

04

Условия реализации больцмановского распределения отрицательных ионов в плазме

© Е.А. Богданов, А.А. Кудрявцев

С.-Петербургский государственный университет,
E-mail: akud@ak2138.spb.edu

Поступило в Редакцию 10 мая 2001 г.

Самосогласованное поле в плазме, тормозящее наиболее подвижные заряженные частицы, приводит, как правило, к больцмановскому распределению электронов. Если за время жизни относительно объемных процессов отрицательный ион может пересечь разрядный объем, то для них также реализуется больцмановское распределение. Показано, что обычно это имеет место, если скорость прилипания электронов мала по сравнению со временем амбиполярной диффузии отрицательных ионов (ионной диффузии с электронной температурой). В обратном же случае профили электронов и отрицательных ионов становятся подобны.

В конце 50-х гг. практически одновременно Оскамом [1] и Томсоном [2] были предложены два простых соотношения между концентрациями заряженных частиц и их градиентами в стационарной плазме электроотрицательных газов. В [1] было постулировано, что профили концентраций электронов и отрицательных ионов подобны, т. е.

$$\nabla n_e/n_e = \nabla n_n/n_n, \quad n_e(x)/n_n(x) = \text{const}, \quad (1)$$

а в [2] утверждалось, что имеет место больцмановское распределение не только n_e , но и n_n :

$$T_e \nabla n_e/n_e = T \nabla n_n/n_n. \quad (2)$$

Условие (2) дает резко зависящее от отношения температур $k = T_e/T$ соотношение $n_e(x)/n_e(0) = n_n(x)/n_n(0)^{1/k}$, совпадающее с распределением (1) лишь в исключительном случае $T_e = T$. Поскольку в разряде $k \gg 1$, то из (2) следует практически плоское распределение $n_e(x) \approx n_{e0} \approx \text{const}$.

Границы применимости выражений (1), (2) не были четко определены, и различные авторы до сих пор отдают предпочтение тому или иному из них (см., например, [3–11]). Так, в работах [5–7] использование условия (2) было основополагающим при построении профилей концентраций и нахождении законов подобия в электроотрицательной плазме. В недавних работах [11–13], напротив, была высказана точка зрения в пользу пропорциональных условий (1), которые использовались ранее в [8–10]. При этом даже сама возможность использования бoльцмановского равновесия для отрицательных ионов в столкновительной плазме была подвергнута в [11–13] резкой и бескомпромиссной критике.

Поскольку вокруг этой проблемы, история которой насчитывает уже свыше 50 лет, возобновилась дискуссия (подробнее см. [11–13]), то представляется целесообразным рассмотреть этот вопрос подробнее. При анализе мы будем основываться на подходах, развитых ранее в [14,15].

Постановка задачи одинакова во всех работах [5–15] и использует дрейфово-диффузионные уравнения и бoльцмановское распределение для электронов $E = -T_e \nabla n_e / n_e$. Для плоскопараллельной геометрии ($x = \pm L$) исходная система имеет вид ($dn/dx \equiv n'$):

$$-D_p(n'_p + kn_p n'_e / n_e)' = Z_i n_e - K_r n_n n_p, \quad (3)$$

$$-D_n(n'_n - kn_n n'_e / n_e)' = K_a n_e - K_d n_n - K_r n_n n_p, \quad (4)$$

$$n_p = n_n + n_e. \quad (5)$$

Здесь K_a , K_d и K_r — константы прилипания, отлипания и ион-ионной рекомбинации соответственно, считающиеся заданными. Z_i — частота ионизации, которая представляет собой собственное число краевой задачи (3)–(5) и заранее неизвестна. Поэтому введение безразмерных переменных к (3)–(5) в единицах неопределенной Z_i (см., например, [8–13]), по нашему мнению, нецелесообразно.

Граничные условия к системе (3), (4) имеют вид [5–15]:

$$\begin{aligned} n_n = n_p = dn_n/dx = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm L, \\ dn_n/dx = dn_p/dx = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку поток отрицательных ионов на стенки отсутствует, то для усредненных по сечению концентраций (\bar{n}) из (4) имеем [5–15]:

