01;10

Динамика поперечных колебаний пучка электронов в стеллатроне

© В.В. Долгополов, Ю.В. Кириченко

Национальный научный центр
"Харьковский физико-технический институт", Украина

Поступило в Редакцию 10 января 2001 г.

Теоретически исследуются поперечные колебания тонкого пучка электронов с стеллатроне и модифицированном бетатроне. В основе рассмотрения лежит релятивистское уравнение Лоренца, в котором используются собственные поля пучка, вычисленные методом запаздывающих потенциалов. Найдены условия, при которых в стеллатроне возникают неустойчивости, обусловленные неоднородностями стеллараторного поля. Показано, что в стеллатроне могут иметь место неустойчивости поперечных колебаний, не связанные с этими неоднородностями.

В работах [1,2] рассматривались неустойчивости, возникающие при взаимодействии поперечных колебаний электронных пучков в стеллатроне с собственными колебаниями волновода, образованного металлическим кожухом и стеллараторным магнитным полем. В рамках гидродинамического описания поперечные колебания пучка в стеллатроне исследовались в работе [3]. Нас будет интересовать возможность возникновения неустойчивостей, не связанных с собственными колебаниями волновода. В настоящей работе используется система координат x, y, θ, подробно описанная в работе [4] (x, y — декартовы координаты в плоскости, поперечной магнитной оси тора, θ — угол, отсчитываемый в направлении магнитной оси). Обозначим через $\tilde{f}$ малое отклонение (возмущение) некоторой величины f от равновесного значения $\bar{f}$:

$$f = \bar{f} + \tilde{f}, \qquad |\tilde{f}| \ll |\bar{f}|, \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta} = 0. \tag{1}$$

Скорость электронов $\mathbf{u}$ представим в виде: $\mathbf{u} = \bar{u}\mathbf{l}_\theta + \tilde{\mathbf{u}}$. Зависимость всех возмущений от времени t и угла θ определим множителем $\exp[i(\mu\theta - \omega t)]$, где μ — целое число; ω — частота. В случае рассматриваемых здесь поперечных колебаний можно пренебречь возмущениями величин u_θ (проекция $\mathbf{u}$ на направление $\mathbf{e}_\theta$) и N (линейная плотность электронов). Тогда исходными дифференциальными уравнениями являются две проекции релятивистского уравнения Лоренца на поперечные координаты x, y [4]. В эти уравнения входят поля возмущений пучка $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и внешнее магнитное поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\theta + \mathbf{B}_{st} + \mathbf{B}_\beta$, где $\mathbf{B}_\theta$ — тороидальное, $\mathbf{B}_{st}$ — двухзаходное стеллараторное, $\mathbf{B}_\beta$ — бетатронное магнитные поля, определяемые формулами:

$$\mathbf{B}_\theta = B_0 \frac{R_0}{R}\,\mathbf{e}_\theta, \qquad \mathbf{B}_\beta = B_0 \beta \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{B}_{st} = B_0 \frac{sm}{R_0}\left[\mathbf{e}_x(x\,\sin m\theta + y\cos m\theta) + \mathbf{e}_y(x\cos m\theta - y\sin m\theta)\right], \qquad (2)$$

где R_0 — радиус магнитной оси тора, $R = R_0 - x$, а остальные параметры подчиняются условиям: $-\frac{1}{2} < s < 0$, $|\beta| \ll 1$, $B_0 > 0$. В работе [4] поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ вычислены для тонкого кольцевого пучка в нулевом и первом порядках по возмущениям. В этой статье по вине авторов допущена опечатка в формулах для $\tilde{E}_\theta$, $\tilde{H}_y$, которые в общем случае должны быть такими:

$$\tilde{E}_\theta = \frac{2e}{R}\Lambda\left\{\frac{\partial\tilde{N}}{\partial\theta} - \frac{\overline{N}}{2R}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\theta} + \frac{\overline{u}}{c^2}\left(\dot{\tilde{N}}\overline{R} - \frac{1}{2}\overline{N}\dot{\tilde{x}}\right) + \frac{\overline{N}\overline{R}}{c^2}\dot{\tilde{u}}_\theta\right\}; \qquad (3)$$

