

01;04;10;12

Формирование сгустков с ненулевым продольным эмиттансом

© А.С. Чихачев

(Поступило в Редакцию 12 ноября 1999 г. В окончательной редакции 2 августа 2000 г.)

Изучается нестационарный процесс образования сгустков в плоской геометрии в случае, когда продольный эмиттанс является ненулевым. Получено самосогласованное решение модельного нестационарного кинетического уравнения для бесстолкновительной системы частиц. Показан неоднозначный характер решения. Возможно существование в принципе двух режимов ускорения, приводящих к образованию виртуального катода и вследствие этого к формированию сгустка.

1. При описании начальной стадии ускорения частиц в плоском диоде обычно считается, что продольный фазовый объем является нулевым. Фазовый объем остается равным нулю и при наличии разброса скоростей на катоде [1], если частицы испускаются плоскостью. В реальных условиях, однако, ускоряемые частицы извлекаются из области, имеющей некоторую протяженность в продольном направлении. Если, кроме того, имеется разброс продольных скоростей, то ускоряемые частицы имеют конечный фазовый объем, т.е. характеризуются ненулевым эмиттансом.

В связи с этим далее рассматривается задача о динамике сгустка с конечным продольным эмиттансом. Предполагается, что частицы имеют нулевые поперечные скорости, а размеры в поперечных направлениях велики.

Рассмотрим систему, состоящую из эмиттера, находящегося под нулевым потенциалом, и управляющей сетки (рис. 1). Потенциал $\Phi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi = -4\pi en. \quad (1)$$

Здесь e — заряд частицы, n — плотность. Если размер области R , занятой частицами, удовлетворяет неравенству $R > L$, где L — расстояние от эмиттера, расположенного в точке $z = 0$, до сетки, на которую подается управляющий потенциал $\Phi_L(t)$, то в области, занятой частицами, выполняется соотношение

$$\Phi = -2\pi en z^2 + z \left(\frac{\Phi_L}{L} + 2\pi en L \right). \quad (2)$$

Уравнение движения частиц имеет вид

$$\ddot{z} = \omega^2(z)(z + z_0(t)), \quad (3)$$

где $\omega^2(t) = 4\pi e^2 n(t)/m$, m — масса ускоряемых частиц, $z_0 = -(\Phi_L/4\pi enL) > 0$.

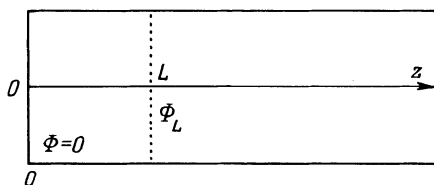


Рис. 1. Расположение электродов. На сетку, расположенную при $z = L$, подается вытягивающий потенциал $\Phi_L(t)$.

Для кинетического описания частиц, уравнением движения которых является уравнение (3), необходимо иметь инвариант этого уравнения, справедливый при любой зависимости $\omega(t)$. Этот инвариант должен заменить гамильтониан, использованный в стационарной задаче о движении частиц в диоде [1,2]. В случае однородного уравнения движения для нестационарной задачи может быть использован инвариант Капчинского–Владимирского [3]. После преобразований этот же инвариант пригоден и для ансамбля, описываемого неоднородным уравнением (3). Положим $z_1 = z - \xi$, где $\xi(t)$ определяется уравнением $\ddot{\xi} = \omega^2(t)(\xi + z_0)$, тогда $z_1(t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\ddot{z}_1 = \omega^2(t)z_1. \quad (4)$$

Инвариант, характеризующий продольное движение, имеет вид

$$I = \frac{(R_1 \dot{z}_1 - \dot{R}_1 z_1)^2}{\varepsilon_0^2} + \frac{z_1^2}{R_1^2}. \quad (5)$$

Из условия $dI/dt \equiv 0$ следует, что для функции $R_1(t)$ справедливо уравнение

$$\ddot{R}_1 - \omega^2(t)R_1 = \frac{\varepsilon_0^2}{R_1^3}. \quad (6)$$

Если, далее, положить для функции распределения

$$f = \kappa \frac{\sigma(1-I)}{\sqrt{1-I}}, \quad \sigma(x) = 0, \quad x < 0, \quad \sigma = 1, \quad x \geq 0,$$

то плотность определяется равенством

$$n = \frac{\pi \kappa \varepsilon_0}{R_1} \sigma(r_1 - z_1), \quad (7)$$

плотность тока j_z

$$j_z = en z \frac{\dot{R}_1}{R_1} + en R_1 \left(\frac{\xi}{R_1} \right), \quad (8)$$

а среднеквадратичный разброс продольных скоростей имеет вид

$$\overline{(\Delta \dot{z})^2} = \frac{\varepsilon_0^2}{2R_1^2} \left(1 - \frac{z_1^2}{R_1^2} \right). \quad (9)$$

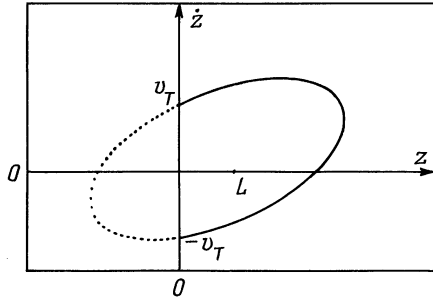


Рис. 2. Область фазовой плоскости, занятая ускоряемыми частицами, часть эллипса при $z > 0$.

