09

Модель связанных резонаторов для расчета дифракции электромагнитных волн на одномерных брэгговских решетках планарной геометрии

© П.В. Петров

Российский федеральный ядерный центр —
Всероссийский институт технической физики,
Снежинск, Челябинская область
E-mail: p.v.petrov@vniitf.ru

Поступило в Редакцию 12 февраля 2001 г.

Рассмотрена задача возбуждения одномерных брэгговских решеток планарной геометрии. Предложена модель связанных резонаторов для исследования процессов дифракции электромагнитных полей при произвольной гофрировке поверхности волновода, в основе которой лежат соотношения, выведенные из двумерной граничной задачи для уравнения Гельмгольца без каких-либо приближений. Представлен конкретный вид уравнений для прямоугольной гофрировки пластин, составляющих решетку.

Одним из перспективных подходов к созданию электродинамических систем для мазеров на свободных электронах является использование брэгговских резонаторов [1–4], реализующих распределенную обратную связь и обеспечивающих пространственную когерентность излучения. Брэгговские резонаторы представляют собой отрезки волноводов с одно- или двупериодической гофрировкой (брэгговские решетки) [1,5].

Математические модели [1–5], используемые для описания спектра мод и коэффициентов отражения брэгговских решеток, основаны на теории связанных мод [1], в которой деформация поверхности волновода $l(\mathbf{r}) = 0$, определяющаяся гофрировкой, заменяется "эквивалентным" граничным условием на невозмущенной поверхности регулярного вол-

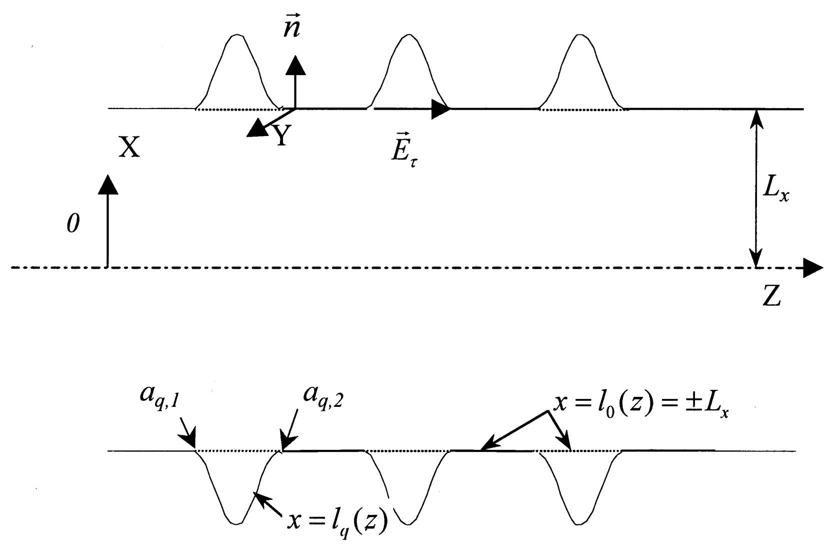

Рис. 1. Планарная модель брэгговской решетки.

новода (рис. 1) [6]:

$$\mathbf{E}_\tau = \nabla\big(l(\mathbf{r})\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\big) - i\,\frac{\omega}{c}\,l(\mathbf{r})[\mathbf{n},\mathbf{H}], \tag{1}$$

$\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности волновода, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H} \propto \exp(-i\omega t)$ — электрическое и магнитное поля в регулярном волноводе, ω — циклическая частота излучения.

Условиями применимости этого приближения являются [6]: малость деформации (высота гофры существенно меньше длины волны падающего излучения и периода гофры); малость угла пересечения между деформированной и недеформированной поверхностями.

Практически во всех экспериментах с брэгговскими резонаторами используется прямоугольная гофрировка решеток[1–5], при которой, как правило, выполняется условие малости деформации и не выполняется условие малости углов пересечения поверхностей. В связи с этим представляется весьма актуальной задачей разработка физико-математической модели, которая бы адекватно описывала дифракцию электромагнитных волн на одно- и двумерных брэгговских решетках без использования теории возмущений.

В настоящей работе представлена модель связанных резонаторов для расчета дифракции электромагнитных полей на планарных одномерных брэгговских решетках.

