

01;04;10

Особенности развития двухпоточковой неустойчивости электронных пучков при пространственно-локализованных возмущениях

© А.Е. Дубинов

Российский федеральный ядерный центр
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607188 Саров, Нижегородская область, Россия
e-mail: dubinov@ntc.vniief.ru

(Поступило в Редакцию 13 декабря 2000 г.)

Рассмотрена эволюция пространственно-локализованного возмущения типа гауссовский пакет для двухпоточковой неустойчивости в плазме. Показано, что движущееся возмущение в целом тормозится с искажением своей формы, причем величина торможения тем больше, чем больше групповая скорость пакета.

Многopotочковая и, в частности, двухпоточковая неустойчивость параллельных электронных пучков в вакууме и плазме является популярным примером, иллюстрирующим неустойчивость неравновесного распределения электронов. В простейших случаях для линейной стадии этой неустойчивости ее дисперсионное уравнение можно решить и проанализировать точно. Этот анализ приводится во многих учебниках и монографиях по физике плазмы: например, в [1,2] для двухпоточковой неустойчивости и в [3] для многopotочковой. Достаточно полный обзор работ по двухпоточковой неустойчивости приведен также в [4].

Однако много- и двухпоточковая неустойчивости интересны не только в качестве методического примера. Так, в работе [5] экспериментально исследовалось возбуждение высокочастотных колебаний системой параллельных пучков за счет развития многopotочковой неустойчивости. Кроме того, в таких СВЧ приборах с отражением электронного потока, как виркаторы, отражательные клистроны, генераторы с тормозящим полем Баркгаузена–Курца и др., во встречных пучках возможно развитие двухпоточковой неустойчивости (для виркаторов на это обращено внимание в [6]).

Проводя анализ линейной стадии двухпоточковой неустойчивости обычно линеаризуют исходные уравнения, считая, что начальные возмущения системы имеют вид $\propto \exp[i(kz - \omega t)]$. А это в свою очередь означает, что возмущение равномерно распределено от $-\infty$ до $+\infty$, что соответствует бесконечно длинной системе пучков и, вообще говоря, бесконечно большой энергии, содержащейся в возмущении.

Поэтому представляет интерес рассмотреть, как развивается эта неустойчивость при пространственно-локализованном возмущении. Идея рассмотрения особенностей развития различных неустойчивостей при локализованных возмущениях, вообще говоря, не нова, и здесь в качестве примера можно привести работы [7,8]. Однако рассмотрение таких возмущений в виде разложений по гармоническим волнам [7] имеет некоторые методические трудности: локализованное возмущение имеет конечную энергию вследствие сходимости соответству-

ющего интеграла, а его гармонические составляющие, каждая в отдельности, имеют бесконечную энергию. Поэтому наиболее простым и наглядным нам представляется изучение развития неустойчивости при локализованных возмущениях, не прибегая к их фурье-разложениям. В рамках такого подхода, как будет продемонстрировано ниже, удастся достаточно просто аналитически рассмотреть двухпоточковую неустойчивость. Будем исходить из традиционных уравнений [3]

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} n_\alpha \mathbf{v}_\alpha = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \nabla \mathbf{v}_\alpha = \frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi e \left(\sum_\alpha m n_\alpha - N_i \right), \quad (3)$$

где n_α и \mathbf{v}_α — концентрация и скорость электронов α -го пучка, e и m — их заряд и масса, \mathbf{E} — электрическое поле.

Уравнение (1) представляет собой уравнение непрерывности электронного пучка, уравнение (2) — уравнение движения, а (3) выражает закон Гаусса. Будем считать, что электронные пучки распространяются параллельно друг другу в пространстве, в котором для упрощения задачи присутствуют неподвижные ионы с концентрацией N_i , роль которых сводится лишь к обеспечению зарядовой компенсации невозмущенных пучков.

