01;03

Электромагнитное излучение нелинейно осциллирующей заряженной капли

© *С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Д.Ф. Белоножко, А.С. Голованов*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: shir@uniyar.ac.ru

В окончательной редакции 31 мая 2001 г.

В рамках асимптотического аналитического анализа нелинейных колебаний заряженной капли при многомодовой начальной деформации ее равновесной сферической формы показано, что когда в спектре мод, определяющих начальную деформацию, присутствуют две соседние моды, то центр заряда капли совершает осцилляции возле центра масс, что приводит к генерации электромагнитного излучения дипольного вида.

1. Исследование капиллярных колебаний и устойчивости заряженной капли представляет значительный интерес в связи с разнообразием академических, технических и технологических приложений, в которых заряженная капля играет важную роль (см., например, [1–3] и указанную там литературу). В частности, вопросы, связанные с наличием электромагнитного излучения от колеблющихся заряженных облачных и дождевых капель представляют интерес в связи с проблемами радиолокационного зондирования метеорологических объектов [4]. Но если электромагнитное излучение, связанное с колеблющимися каплями в линейном приближении, по величине деформации капли являлось предметом исследования [5], то излучение от заряженной капли в нелинейных приближениях до сих пор не рассматривалось, хотя ряд общих нелинейных анализов осцилляций заряженной капли уже выполнен (см., например [6–9]).

2. Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности капли идеальной, несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ, коэффициентом поверхностного натяжения σ. Примем, что капля находится в вакууме, ее полный заряд равен Q, а объем определяется объемом сферы с радиусом R. В начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли претерпевает виртуальное осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли.

Поскольку начальное возмущение поверхности капли осесимметрично и мало, примем, что форма капли — осесимметричная как в начальный момент, так и во все последующие моменты времени, а уравнение, описывающее ее поверхность, в полярной системе координат с началом в центре капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, имеет вид

$$r(\theta, t) = 1 + \xi(\theta, t), \quad |\xi| \ll 1.$$

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным, и примем, что поле скоростей движения жидкости в капле $V(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется функцией потенциала скорости $\psi(\mathbf{r}, t)$. Математическая формулировка задачи об электромагнитном излучении колеблющейся капли имеет вид:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \qquad \Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}; \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0;$$

$$r \to 0: \qquad \psi(\mathbf{r}, t) \to 0;$$

$$r \to \infty: \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \to 0;$$

$$r = 1 + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta};$$

$$\Delta p - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2 + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E})^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n}.$$

Для замыкания выписанной системы введем условия сохранения полного заряда и объема капли, а также условия неподвижности центра масс:

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi)ds = Q, \; S = [r = 1 + \xi(\theta, t), 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi];$$

$$\int_V r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi,$$

$$V = [0 \le r \le 1 + \xi(\theta, t), 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi];$$

$$\int_V \mathbf{e}_r \cdot r^3 dr \cdot \sin\theta d\theta d\phi = 0,$$

$$V = [0 \le r \le 1 + \xi(\theta, t), 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi].$$

Начальные условия задаются в виде начальной деформации равновесной сферической формы капли и равенства нулю начальной скорости движения поверхности

$$t=0:\ \xi_0 P_0(\mu)+\xi_1 P_1(\mu)+\xi\sum_{j\in\Xi} h_j P_j(\mu);\ \sum_{j\in\Xi} h_j=1;\ \frac{\partial\xi(\theta)}{\partial t}=0;\ (1)$$

$\mu\equiv\cos\theta$; h_j — безразмерные коэффициенты, определяющие вклад различных колебательных мод в начальную деформацию капли; Ξ — множество значений номеров возбужденных мод; Δp — перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности капли; $\mathbf{e}_r$ — радиальный орт сферической системы координат; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля собственного заряда капли; ε — амплитуда начального возмущения формы поверхности капли; $P_j(\mu)$ — полиномы Лежандра порядка j; ξ_0 и ξ_1 — константы, определяемые из условий постоянства объема и неподвижности центра масс в начальный момент времени и с точностью до слагаемых второго порядка малости по ε, равные:

$$\xi_0\approx-\varepsilon^2\sum_{j\in\Xi}\frac{h_j^2}{(2j+1)}+O(\varepsilon^3);\ \xi_1\approx-\varepsilon^2\sum_{j\in\Xi}\frac{9jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)}+O(\varepsilon^3).$$

3. Решение сформулированной задачи в линейном по $\xi(\theta,t)/R$ приближении, приведенное в [5], приводит к размерному дисперсионному уравнению для описываемой системы:

$$\omega_j^2\equiv\frac{\sigma}{\rho R^3}\,j(j-1)\left[(j+2)-\frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}\right]+2i\omega_j\,\frac{Q^2(j-1)^2}{8\pi\rho c R^5},$$

где i — мнимая единица. Мнимая часть частоты, получающейся из решения дисперсионного уравнения, определяет затухание капиллярных колебаний капли, связанное с излучением электромагнитных волн. Выражение для мощности излучения на частоте ω_j, предлагаемое в [5], имеет вид:

$$I=-\frac{dW_j}{dt}\equiv W_j\,\frac{Q^2(j-1)^2}{4\pi\rho c R^5},\qquad(1)$$

где W_j — энергия поверхностных колебаний в j-й моде.