$$\tilde{H}_y = -\frac{e\overline{N}}{cR}\Lambda\left\{\tilde{u}_\theta + \overline{u}\left(\frac{\tilde{N}}{\overline{N}} + \frac{\tilde{X}}{R}\right) + 2\frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial\theta} - \frac{\overline{u}}{R}\hat{\tilde{x}}\right\}, \qquad (4)$$

где $\Lambda = \ln(\theta_m/\theta_\varepsilon)$; $\hat{f} = \partial^2 f/\partial\theta^2 - (\overline{R}^2/c^2)\partial^2 f/\partial t^2$; $-e < 0$ — заряд электрона; $(\cdot)$ обозначает частную производную по t.

В нулевом порядке по возмущениям получаем равновесное состояние пучка, которое определяется соотношениями:

$$\overline{x} = \overline{y} = 0, \qquad u = \frac{\omega_0\beta R_0}{2(1+\eta)} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2\beta^2R_0^2}{4(1+\eta)^2} - \frac{\eta c^2}{1+\eta}}, \qquad (5)$$

где $\omega_0 = eB_0/m_e c$; $m_e = m_{e_0}\gamma$; $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$; $\eta = e^2N\Lambda/m_e c^2$; m_{e_0} — масса электрона. В формуле (5) и везде ниже для простоты записи величины $\overline{u}$ и $\overline{N}$ переобозначены на u и N. Из положительности подкоренного выражения в формуле (5) для равновесной скорости u следуют условия существования равновесной орбиты.

Введем вместо $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ переменные $z_\pm = \tilde{x} \pm i\tilde{y}$. Тогда из уравнения Лоренца [4] в первом приближении по возмущениям получим уравнения для этих переменных:

$$L_+ z_+ = \frac{\omega_0 u}{R_0}\left(mse^{-im\theta} - \frac{\beta}{2}\right) z_-; \quad L_- z_- = \frac{\omega_0 u}{R_0}\left(mse^{im\theta} - \frac{\beta}{2}\right) z_+, \tag{6}$$

где операторы L_+, L_- определяются формулами:

$$L_\pm = (1+2\eta)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{R_0}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 \mp i\omega_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{R_0}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$
$$+ \frac{\eta c^2}{R_0^2\gamma^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{R_0^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) + \frac{\omega_0\beta u}{2R_0}. \tag{7}$$

Для параметров магнитного поля стеллатрона всегда выполняется условие: $|ms| \gg |\beta|/2$ [5,6]. Поэтому вторым слагаемым в правых частях уравнений (6) можно пренебречь. Тогда система уравнений (6) сводится к независимым уравнениям:

$$L_\mp(e^{\pm im\theta}L_\pm z_\pm) = (\omega_0\omega_m s)^2 e^{\pm im\theta} z_\pm, \tag{8}$$

где $\omega_m = mu/R_0$. Учитывая принятую в настоящей статье зависимость возмущений от переменных t, θ, получим из (8) дисперсионное уравнение 4-й степени относительно величины $\omega_\mu = \omega - \mu u/R_0$:

$$\sum_{n=0}^{4} D_n \omega_\mu^n = 0, \tag{9}$$

где

$$D_0 = \left\{(1+2\eta)\omega_m^2 + \omega_0\omega_m\left(1 - \frac{\beta}{2m}\right) + \frac{\eta c^2}{\gamma^2 R_0^2}\left[m(m \pm 2\mu) + \frac{\mu^2}{\gamma^2}\right]\right\}$$
$$\times \left\{\frac{\mu^2 c^2 \eta}{\gamma^4 R_0^2} - \omega_0\omega_m\frac{\beta}{2m}\right\} - (\omega_0\omega_m s)^2;$$

