \frac{1 - \tilde{F}}{2}, \quad \tilde{G}\tilde{X} + 2(1 - \tilde{F}) = 0. \quad (4)$$

Поведение топологического диполя удобнее всего проводить на параметрической плоскости  $\tilde{F}, \tilde{G}$ . Для этого запишем уравнение траектории

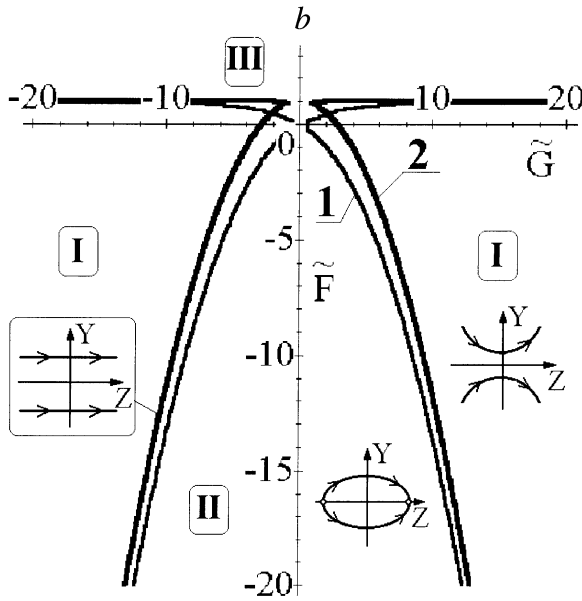
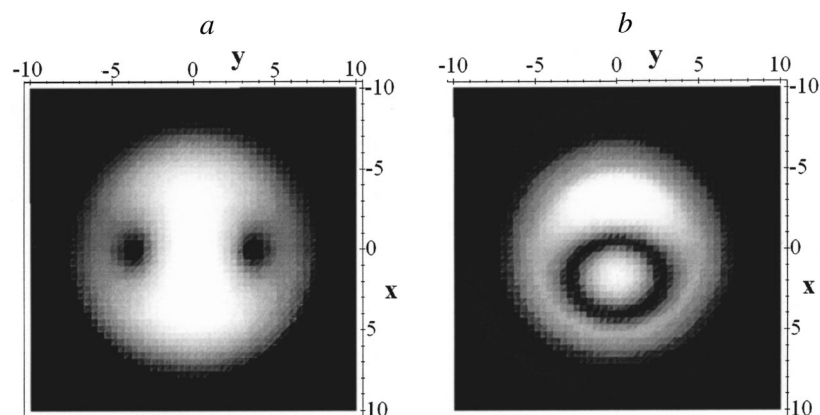


Рис. 1 (продолжение).

вихрей в параметрической форме:

$$\tilde{Y}^2 - \frac{\tilde{Z}^2}{c^2} = d^2, \quad c^2 = \frac{2}{1 - \tilde{F}}, \quad d^2 = \frac{1}{2} \left( (1 - \tilde{F}) - 8 \frac{(\tilde{F} - 1)^2}{\tilde{G}^2} \right). \quad (5)$$

Тогда характеристическими кривыми на параметрической плоскости будут:  $d^2(\tilde{F}, \tilde{G}) = 0$ ,  $\tilde{F} = 1$ . На рис. 1, а кривая 2 соответствует области изменения параметров диполя в соответствии с уравнениями (4). На том же рисунке приведены аналогичные кривые 1 для парааксиального случая, который здесь не рассматривается. Очевидно, что параметрические кривые слегка рассогласуются только для малых значений параметров  $|\tilde{F}|, |\tilde{G}| \propto 1$ , возрастание величины этих параметров приводит к асимптотическому совпадению результатов. На рис. 2, а, б приведено характерное распределение интенсивности в непарааксиальном пучке, переносящем топологический диполь для действительного значения



**Рис. 2.** Распределение интенсивности света ( $a, b$ ) и траектории оптических вихрей ( $c-f$ ) в параксиальном топологическом диполе:  $c$  —  $\tilde{F} = 5, \tilde{G} = 10$ ;  $d$  —  $\tilde{F} = 510, \tilde{G} = 2$  для действительных значений величины  $B$ ;  $e$  —  $\tilde{F} = 0.1, \tilde{G} = 15$ ;  $f$  —  $\tilde{F} = 0.1, \tilde{G} = 18$  при мнимых  $B$ .

параметра  $B$ . Вихревые траектории для соответствующих значений параметров  $\tilde{F}$  и  $\tilde{G}$ , приведенные на этом рисунке, получены на основании компьютерного анализа точных выражений для соответствующих поверхностей.

2. Считаем, что параметр  $B$  является *мнимой величиной*. Повторяя основные черты анализа, проведенного в первом случае, находим уравнения для непараксиальных траекторий:

$$\mathcal{R}^2 + 3FZ^2 + 2GXZ = F, \quad 4FZ(1 + Z^2) + GX [2(1 + Z^2) - \mathcal{R}^2] = 0. \quad (6)$$

Параметрическая кривая 2, приведенная на рис. 1,  $b$ , довольно хорошо сочетается с аналогичной кривой 2, представляющей события в соответствии с параболическим волновым уравнением. Несмотря на хорошее согласование параксиальных кривых, имеются существенные расхождения с течением событий в непараксиальном пучке.