Согласно оценкам [5], исходящим из предположения, что основными излучателями являются свободно падающие в облаке сильно заряженные капли с $R = 1\,\mathrm{mm}$, коагулирующие с более мелкими и потому осциллирующие, интенсивность интегрального мультипольного излучения (начиная с квадрупольного, поскольку в линейном анализе дипольное излучение не обнаруживается) на частоте $120\,\mathrm{kHz}$ из облака диаметром $5\,\mathrm{km}$ равна $\approx 30\,\mathrm{mW}$. Эта цифра представляется основательно завышенной, поскольку реально наблюдаемые значения концентрации капель крупных размеров и их заряды существенно ниже использованных в [5] (см. [10]).

4. Решение сформулированной задачи асимптотическим методом многих масштабов (детали применения этого метода к анализу устойчивости заряженных капель можно найти, например, в [6,7,9]) во втором порядке малости по отношению $\xi(\theta, t)/R$ показывает, что когда в спектре начально возбужденных мод присутствуют две соседние, то при капиллярных осцилляциях капли возбуждается мода с $n = 1$ (трансляционная мода) и центр заряда капли начинает совершать колебания возле положения центра масс. Размерная зависимость от времени амплитуды таких осцилляций имеет вид:

$$R_q \equiv \varepsilon^2 R \sum_{j\in\Xi} \frac{3i(i-2)}{(2j-1)(2j+1)}\, h_j h_{j-1}$$

$$\times \left[\cos[(\omega_j + \omega_{j-1})t] + \cos[(\omega_j - \omega_{j-1})t]\right]; \qquad (2)$$

$$\omega_j^2 \equiv \frac{\sigma}{\rho R^3}\, j(j-1) \left[(j+2) - \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}\right].$$

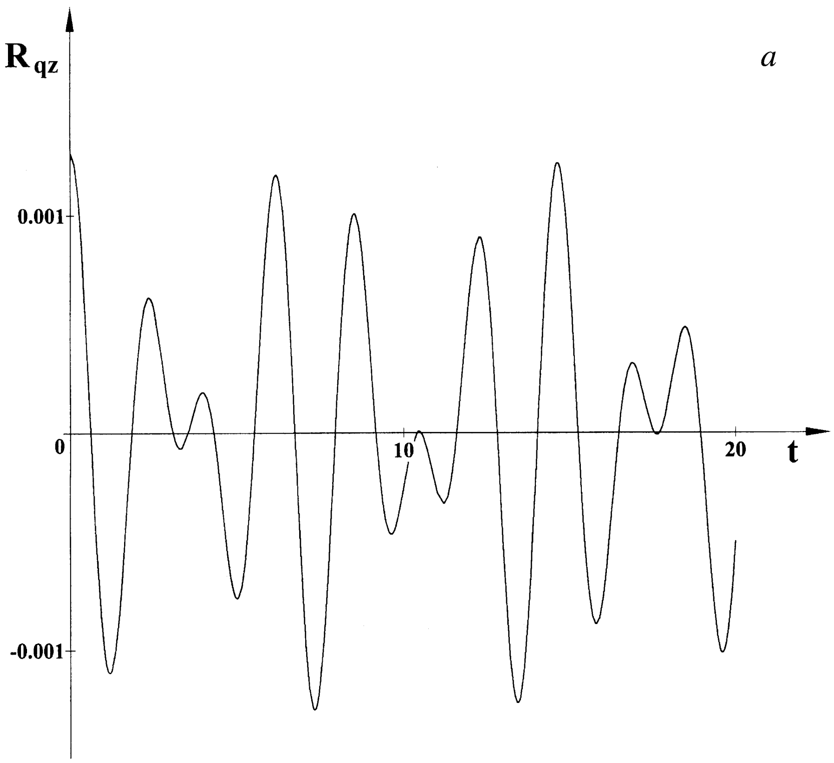
На рисунке a и b приведены временны́е зависимости положения центра заряда осциллирующей капли при различных начальных возмущениях.

Наличие осцилляций центра собственного заряда капли превращает ее в излучатель электромагнитных волн дипольного типа. Интенсивность электромагнитного излучения от единичной капли I_e в соответствии с известным [11] выражением запишется в виде:

$$I_e = \frac{4}{3c^3}\left\{|d_{\omega_j+\omega_{j+1}}|^2(\omega_j + \omega_{j+1})^4 + |d_{\omega_{j+1}-\omega_j}|^2(\omega_{j+1} - \omega_j)^4\right\}, \qquad (3)$$

где c — скорость света в вакууме; d_{ω_j} — дипольный момент капли, осциллирующей с частотой ω_j. В рассматриваемой ситуации имеем:

$$d_{\omega_j+\omega_{j+1}} \equiv d_{\omega_{j+1}-\omega_j} \equiv Q|R_q| \equiv Q\varepsilon^2 R \sum_{j\in\Xi} \frac{3j(j-2)}{(2j-1)(2j+1)}\, h_j h_{j-1},$$