$$D_1 = -\left\{\frac{2\mu u\eta}{\gamma^2 R_0} \pm 2(1+2\eta)\omega_m \pm \omega_0\right\}\left\{\frac{\mu^2 c^2 \eta}{\gamma^4 R_0^2} - \omega_0\omega_m \frac{\beta}{2m}\right\}$$
$$-\left\{(1+2\eta)\omega_m^2 + \omega_0\omega_m\left(1-\frac{\beta}{2m}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\eta c^2}{\gamma^2 R_0^2}\left[m(m\pm 2\mu) + \frac{\mu^2}{\gamma^2}\right]\right\}\left\{\frac{2\mu u\eta}{\gamma^2 R_0} \mp \omega_0\right\}; \qquad (10)$$

$$D_2 = \left(1+2\eta-\frac{\eta}{\gamma^2}\right)\left\{(1+2\eta)\omega_m^2 + \omega_0\omega_m\left(1-\frac{\beta}{m}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\eta c^2}{\gamma^2 R_0^2}\left[m(m\pm 2\mu) + \frac{2\mu^2}{\gamma^2}\right]\right\}$$
$$+\left\{\frac{2\mu u\eta}{\gamma^2 R_0} \pm 2(1+2\eta)\omega_m \pm \omega_0\right\}\left\{\frac{2\mu u\eta}{\gamma^2 R_0} \mp \omega_0\right\};$$

$$D_3 = -2\left(1+2\eta-\frac{\eta}{\gamma^2}\right)\frac{u}{R_0}\left\{\frac{2\mu\eta}{\gamma^2} \pm (1+2\eta)m\right\}; \quad D_4 = \left(1+2\eta-\frac{\eta}{\gamma^2}\right)^2.$$

Для релятивистских пучков электронов с токами в несколько десятых килоампера и энергией в несколько meV выполняются следующие неравенства:

$$\gamma^2 \gg 1, \quad \eta \ll 1/2, \quad |\omega_m/\omega_0| \ll 1, \quad 2\sqrt{\eta} \leqslant |\beta m|. \qquad (11)$$

В дальнейшем учитывается, что $s^2+\beta/2m < 1/4$ [1,2,4]. Анализ корней дисперсионного уравнения (9) проведен в диапазоне $|m| \ll |\mu| \ll \frac{|m|\gamma^2}{2\eta}$, в котором, как будет видно ниже, находятся все интересующие нас решения этого уравнения. Упрощая коэффициенты D_n с учетом сделанных выше предположений и анализируя условия вещественности корней уравнения (8), получим следующие результаты. При значениях μ, удовлетворяющих условию $|\mu| \geqslant \mu_{nop} = \gamma\sqrt{\omega_0/4\nu}$ $(\nu = eN\Lambda c/(R_0^2 B_0 \gamma^2))$, пучок в стеллатроне неустойчив к поперечным колебаниям независимо от параметров магнитного поля (1). Если $m\beta > 0$, то при $|\mu| < \mu_{nop}$ пучок устойчив к рассматриваемым колебаниям. Однако при $m\beta < 0$

поперечные колебания неустойчивы в диапазоне:

$$\frac{|mu|R_0\omega_0\gamma^4}{c^2\eta}\left[\frac{1}{2}-\sqrt{s^2+\frac{\beta}{2m}}\right]\leqslant\mu^2\leqslant\frac{|mu|R_0\omega_0\gamma^4}{c^2\eta}\left[\frac{1}{2}+\sqrt{s^2+\frac{\beta}{2m}}\right]. \tag{12}$$