В самом деле, почти на всей параметрической плоскости имеет место соответствие между параксиальным и непараксиальным поведением диполя для мнимого значения коэффициента  $B$  (рис. 2,  $c, d$ ). На первый

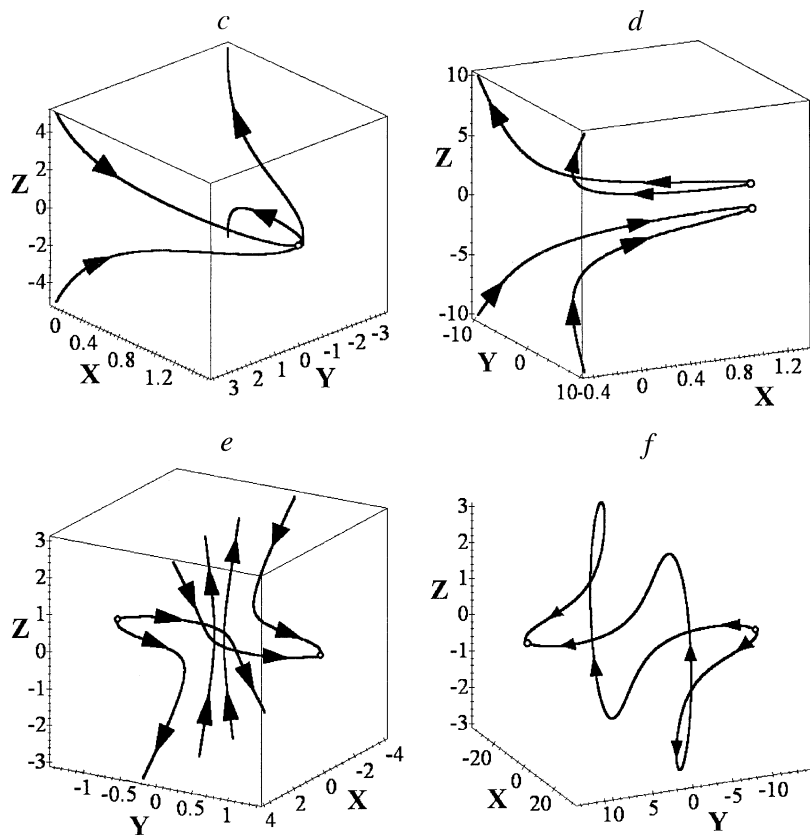


Рис. 2 (продолжение).

взгляд кажется, что в каждой плоскости сечения модового пучка можно обнаружить только две сингулярные точки, соответствующие вихрям диполя. Однако для относительно малых значений параметра  $F < 1$ , но для  $G > 10$  траектории вихрей имеют четыре ветви, две из которых пересекают фокальную плоскость (рис. 2, e). Поэтому в некоторых сечениях пучка присутствуют четыре сингулярные точки. Увеличение параметра  $F$  при постоянном  $G$  вызывает смыкание четырех ветвей в

одну замкнутую траекторию сложной формы (рис. 2, *d*). Теперь, если увеличивать значения параметра  $F$ , а значения  $G$  оставлять такими, чтобы рабочая точка находилась внутри области  $\Pi$ , то исходная траектория плавно трансформируется в квазиэллиптическую. Если зафиксировать  $F$  и увеличивать  $G$ , то кривые трансформируются в квазигиперболические траектории вихрей, пересекающие фокальную плоскость. Таким образом, вблизи фокальной плоскости при  $Z < 0$  рождается два вихря. Затем они распространяются в отрицательном направлении оптической оси, отражаются от границ разрешенной зоны, пересекают фокальную плоскость и вновь, отражаясь от противоположных границ разрешенной зоны, аннигилируют вблизи фокальной плоскости.

В заключение обратим внимание на тот факт, что в топологически нейтральном комбинированном модовом пучке, который не несет свободные оптические вихри, всегда можно найти большую область параметров  $\tilde{F}$  и  $\tilde{G}$ , для которых в окрестности фокальной плоскости  $Z = 0$  существует световое поле, свободное от связанных вихревых состояний. По-видимому, следует ожидать, что если первоначально в излучении присутствует единичный оптический вихрь, а затем в результате некоторого возмущения в пучке появляется топологический диполь, то в окрестности фокальной перетяжки вихри диполя аннигилируют, восстанавливая исходный пучок.

## Список литературы

- [1] Воляр А.В., Фадеева Т.А. // Оптика и спектроскопия. 1998. Т. 85. № 2. С. 295–303.
- [2] Зельдович Б.Я., Пилипецкий Н.Ф., Шкунов В.В. Обращение волнового фронта. М.: Наука, 1985. 248 с.
- [3] Berry M.V. // J. Mod. Opt. 1998. V. 45. P. 1845–1851.
- [4] Pyenkov A.V., Kreminskaya L.V., Soskin M.S., Vasnetsov M.V. // J. Nonlinear Optical Physics and Materials. 1997. V. 6. N 2. P. 169–180.
- [5] Воляр А.В. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. В. 13. С. 71–78.