$$K_a \bar{n}_e = K_d \bar{n}_n + K_r \bar{n}_n \bar{n}_p. \quad (7)$$

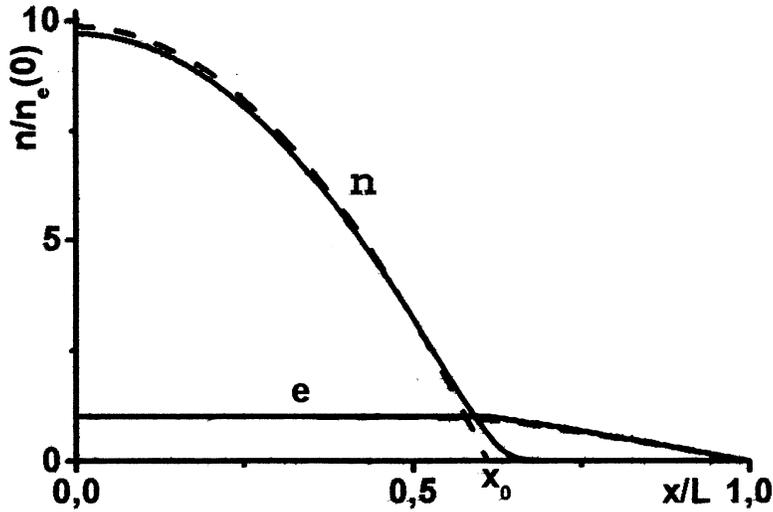


Рис. 1. Пространственное распределение концентраций заряженных частиц при $k = 33$, $\tau_{an}K_a = 0.1$ и $K_a/K_d = 4$. Сплошные линии — точное решение системы (3)–(5). Пунктир — расчет по приближенным формулам (15), (16).

С использованием различных упрощений система уравнений (3)–(5) исследовалась в цитированных выше работах [5–15]. Было установлено, что формируется резко неоднородное по сечению пространственное распределение концентраций заряженных частиц (рис. 1). Во внутренней области ион-ионной плазмы (ей соответствует индекс "0"; толщина ее $x = x_0$) сосредоточены практически все отрицательные ионы. Внешняя область электрон-ионной плазмы (индекс "1") состоит из электронов и положительных ионов, а отрицательные ионы в ней практически отсутствуют. Соотношения типа (1) или (2) имеют смысл только для области "0".

Структуру решения системы (3)–(5) наиболее просто определить из суммарного уравнения, введенного в [14]. Поделив уравнения системы (3), (4) на соответствующие коэффициенты диффузии и сложив их, при $k \gg 1$ получим уравнение

$$-2n_n''/k - n_e'' = n_e/l_e^2 - 2n_n/kl_n^2, \quad (8)$$

имеющее два характерных пространственных масштаба l_e и l_n :

$$1/l_e^2 = 1/l_{ion}^2 + 1/l_a^2 = Z_i/D_{ap} + K_a/D_{an} = L^2/(\tau_{ap}Z_i + \tau_{an}K_a), \quad (9)$$

$$1/l_n^2 = 1/l_{nd}^2 + 1/l_{nr}^2 = K_d/2D_n + n_p K_r/D_{np} = L^2/(\tau_n K_d + \tau_{np} K_r n_p). \quad (10)$$

В (9), (10) $D_{an,ap} = D_{n,p}(k+1)$, $D_{np} = 2D_n D_p/(D_n + D_p)$ — коэффициенты электрон-ионной и ион-ионной амбиполярной диффузии, $\tau_j = L^2/D_j$ — соответствующие характерные времена.

Длина l_e определяет максимально возможную толщину внешней области "1". В этой зоне из-за собирания отрицательных ионов амбиполярным полем в глубь плазмы их концентрация мала $n_n(x) \approx 0$, так что $n_e(x) \approx n_p(x)$. При пренебрежении членами с n_n уравнение (8) при $x \geq x_0$ имеет вид $-n_e'' = n_e/l_e^2$, что дает [14]:

$$n_e(x) = n_e(x_0) \sin\left(\frac{\pi(1-x)}{2(1-l_e)}\right) / \sin\left(\frac{\pi(1-x_0)}{2(1-l_e)}\right). \quad (11)$$

Распределение концентраций во внутренней области существенно зависит от соотношения между L и l_n : расстоянием, на которое отрицательный ион продиффундирует за время своей жизни относительно объемных процессов (см. [14,15]). Поскольку $\tau_{ap}Z_i \geq 1$ (равенство может достигаться лишь при пренебрежимо малых прилипании и рекомбинации), то с использованием (7) имеем следующую оценку:

$$l_n^2/l_e^2 < (\bar{n}_n/k\bar{n}_e)(1 + 1/(\tau_{an}K_a)). \quad (12)$$

При сильном прилипании ($\tau_{an}K_a > 1$) для типичных $\bar{n}_n/\bar{n}_e < k \approx 100$ выполняется $l_n < l_e < L$. При этом в исходной системе (3)–(5) можно пренебречь членами с ионной диффузией (как и предполагалось в [8–10]) и положить $x_0 \approx l_e$ [14]. Для центральных частей плазменного объема ($x < l_e$) из уравнения (8) следует локальный баланс плазмохимических процессов рождения и гибели ионов $n_e/l_e^2 = 2n_n/kl_n^2$, т.е. выполнение условия (см. [14]):

$$(Z_i/D_p + K_{at}/D_n)n_e = K_{at}n_n/D_n + K_r n_n(n_n + n_e)/(1/D_p + 1/D_n). \quad (13)$$