Центр μ_0 диапазона (12) определяется формулой $\mu_0=\gamma\sqrt{|\omega_m|/2\nu}$ $(\mu_0<\mu_{пор})$. Отметим, что в отличие от результатов работы [1] относительная ширина диапазона (10) не мала $(\Delta\mu/\mu_0\sim 1)$. Для исследования поперечных колебаний пучка в модифицированном бетатроне в уравнениях (6) следует полагать $s=0$. Дисперсионное уравнение в этом случае получается аналогично уравнению (9). Анализ уравнения для модифицированного бетатрона, проведенный при тех же условиях, что и уравнение для стеллатрона, показывает, что поперечные колебания в модифицированном бетатроне неустойчивы только при $|\mu|\geqslant\mu_{пор}$. Отсюда, а также из того, что ширина диапазона (12) стремится к нулю при $s\to 0$, следует, что поперечная неустойчивость пучка в стеллатроне при $m\beta<0$ в диапазоне (12) изменения μ вызвана продольными неоднородностями стеллараторного магнитного поля. С точки зрения устойчивости пучка электронов в стеллатроне по отношению к поперечным колебаниям предпочтительно иметь магнитную систему с $m\beta>0$. Однако при этом условии, как показано в работе [4], в пучке стеллатрона неизбежно развивается неустойчивость к длинноволновым колебаниям, связанная с неустойчивостью отрицательной массы. Поперечная неустойчивость при $|\mu|\geqslant\mu_{пор}$ не связана с полем $\mathbf{B}_{st}$. Дисперсионные уравнения для стеллатрона (9) и модифицированного бетатрона при больших частотах ω $\big(|\omega_\mu|\ll|\mu|c/(R_0\gamma^2)\big)$ и $\mu\to\infty$ совпадают и имеют вид:

$$\left(\omega_\mu^2+\frac{\mu^2c^2\eta}{R_0^2\gamma^4}\right)^2=0. \tag{13}$$

Решение уравнения (13) дает комплексную частоту поперечных колебаний, соответствующую высокочастотной неустойчивости, возникающей при больших $|\mu|$:

$$\omega=\mu c/R_0\pm i\mu c\sqrt{\eta}/(R_0\gamma^2). \tag{14}$$

Представляет интерес выяснить вопрос о возможности разделения колебаний кольцевого пучка на продольные и поперечные. В работе [4] рассмотрены поперечные и продольные колебания, которые в общем случае оказываются связанными. Если при этом пренебречь поперечными колебаниями и рассмотреть большие $|\omega|$ и $|\mu|$, то окажется, что в этом случае чисто продольные колебания в кольцевом пучке существовать не могут. Это является следствием тороидальности, так как решение этой задачи для прямого пучка приводит к возможности существования независимых продольных колебаний при больших $|\omega|$ и $|\mu|$. Однако связь высокочастотных поперечных и продольных колебаний с большими $|\mu|$ в кольцевом пучке исчезает при $\sqrt{\eta}/\gamma^2 \to 0$. В реальных условиях параметр $\sqrt{\eta}/\gamma^2$ — очень малая величина. Это является дополнительным обоснованием справедливости пренебрежения продольными возмущениями $\tilde{N}, \tilde{u}_\theta$ при исследовании поперечных колебаний пучка электронов в стеллатроне. Заметим в заключение, что уравнение (13), а также дисперсионное уравнение, описывающее колебания и продольных, и поперечных колебаний (полученные в работе [4]) при больших $|\mu|$ и $|\omega|$ не содержат параметров внешнего магнитного поля. Поэтому выводы о связи поперечных и продольных колебаний в кольцевом пучке имеют общий характер.

Список литературы

[1] *Hughes T.P., Godfrey B.B.* // Phys. Fluids. 1986. V. 29. N 5. P. 1698–1703.
[2] *Kang T. Tsang.* // Phys. Fluids. 1990. B2. N 11. P. 2779–2786.
[3] *Наумов Н.Д.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 7. С. 103–107.
[4] *Долгополов В.В., Кириченко Ю.В.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. № 2. С. 87–90.
[5] *Ishizuka H.* // Phys. Fluids. 1990. B2. N 12. P. 3149–3160.
[6] *Hapetanakos C.A., Len L.K., Smith T.* et al. // Phys. Fluids. 1993. B5. N 7. P. 2295–2313.