На катоде (при $z = 0$) из (9) следует

$$\overline{(\Delta \dot{z})^2} \Big|_{z=0} = v_T^2 = \frac{\varepsilon_0^2}{2R_1^2} \left(1 - \frac{\xi^2}{R_1^2} \right), \quad (10)$$

где v_T — тепловой разброс на катоде.

Приведенные выражения (7)–(10) показывают разумный выбор модельной функции распределения, качественно правильно описывающей начальные условия для частиц. Поскольку тепловая скорость на катоде остается постоянной, то соотношение (10) определяет дополнительную связь между функциями $\xi(t)$ и $R_1(t)$:

$$\xi(t) = \pm R_1 \sqrt{1 - R_1^2/R_*^2}, \quad (11)$$

где $R_*^2 = \varepsilon_0^2/2v_T^2$.

Частицы, поступающие из эмиттера в ускоряющий промежуток, занимают в фазовом пространстве область, ограниченную эллипсом (рис. 2). Скорости частиц вблизи катода могут быть направлены как в положительном, так и отрицательном направлении оси z .

Заметим здесь, что приведенные выражения для распределения f и потенциала $\Phi(z, t)$ представляют собой точное решение модельной власовской самосогласованной системы — кинетического уравнения для частиц и уравнения для электростатического потенциала.

2. В соответствии с (11) возможны два режима ускорения. Если считать $\xi = +\sqrt{1 - R_1^2/R_*^2}$, то, используя это соотношение, а также уравнение (6), из (4) можно получить выражение для $z_0(t)$

$$z_0 = -\frac{R_1^3}{R_*^2 \sqrt{1 - R_1^2/R_*^2}} + \frac{\varepsilon_0^2(1 - 2R_1^2/R_*^2)}{\omega^2 R_1 \sqrt{1 - R_1^2/R_*^2}} - \frac{R_1^2 R_1 (3 - 4R_1^2/R_*^2)}{\omega^2 R_*^2 (1 - R_1^2/R_*^2)^{3/2}}. \quad (12)$$

С учетом (7) $\omega^2(t)$ выражается равенством

$$\omega^2(t) = 4\pi n_0 e^2/m = \frac{4\pi^2 \kappa \varepsilon_0}{m R_1(t)} = \omega_0^2 \frac{R_{10}}{R_1(t)}, \quad (13)$$

где $\omega_0^2 = 4\pi n_0 e^2/m$, n_0 — плотность в начальный момент времени, $R_{10} = R_1(t)|_{t=0}$.

Из (6) при условии, что $\dot{R}_1(t)|_{t=0} = 0$, следует выражение для $\dot{R}_1^2(t)$

$$\dot{R}_1^2 = 2\omega_0^2 R_{10} (R_1 - R_{10}) - \varepsilon_0^2 \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_{10}^2} \right). \quad (14)$$

Из этого равенства следует, что при ненулевом эмиттансе ε_0 должно быть выполнено условие $R_{10} > 0$. Это в свою очередь означает, что в начальный момент времени $t = 0$ размер слоя заряженных частиц вблизи эмиттера $R_0 = R_{10} + R_{10} \sqrt{1 - R_{10}^2/R_*^2}$. Обозначим, $R_1/R_* = \eta$, $R_{10}/R_* = \eta_0$,

$$\frac{\varepsilon_0^2}{\omega_0^2 R_{10} R_*^3} = \frac{\varepsilon_0^2}{\omega_0^2 \eta_0 R_*^4} = \frac{4v_T^4}{\omega_0^2 \eta_0 \varepsilon_0^2} = \mu,$$

тогда (12) может быть переписано в виде

$$\frac{z_0(1 - \eta^2)}{R_*} = -7\eta^3 + 9\eta^5 + 2\eta_0\eta^2(3 - 4\eta^2) + \mu \left[\frac{1}{\eta^2} - 2\eta^2 - \frac{3\eta^2}{\eta_0^2} + 4\frac{\eta^4}{\eta_0^2} \right]. \quad (15)$$

В соответствии с (2), (3), (5) и определением z_0 функцию $U = -\frac{e\Phi}{m}$ можно записать следующим образом:

$$U = \frac{2\pi e^2 n}{m} (z + z_0)^2 - \frac{2\pi e^2 n}{m} z^2 = \frac{\omega_0^2 R_{10}}{R_1} (z + z_0)^2 - \frac{\omega_0^2}{R_1^2} R_{10}^2 z_0^2. \quad (16)$$

Если $z_0(t)|_{t=0} > 0$, а при $t > 0$ z_0 убывает и становится отрицательной величиной, то первое слагаемое в (16) обращается в нуль при $z = -z_0$, тогда второе слагаемое описывает потенциальный барьер, запирающий частицы, если выполнено условие

$$\frac{\omega_0^2 R_{10}}{R_1} z_0^2 > \frac{v_T^2}{2}. \quad (17)$$

В этой ситуации происходит, по-видимому, отрыв частиц от катода, т. е. формирование сгустка (см. также [4]).