Направим ось z параллельно направлению движения пучков и будем считать, что в поперечном сечении система однородна. В этом случае система уравнений (1)–(3) становится одномерной для концентрации и проекций скорости и электрического поля вдоль оси z . Представим неизвестные, входящие в уравнения, в следующем виде:

$$n_\alpha = N_\alpha + \tilde{n}_\alpha \exp[i(kz - \omega t)] \exp[-\chi^2(z - V_g t)^2], \quad (4)$$

$$v_\alpha = V_\alpha + \tilde{v}_\alpha \exp[i(kz - \omega t)] \exp[-\chi^2(z - V_g t)^2], \quad (5)$$

$$E = \tilde{E} \exp[i(kz - \omega t)] \exp[-\chi^2(z - V_g t)^2]. \quad (6)$$

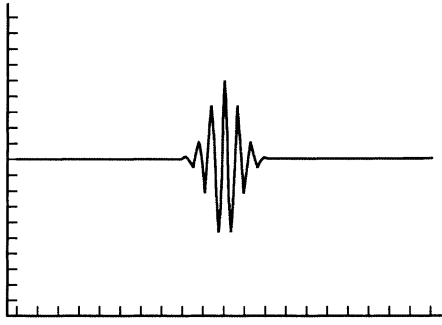


Рис. 1. Мгновенный вид возмущения типа гауссовский пакет.

Как видно, возмущения представляют собой пространственно-локализованные функции, которые являются гармонически модулированной функцией Гаусса с параметрами: χ , имеющим размерность обратной длины и определяющим пространственную ширину возмущения, и V_g , представляющим собой групповую скорость возмущения. Функция, описывающая возмущения, с точностью до несущественного для нас нормировочного множителя известна в теории вейвлетов как функция Габора [8], а в [7] такая функция называется гауссовским пакетом. Ее внешний вид показан на рис. 1.

Амплитуды возмущений в (4)–(6) будем считать малыми, а знак "тильда" будем в дальнейшем опускать. Подставляя (4)–(6) в исходные уравнения и оставляя члены только первого порядка малости относительно возмущений, получим

$$n_\alpha [2\chi^2(z - V_g t)V_g - i\omega] + (N_\alpha v_\alpha + n_\alpha V_\alpha) \times [-2\chi^2(z - V_g t) + ik] = 0, \quad (7)$$

$$v_\alpha [2\chi^2(z - V_g t)V_g - i\omega] + v_\alpha V_\alpha [-2\chi^2(z - V_g t) + ik] = \frac{e}{m} E, \quad (8)$$

$$E [-2\chi^2(z - V_g t) + ik] = \sum_\alpha 4\pi e n_\alpha. \quad (9)$$

Решая уравнения (7) и (8) относительно v_α и n_α , находим

$$v_\alpha = \frac{e}{m} \frac{E}{2\chi^2(z - V_g t)(V_g - V_\alpha) + i(kV_\alpha - \omega)}, \quad (10)$$

$$n_\alpha = -\frac{e}{m} \frac{N_\alpha E [-2\chi^2(z - V_g t) + ik]}{[2\chi^2(z - V_g t)(V_g - V_\alpha) + i(kV_\alpha - \omega)]^2}. \quad (11)$$

Полученные значения v_α и n_α подставляем далее в (9) и получаем искомое дисперсионное уравнение

$$1 = -\sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{[2\chi^2(z - V_g t)(V_g - V_\alpha) + i(kV_\alpha - \omega)]^2}, \quad (12)$$

где $\omega_{p\alpha} = (4\pi e^2 N_\alpha / m)^{1/2}$ — плазменная частота α -го пучка.

Прежде чем перейти к анализу дисперсионного уравнения, обратим внимание, что при его выводе нам не удалось полностью избавиться от координаты и времени. Это обстоятельство, однако, является типичным при представлении функций в виде разложений по базису локализованных функций — вейвлетов [8,9] и позволяет анализировать процессы в $\{z - t\}$ - и $\{k - \omega\}$ -пространствах одновременно.