Когда отрицательные ионы гибнут за счет отлипания (отлипательный режим, $K_d \gg n_p K_r$), из (13) тривиально следует условие (1). На рис. 2 представлены результаты решения системы (3)–(5) для этого случая ($K_r = 0$) при различных значениях параметра $\tau_{an}K_a$. Видно, что по

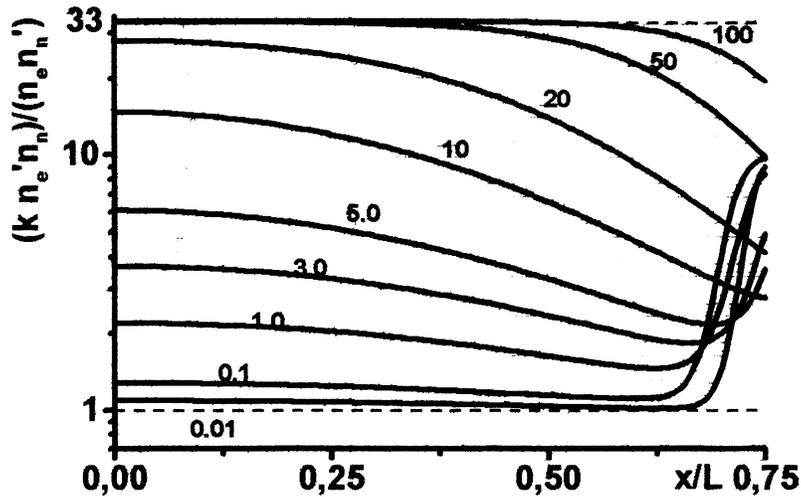


Рис. 2. Соотношение между пространственными распределениями концентраций электронов и отрицательных ионов при $k = 33$ и $K_a/K_d = 4$ в зависимости от $\tau_{an}K_a$ (цифры у кривых). Пунктиром нанесены предельные значения 1 и 33, соответствующие условиям (2) и (1).

мере увеличения $\tau_{an}K_a > 1$ соотношение между концентрациями во внутренней области асимптотически стремится к распределению (1) (при $\tau_{an}K_a > 10$). Для рекомбинационного ($K_d < n_p K_r$) режима из (12) следует связь (см. [14]) $\nabla n_e/n_e = \nabla n_n/n_n + \nabla n_p/n_p \approx 2\nabla n_n/n_n$, дающая, в отличие от (1), более плоское распределение ионов, чем электронов.

Если длина $l_n > L$, то ион способен за счет собственной диффузии пересечь весь разрядный объем. Поэтому, чтобы запретить их, во внутренней области, так же как и для электронов, должно выполняться больцмановское распределение (2). Из (12) следует, что собственная диффузия отрицательных ионов доминирует ($l_d > L$) лишь при малой роли прилипания по отношению к времени амбиполярной диффузии отрицательных ионов ($\tau_{an}K_a < 1$). При уменьшении параметра $\tau_{an}K_a$ распределение (2) во внутренней области выполняется со все большей точностью (рис. 2). Таким образом, в зависимости от значения параметра $\tau_{an}K_a$, квадратично зависящего от давления газа, могут реализовываться оба из дискутируемых в литературе соотношений (1), (2). Переход от больцмановского распределения (2) при малом прилипании

$\tau_{an}K_a < 1$ (низкие давления газа) к пропорциональным условиям (1) при повышении давления газа ($\tau_{an}K_a > 1$) наглядно виден из рис. 2.

При выполнении (2), как уже отмечалось выше, во внутренней области при $k \gg 1$ имеет место плоский профиль электронов $n_e(x) \approx n_{e0}$. В уравнении (3) для $n_p(x)$ при этом оба члена в левой части примерно равны друг другу, так что оно имеет вид $-2n_n''/k = Z_i n_{e0}$. Это дает параболическое распределение концентраций ионов (см. [14] и подробнее в [5–7]):

$$n_n(x) = n_{n0}(1 - x^2/x_0^2), \quad n_{n0} = kZ_i x_0^2/4. \quad (14)$$

Для определения неизвестных x_0 и Z_i в (13), (14) проще всего использовать условия интегрального баланса для концентраций n_n (7) и соответствующее для n_p . Интегрируя уравнения (3), (4) по координате и используя (11), (14), получим следующие соотношения для определения неизвестных x_0 и Z_i :

$$K_a n_{e0}(x_0 + (2l_e/\pi) \operatorname{tg}(\pi(1 - x_0)/2l_e)) = 2K_d n_{n0} x_0/3 + 8K_r x_0 n_{n0}^2/15, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Z_i n_{e0}(x_0 + (2l_e/\pi) \operatorname{tg}(\pi(1 - x_0)/2l_e)) - 8K_r x_0 n_{n0}^2/15 \\ = \pi D_{ap} n_{e0}/(2l_e \sin(\pi(1 - x_0)/2l_e)). \end{aligned} \quad (16)$$