Рассмотрим полый планарный волновод с идеально проводящими стенками, бесконечный в направлении оси OY, симметричный относительно оси OX, с конечным числом гофров, заданных функциями $x = l_q(z)$, $0 \leqslant z \leqslant L$, $q = \overline{1, M}$, и определенный таким образом, что контур невозмущенного (регулярного) волновода соответствует $x = l_0(z) = \pm L_x$ (рис. 1). Будем рассматривать случай возбуждения TM-мод, когда отличны от нуля только компоненты E_x, E_z, H_y. Пусть со стороны отрицательных z брэгговская решетка возбуждается TEM-модой невозмущенного волновода. В этом случае исходная векторная задача по нахождению электромагнитных полей сводится к краевой задаче для скалярного уравнения Гельмгольца относительно компоненты магнитного поля $H \equiv H_y(x, z)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) H = 0, \quad (x, z) \in \Omega = \bigcup_{q=1}^{M} \Omega_q \bigcup \Omega_0, \tag{2}$$

где $\Omega_0 = \{0 < x < L_x, -\infty < z < \infty\}$ — область регулярного волновода; $\Omega_q = \{L_x < x < l_q(z), 0 < z < L\}$ — область q-го гофра, $q = \overline{1, M}$, со следующими граничными условиями:

на металлической поверхности и плоскости симметрии OZ

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{S = \bigcup\limits_{q} \{x = l_q(z)\} \bigcup \{x = 0\}} = 0; \tag{3}$$

условием возбуждения решетки TM модой при $z = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial z} + ikH = 2ik; \tag{4}$$

и условием свободного выхода волн из системы при $z = L$

$$\frac{\partial H}{\partial z} - ikH = 0. \tag{5}$$

Решение уравнения (2) с граничными условиями (3)–(5) будем искать отдельно для каждой из q гофр и области регулярного волновода, где представим его в виде суммы падающего и рассеянного полей:

$$H = \begin{cases} H_0 + H_s, & \mathbf{r} \in \Omega_0, \\ H_q, & \mathbf{r} \in \Omega_q. \end{cases} \tag{6}$$

С учетом условия непрерывности тангенциальных компонент поля на границе с регулярным волноводом $x = l_0(z) = L_x$ справедливо соотношение

$$H_q(z) = H_0(z) + H_s(z). \tag{7}$$

Будем полагать, что на границе гофрировки и регулярного волновода составляющая электрического поля вдоль оси OZ определяется некоторой функцией $E_z(x = L_x, z) = E_\tau(z)$. Тогда для нахождения H_s в области Ω_0 получаем следующую краевую задачу:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) H_s = 0, \qquad \left[\pm\frac{\partial H_s}{\partial z} + ikH_s\right]\Big|_{z=0,L} = 0,$$

$$\frac{\partial H_s}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial H_s}{\partial x}\Big|_{x=L_x} = -ikE_\tau(z), \tag{8}$$

решение которой может быть представлено через функцию Грина [7]:

$$H_s(x, z) = -\frac{ik}{4\pi}\int\limits_0^L dz' G_k(x, z, L_x, z') \cdot E_\tau(z'), \tag{9}$$

$$G_k(x, z, x', z') = \frac{2\pi i}{L_x}\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu \cos(g_\nu x)\cos(g_\nu x')\frac{e^{i|z-z'|h_\nu}}{h_\nu},$$

$$g_\nu = \frac{\pi\nu}{L_x}, \qquad h_\nu = \sqrt{k^2 - g_\nu^2}, \varepsilon_\nu = \begin{cases} 2, & \nu = 0, \\ 1, & \nu \neq 0. \end{cases} \tag{10}$$

На поверхности регулярного волновода выражение (9) для $H_s^s(z) \equiv H_s(x = L_x, z)$ удобно записать в более компактной операторной форме:

$$H_s^s = -ik\hat{G}_R E_\tau, \quad \hat{G}_R = \frac{i}{2L_x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{h_\nu}\int\limits_0^L dz' \cdot \exp(ih_\nu|z - z'|). \tag{11}$$