Заметим, что при исчезновении локализации ($\alpha \rightarrow 0$) дисперсионное уравнение (12) переходит в известное при гармоническом возмущении.

Анализ уравнения (12) в случае двух параллельных пучков с произвольными невозмущенными значениями плотности и скорости вследствие его многопараметричности представляется весьма громоздким, хотя и элементарным. Проведем этот анализ лишь для частотного случая двух одинаковых встроенных пучков, имеющих равные значения $\omega_{p\alpha} = \omega_p$ и $V_\alpha = V$, когда при традиционном гармоническом возмущении неустойчивость носит абсолютный характер. Будем исследовать, как развивается неустойчивость на различных характеристиках $C = z - V_g t = \text{const}$ огибающей. Тогда дисперсионное уравнение запишется в виде

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{[2\chi^2(z - V_g t)(V_g - V) + i(kV - \omega)]^2} - \frac{\omega_p^2}{[2\chi^2(z - V_g t)(V_g + V) - i(kV + \omega)]^2}. \quad (13)$$

Легко видеть, что на вершине огибающей ($C = 0$) неустойчивость развивается так же, как и в случае гармонического возмущения. Однако на других участках огибающей инкременты неустойчивости существенно изменяются. Так как уравнение (13) имеет четвертый порядок относительно ω , то оно будет иметь четыре корня

$$\omega_{1,2,3,4} = 2iCV_g \pm \sqrt{k^2 V^2 + \omega_p^2 - 4\chi^2 C^2 V^2 + 4iC\chi^2 kV \pm D}, \quad (14)$$

где

$$D = \sqrt{\omega_p^4 + 4\omega_p^2 k^2 V^2 - 16C^2 \chi^4 \omega_p^2 V^2 + 16iC\chi^2 \omega_p^2 kV^2},$$

а нумерация корней в (14) и ниже следующая: 1 — оба знака перед радикалами в (14) — плюсы, 2 — первый знак — минус, а второй — плюс, 3 — первый знак — плюс, а второй — минус, 4 — оба знака — минусы. При естественном предположении $k^2 \gg \chi^2$ вычислим зависимость мнимой части корней $\text{Im}(\omega_{1,2,3,4})$ от положения на возмущении C .

Для случая неподвижного возмущения ($V_g = 0$) при некотором k указанная зависимость представлена на рис. 2, а. Видно, что на вершине возмущения $\omega_{2,3} = 0$, в то время как $\omega_{1,4}$ в нуле претерпевают скачки, равные двум инкрементам неустойчивости при гармоническом