Расчеты по простым формулам (14)–(16) хорошо соответствуют решению системы (3)–(5) (рис. 1). Для более грубых оценок можно ограничиться первыми членами разложения синуса и тангенса в (15), (16). С учетом того, что в рассматриваемом случае (2) $Z_i > K_a$, подставляя n_{n0} из (14), получим простые соотношения:

$$Z_i = 2D_{ap}/(L^2 - x_0^2), \quad (17)$$

$$3K_a D_n/(2kK_d D_p) = x_0^3/(L^2 - x_0^2)(L + x_0) \approx (x_0/L)^3 + (x_0/L)^6 \quad (18)$$

в отлипательном режиме и

$$15K_a D_n^2/(4k^2 K_r D_p^2) = x_0^5/(L^2 - x_0^2)^2(L + x_0) \approx (x_0/L)^5 + (x_0/L)^{10} \quad (19)$$

в рекомбинационном режиме.

Поскольку левые части (18), (19) обычно малы (меньше единицы), а правые сильно зависят от x_0 , то сами значения x_0 меняются довольно слабо и лежат в диапазоне $0.5 \leq x_0 \leq 0.8$. Отметим, что при пренебрежении ионной диффузией рассматриваемый случай слабого

прилипания ($\tau_{an}K_a \ll 1$), когда длина $l_e \approx L$ соответствует существенно узкому шнуру ион-ионной плазмы $x_0 \approx \tau_{an}K_aL \ll L$ (см. [9–10]).

Таким образом, при слабом прилипании, когда собственная диффузия отрицательных ионов доминирует над объемными процессами, болцмановское распределение реализуется не только для электронов, но и для отрицательных ионов. Во всех представляющих интерес случаях это имеет место при малой роли прилипания по отношению к времени амбиполярной диффузии отрицательных ионов. В обратном случае сильного прилипания баланс концентраций во внутренней области определяется объемными процессами и концентрации ионов и электронов подобны друг другу.

Авторы выражают глубокую благодарность Л.Д. Цендину за стимулирующие обсуждения и помощь в работе.

Список литературы

- [1] *Oskam H.J.* // Philips. Rev. Repts. 1958. V. 13. P. 335–343.
- [2] *Tompson J.B.* // Proc. Phys. Soc. 1959. V. 73. P. 818–829.
- [3] *Meccu G.* Отрицательные ионы. М.: Мир, 1979. 754 с.
- [4] *Rogoff G.L.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1985. V. 18. P. 1533–1545.
- [5] *Lichtenberg A.J., Vahedi V., Lieberman M.A., Roglien T.* // J. Appl. Phys. 1994. V. 75. P. 2339–2347.
- [6] *Lichtenberg A.J., Louznetsov I.G., Lee T.D., Lieberman M.A., Kaganovich I.D., Tsandin L.D.* // Plasma Sources Sci. Technol. 1997. V. 6. P. 437–449.
- [7] *Lichtenberg A.J., Lieberman M.A., Louznetsov I.G., Chung T.H.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2000. V. 9. P. 45–56.
- [8] *Ferreira C.M., Gousset G., Touzeau M.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1988. V. 21. N 3. P. 1403–1423.
- [9] *Daniels P.R., Franklin R.N.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1989. V. 22. P. 780–785.
- [10] *Daniels P.R., Franklin R.N., Snell J.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1990. V. 23. P. 823–831; 1993. V. 26. P. 1638–1649.
- [11] *Franklin R.N., Snell J.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1999. V. 32. P. 2190–2203.
- [12] *Franklin R.N., Snell J.* // J. Plasma Phys. 2000. V. 64. P. 131–153.
- [13] *Franklin R.N.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2001. V. 10. P. 174–179.
- [14] *Цендин Л.Д.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. № 12. С. 2318–2322; 1989. Т. 59. № 1. С. 21–28.
- [15] *Рожанский А.В., Цендин Л.Д.* Столкновительный перенос в частично-ионизированной плазме. М.: Энергоатомиздат, 1988. 248 с. *Rozanskiy A.V., Tsandin L.D.* Collision Transport in Partially Ionized Plasma. Gordon & Breach, 2001.