Определим связь между электрическим полем $E_\tau(z)$ и магнитным полем H_q на границе пересечения q-го гофра Ω_q с регулярным волноводом $x = l_0(z)$, $a_{q,1} \leqslant z \leqslant a_{q,2}$. В области $\Omega_q = \{a_{q,1} \leqslant z \leqslant a_{q,2}, L \leqslant x \leqslant l_q(z)\}$ магнитное поле $H_q(x,z)$ является решением уравнения (2) с однородными условиями Неймана (3) на металлической поверхности гофры $x = l_q(z)$ и условием (7) на границе с регулярным волноводом $x = l_0(z)$. Используя формулу Грина [7], $H_q(x,z)$ можно выразить через значения поля на границе области q-го гофра $S_q = \{x = l_q(z)\} \bigcup \{x = l_0(z)\}$, $a_{q,1} \leqslant z \leqslant a_{q,2}$:

$$H_q(x,z) = \oint_{S_q} d\mathbf{S}_q H(\mathbf{r}'_s) G_q(x,z,\mathbf{r}'_s)$$

$$= \int_{a_{q,1}}^{a_{q,2}} dz' (H_0^s(z') + H_s^s(z')) G_q(x,z,z'), \tag{12}$$

где G_q — поверхностная функция Грина для уравнения Гельмгольца в области Ω_q, удовлетворяющая тем же граничным условиям на S_q, что и искомое поле $H_q(x,z)$. Соответственно электрическое поле $E_z^q(x,z)$ в области q-ой гофры будет равно

$$E_z^q(x,z) = -\frac{1}{ik}\frac{\partial H_q(x,z)}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{ik}\int_{a_{q,1}}^{q_{q,2}} dz' (H_0^s(z') + H_s^s(z')) \frac{\partial}{\partial x} G_q(x,z,z'). \tag{13}$$

Учитывая расположение гофр, выражение для $E_\tau(z)$ на всей поверхности регулярного волновода $z \in [0, L]$ можно записать через функцию Хэвисайда $\eta(x) = \{0, x < 0; 1, x > 0\}$ в следующем операторном виде:

$$E_\tau(z) = -\frac{1}{ik}\hat{G}_{in}(H_0^s + H_s^s), \quad \hat{G}_{in} = \sum_{q=1}^{M} (\eta(z - a_{q,1}) - \eta(z - a_{q,2}))\hat{G}_{in}^q, \tag{14}$$

$$\hat{G}_{in}^q = \int_{a_{q,1}}^{a_{q,2}} dz' \frac{\partial}{\partial x} G_q(x,z,z')\Big|_{x=L_x}. \tag{15}$$

Используя соотношения (11) и (14), для определения $H_s^s(z)$ получим интегральное уравнение Фредгольма I-го рода:

$$H_s^s - \hat{G}_R \hat{G}_{in} H_s^s = \hat{G}_R \hat{G}_{in} H_0^s, \tag{16}$$

решение которого можно записать в следующем виде:

$$H_s^s = (\hat{I} - \hat{G}_R \hat{G}_{in})^{-1} \hat{G}_R \hat{G}_{in} H_0^s. \tag{17}$$

По решению $H_s^s(z)$ из соотношения (14) можно определить $E_\tau(z)$ и в соответствии с выражением (9) рассчитать поле $H_y(x, z)$ в любой точке электродинамической структуры.

Полученное выражение позволяет сделать некоторые качественные выводы о поведении решения, в частности приблизительно определить область резонансного рассеяния. Если гофрировка задана некоторой периодической функцией $\hat{G}_{in} \sim \cos(hz)$, $h = 2\pi/b$, а $\hat{G}_R \sim \exp(ih_\nu|z-z'|)$, тогда для рассеянного поля в области $z < 0$ получим:

$$H_s \sim \hat{G}_R \hat{G}_{in} H_0 \propto \exp(-ih_\nu z) \int dz' (\exp(i(h_\nu + h_0 + h)z') \\ - \exp(i(h_\nu + h_0 - h)z')). \tag{18}$$

Отсюда ясно, что резонансное отражение волны с продольным волновым числом h_0 в волну с волновым числом h_ν будет возникать, если суммы величин волнового вектора падающей и отраженной волн близки к величине волнового вектора гофрировки (условие брэгговского резонанса):

$$h_\nu + h_0 \approx h. \tag{19}$$

Оператор $\hat{G}_{in}$ определяет влияние формы гофр и их расположения на дифракционные поля и наиболее простой вид имеет для прямоугольной гофрировки шириной a, глубиной $d = \max(l_q(z))$, $z \in [0, L]$, нанесенной на поверхность плоского волновода с периодом b. Используя явный вид функции Грина в виде ряда для уравнения Гельмгольца (2) в прямоугольной области с однородными условиями Неймана на трех границах и неоднородным условием Дирихле на одной, получим выражение для оператора $\hat{G}_{in}$:

$$\hat{G}_{in}(z, z') = -\frac{2}{a}\sum_{q=0}^{M-1}\left[\eta(z_q) - \eta(z_q - a)\right]$$

$$\times\left(\sum_n \gamma_n \cos(\chi_n z_q) \int_{z_q}^{z_q+a} dz' \cos\bigl(\chi_n(z' - bq)\bigr)\right),$$

$$\gamma_n = \frac{\beta_n}{\varepsilon_n}\tanh(\beta_n d),\ \chi_n = \frac{\pi n}{a},\ \beta_n = \sqrt{\chi_n^2 - k^2},\ z_q = z - qb. \qquad (20)$$

Практическое использование брэгговских решеток связано с использованием их отражающих свойств, и наибольший интерес представляет определение области высокоэффективного и селективного отражения электромагнитных волн в зависимости от длины гофрировки и частоты падающего излучения при заданных значениях периода гофры и ее глубины.

Определение отражающих свойств одномерной брэгговской решетки проводилось для плоского волновода с расстоянием между пластинами $2L_x = 1$ cm, прямоугольной гофрировкой с периодом 0.2 cm и шириной гофры $a = 0.1$ cm.

На рис. 2 приведены результаты расчетов зависимости коэффициента отражения TEM моды с частотой $\nu = 75$ GHz, для которой выполняется условие брэгговского резонанса (19), от длины гофрировки, полученных методом связанных резонаторов (МСР) — численным решением уравнения (17) с оператором $\hat{G}_{in}$ в виде (20). Для сравнения здесь же представлены значения коэффициента отражения, полученные методом связанных мод, (МСМ) [1,5], и данные расчета методом конечных элементов (МКЭ) [8].

Зависимость полного коэффициента отражения от частоты TEM-моды, падающей на брэгговскую решетку длиной $L = 5$ cm, рассчитанная разными численными методами, приведена на рис. 3. Видно, что область отражения волны определяется условием брэгговского резонанса (19): для частоты $\nu = 75$ GHz идет отражение TEM-моды в TEM-моду и при частоте $\nu = 78$ GHz — отражение TEM-моды в TM_{02}-моду. Однако значения коэффициента отражения, определенные МКЭ и МСР, довольно существенно отличаются от значений, даваемых

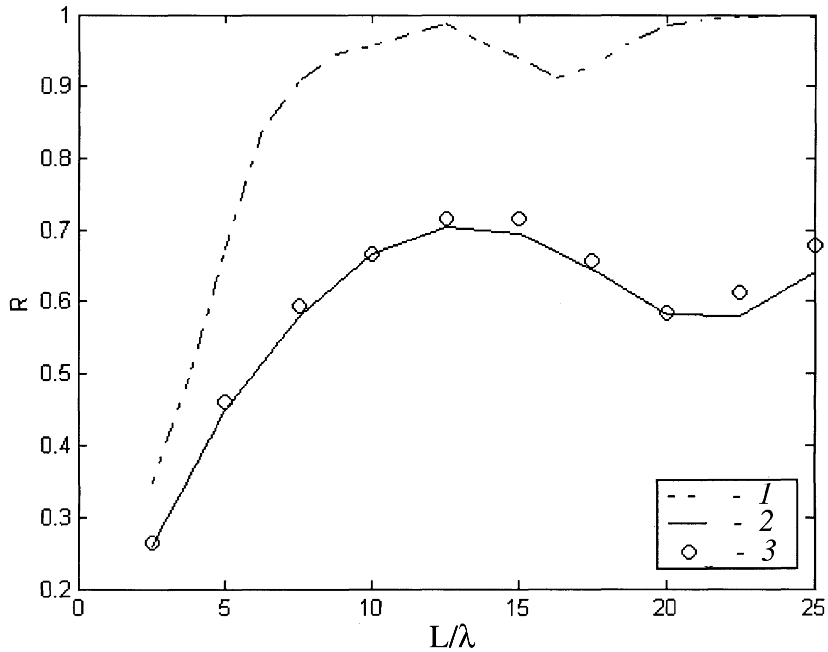

Рис. 2. График зависимости коэффициента отражения TEM волны для брэгговского резонанса ($h_\nu + h_0 \approx h$, $\nu = 75\,\mathrm{GHz}$) от длины одномерной брэгговской решетки с периодом 0.2 cm с прямоугольной гофрировкой шириной $a = 0.1$ cm и глубиной $d = 0.03$ cm, рассчитанный методом связанных мод (*1*), методом связанных резонаторов (*2*) и методом конечных элементов (*3*).