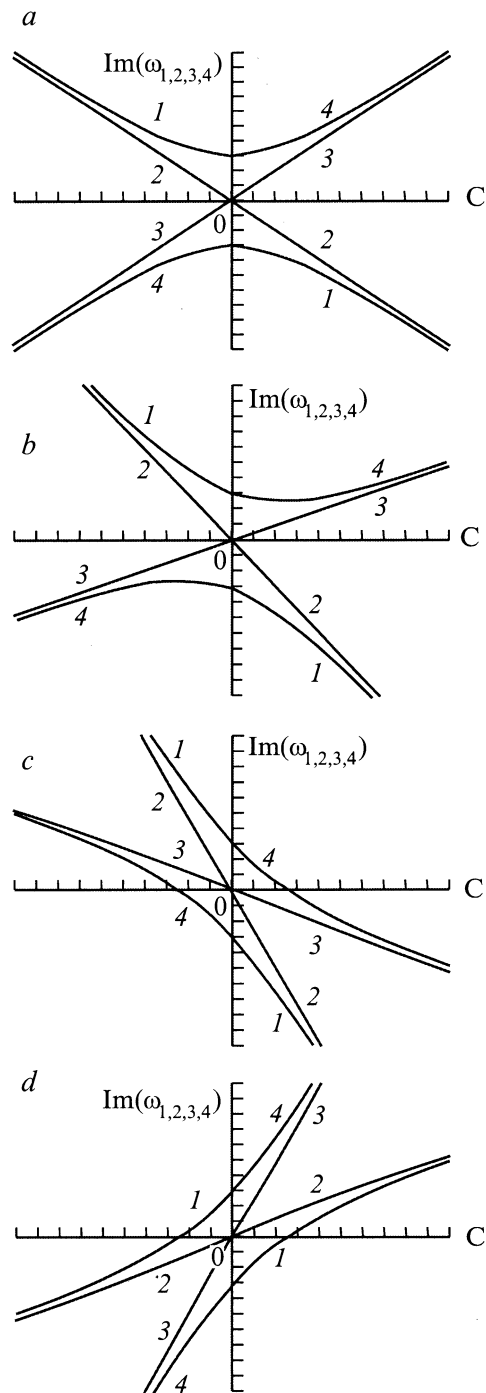


Рис. 2. Зависимость для различных случаев: $a - V_g = 0$, $b - 0 < V_g < V$, $c - V_g > V$, $d - V_g < -|V| < 0 < V$.

возмущении. При удалении же от вершины инкременты увеличены. Это соответствует тому, что возмущение стремится в своей эволюции к равномерному гармоническому, так что эффективная ширина огибающей возмущения в процессе эволюции будет расти (расплывание гауссовского пакета).

При малой групповой скорости пакета ($0 < V_g < V$) зависимость $\text{Im}(\omega_{1,2,3,4})$ от C несколько иная, чем в

предыдущем случае; она показана на рис. 2, a . Видно, что фронт возмущения растет медленнее, чем его хвост. Это приводит, во-первых, к смещению центра тяжести возмущения в сторону противоположную его движению, т.е. к замедлению пакета, и во-вторых, к тому, что фронт пакета становится более пологим по отношению к хвосту.

При большой групповой скорости ($V_g > V$) фронт возмущения может вообще затухать, а хвост расти с очень большим инкрементом (рис. 2, c). Если же рассматриваемая система двух пучков помещена в некую электродинамическую структуру типа карсинотрон, т.е. $V_g < -|V| < 0 < V$, и положительные значения характеристик C при этом соответствуют хвосту пакета, то и в этом случае наблюдаются замедление и искажение формы возмущения.

Рассмотренные особенности эволюции пространственно-локализованного возмущения хотя и получены в рамках линейного приближения, тем не менее они не могут быть получены в рамках гармонического возмущения. Если же пойти путем разложения локализованного возмущения на гармонические составляющие, тогда эти особенности получить можно. На этот путь будет гораздо труднее, так как придется рассчитывать интегралы типа свертки Дюамеля.

В заключение выражаю свою благодарность А.А. Рухадзе, давшего мне консультации по ряду вопросов многопоточковых неустойчивостей.

Список литературы

- [1] Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 528 с.
- [2] Клеммоу Ф., Доуэрти Дж. Электродинамика частиц и плазмы. М.: Мир, 1996. 528 с.
- [3] Стикс Т. Теория плазменных волн. М.: Атомиздат, 1965. 344 с.
- [4] Бриггс З. // Достижения физики плазмы. Пер. с англ. / Под ред. М.С. Рабиновича. М.: Мир, 1974. С. 132.
- [5] Федорченко В.Д., Мазалов Ю.П., Бакай А.С., Руткевич Б.Н. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. Вып. 6 (12). С. 2225.
- [6] Дубинов А.Е. // РиЭ. 2000. Т. 45. № 7. С. 875.
- [7] Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. М.: Атомиздат, 1970. 296 с.
- [8] Жданов С.К., Трубников Б.А. Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991. 176 с.
- [9] Астафьева Н.М. // УФН. 1996. Т. 166. № 11. С. 1145.