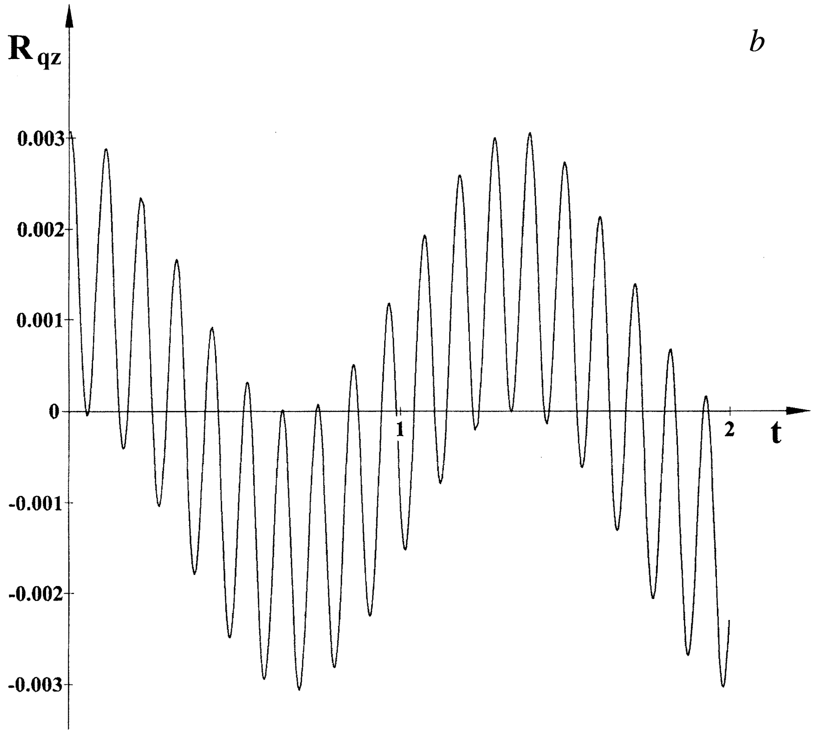


Зависимость безразмерного смещения центра заряда осциллирующей капли R_{qz}, связанная с возбуждением трансляционной моды $(j = 1)$, от безразмерного же времени t, когда начальная деформация равновесной сферической формы капли задана в виде: a — $0.5\varepsilon\big(P_3(\mu) + P_4(\mu)\big)$; b — $0.5\varepsilon\big(P_{10}(\mu) + P_{11}(\mu)\big)$.

а потому из (3) получим:

$$I_e = \frac{4Q\varepsilon^2 R}{c^3} \sum_{j\in\Xi} \frac{j(j-2)h_j h_{j+1}}{(2j-1)(2j+1)} \big\{(\omega_j + \omega_{j+1})^4 + (\omega_{j+1} - \omega_j)^4\big\}. \quad (4)$$

Проведем оценку интенсивности фонового электромагнитного излучения на основе (4), когда возбуждение трансляционной моды связано с возбуждением всего двух соседних мод с $j = 100$ капли со средними



(*Продолжение рисунка*).

характеристиками: радиусом $R = 30\,\mu$m и зарядом $Q = 2.5 \cdot 10^5$ CGSE, концентрация которых по справочным данным [6] в кучевом облаке $n \approx 10^3\,\mathrm{cm}^{-3}$. Примем также, что $\varepsilon^2 = 0.1$, $h_{100} = h_{101} = 0.5$, $\sigma = 73\,\mathrm{dyne/cm}$, $\rho_1 = 1\,\mathrm{g/cm}^3$. Тогда интенсивность дипольного электромагнитного излучения при возбуждении колебаний капель за счет микрофизических внутриоблачных процессов (коагуляции с более мелкими, испарения, конденсации, гидродинамического и электрического взаимодействия с соседними каплями) из облака диаметром 5 km составит

$$I \approx 10^{-6} W$$

и будет идти на частотах порядка мегагерц.

Если принять, что возбуждены не две соседние моды, но целый диапазон соседних мод от j до $j + m$, то интегральная интенсивность излучения увеличится примерно в m раз.

5. Заключение. Фоновое дипольное электромагнитное излучение заряженных облаков естественного и искусственного происхождения может быть связано с нелинейным эффектом: возбуждением во втором порядке малости трансляционной моды осциллирующей заряженной капли, реализующимся, когда в спектре колебательных мод, определяющих начальную деформацию капли, имеются две с соседними номерами.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00–15–9925.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[2] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 5. С. 22–27.
[3] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЭОМ. 2000. № 4. С. 17–28.
[4] *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 463 с.
[5] *Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П.* // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
[6] *Pelekasis N.A., Tsamopoulos J.A., Manolis G.D.* // Phys. Fluids. A. 1990. V. 2. № 8. P. 1328–1340.
[7] *Feng Z.C.* // J. Fluid Mech. 1997. V. 333. P. 1–21.
[8] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 8. С. 45–52.
[9] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 2. С. 27–34.
[10] *Облака* и облачная атмосфера: Справочник / И.П. Мазин, А.Х. Хргиан, И.М. Имянитов. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
[11] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.