МСМ. Метод связанных мод только качественно определяет положение резонансных полос отражения, их ширину и значения коэффициента отражения.

Полученные результаты показывают, что метод связанных резонаторов более точно описывает зависимость коэффициента отражения R от частоты падающего излучения и длины гофрировки одномерных решеток, чем метод связанных мод, хорошо согласуется с результатами численного моделирования методом конечных элементов, по сравнению с которыми имеет существенные преимущества по затратам вычислительных ресурсов.

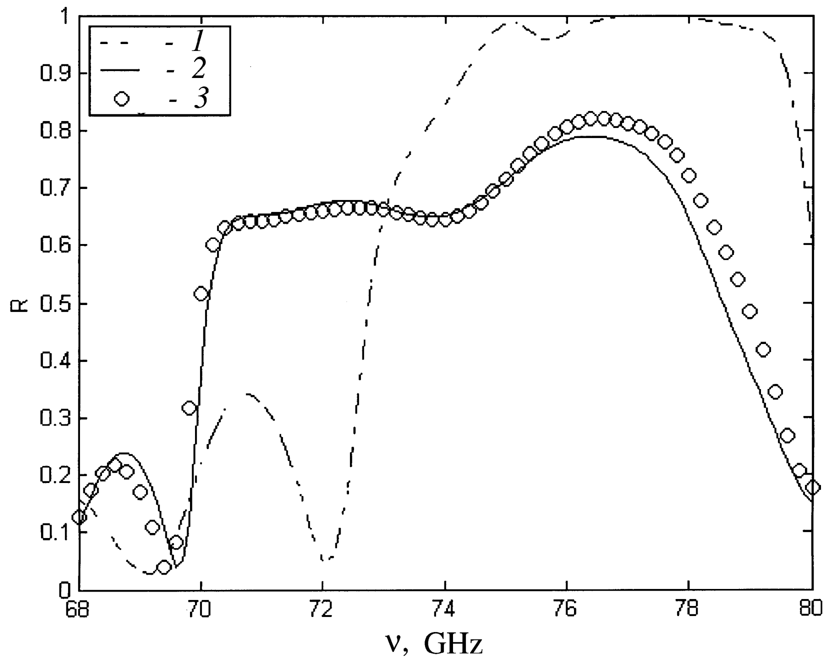

Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения TEM волны, рассчитанного методом связанных мод (*1*), методом связанных резонаторов (*2*) и методом конечных элементов (*3*), для одномерной брэгговской решетки длиной $L = 5$ cm с периодом 0.2 cm и прямоугольной гофрировкой $a = 0.1$ cm, $d = 0.03$ cm в зависимости от частоты.

Предложен метод связанных резонаторов, предназначенный для расчета электромагнитных полей, возбуждаемых одномерными брэгговскими решетками, который получен без каких-либо приближений из двумерной краевой задачи для уравнения Гельмгольца и вследствие этого может быть использован для расчета гофрированных структур произвольной формы и размеров. Кроме этого, данный подход имеет прямое и достаточно очевидное обобщение на случай двумерных структур, что представляет большой интерес для расчета электромагнитных полей в двумерных брэгговских решетках, прямое моделирование которых требует решения трехмерных задач.

Список литературы

[1] *Денисов Г.Г., Резников М.Г.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. XXM. № 5. С. 562.
[2] *Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Денисов Г.Г.* // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. В. 21. С. 1320.
[3] *Гинзбург Н.С., Песков Н.Ю., Сергеев А.С.* // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. № 9. С. 23.
[4] *Ginzburg N.S., Peskov N.Yu., Sergeev A.S., Arzhannikov A.V., Sinitsky S.L.* // Nuclear Instr. and Meth. in Phys. Research A. 1995. V. A358. P. 189.
[5] *Песков Н.Ю., Гинзбург Н.С., Денисов Г.Г., Сергев А.С., Аржанников А.В., Калинин П.В., Синицкий С.Л., Степанов В.Д.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 8. С. 72.
[6] *Каценеленбаум Б.З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд. АН СССР, 1961.
[7] *Морс Ф.М., Фишбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Иностр. лит., 1958.
[8] *Partial* Differential Equation Toolbox User's Guide. The Mathworks Inc, 1997.