Следует, однако, отметить, что используемые уравнения применимы только в случае, когда в ускоряющем промежутке отсутствует потенциальный барьер, т. е. данное описание справедливо при $z_0 \geq 0$. По-видимому, для создания барьера, запирающего частицы, функция $U_L(t)$ должна иметь участок, характеризующийся резким (мгновенным) уменьшением на величину $\sim v_T^2/2$ после достижения точки $z_0 = 0$. В соответствии с этим замечанием всюду в дальнейшем считается, что такое уменьшение имеет место и условием образования сгустка является достижение такого момента времени t , когда $z_0(t) = 0$. Для возможности процесса формирования на сетку следует подавать управляющий потенциал, при $z_0 > 0$ удовлетворяющий соотношению

$$U_L = -\frac{e\Phi_L(t)}{m} = \frac{\omega_0^2 R_{10}}{R_1(t)} (z_0(t) + L/2). \quad (18)$$

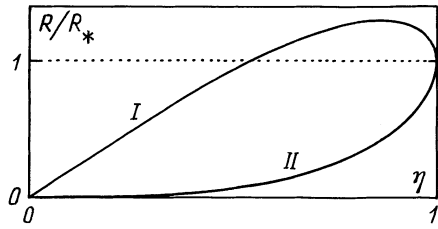


Рис. 3. Зависимость размера слоя заряженных частиц от параметра η в двух различных режимах ускорения.

В начальный момент времени при $\eta = \eta_0$ из (15) следует

$$\frac{z_0 \sqrt{1 - \eta^2}}{R_*} = \mu \frac{1 - 2\eta_0^2}{\eta_0} - \eta_0^3, \quad (19)$$

$z_0 > 0$, если $\eta_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ при $\mu > 1$ и если $\eta_0 < \mu^{1/5}$ при $\mu \ll 1$. Если условие малости η_0 выполнено, то z_0 обращается в нуль при $\eta < \sqrt{3}/2$. Действительно, при $\eta^2 = 3/4$

$$\frac{z_0}{R_*} = - \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{4\mu}{3} \right) < 0.$$

3. Размер сгустка в рассматриваемом режиме

$$R(t) = R_1(1 + \sqrt{1 - R_1^2/R_*^2}) = R_*\eta(1 + \sqrt{1 - \eta^2}).$$

Зависимость $R(\eta)$ представлена на рис. 3 (кривая I). При $\eta = \sqrt{3}/2$ размер имеет максимальное значение $R_{\max} = R_*(3\sqrt{3}/4)$. Отметим, что значение $R = R_*$ может быть достигнуто не только при $\eta = 1$, но и при $\eta < 1$: уравнение $\eta(1 + \sqrt{1 - \eta^2}) = 1$ кроме $\eta = 1$ имеет также решение $\eta \simeq 0.54$. Уравнение $z_0 = 0$, являющееся условием отрыва сгустка от катода, при $\eta = 0.54$ имеет вид

$$-0.67 + 1.06\eta_0 + \mu \left(2.87 - \frac{0.53}{\eta_0^2} \right) = 0.$$

Из этого уравнения можно получить

$$\mu = \frac{0.67 - 1.06\eta_0}{2.87 - 0.53/\eta_0^2},$$

откуда следует, что $\mu > 0$, если

$$0.42 < \eta_0 < 0.63. \quad (20)$$

Таким образом, отрыв сгустка с размером $\sim R_*$ происходит в случае, если начальный размер области, занятой частицами, составляет $R_0 \simeq 0.8R_*$. Размер $\sim R_*$ сгустка в момент отрыва представляется оптимальным — в соответствии с рис. 2 в этом случае фазовый объем сгустка покидает катод. Значение параметра μ определяет плотность при заданных эмиттансе и скорости v_T .

Рассмотрим второй режим ускорения, характеризующий равенством $\xi = -\sqrt{1 - R_1^2/R_*^2}$. В этом случае правая часть (15) меняет знак (так же, как и правая часть (19)). Вытягивание частиц ($z_0 > 0$) происходит при $\mu > 1$ в случае, когда $\eta_0^2 > 1/2$, а при $\mu \ll 1$ — в случае $\eta_0 > \mu^{1/5}$. При $\eta^2 = 3/4$ $z_0 > 0$, тогда как при $\eta \rightarrow 1$

$$\frac{z_0(1 - \eta^2)}{R_*} \rightarrow -(1 - \eta_0^2) \left(2 + \frac{\mu}{\eta_0^2}(1 + \eta_0) \right).$$

Это означает, что отрыв частиц от катода происходит при $\frac{\sqrt{3}}{2} < \eta < 1$. Зависимость $R(\eta) = R_*\eta(1 - \sqrt{1 - \eta^2})$ приведена на рис. 3 (кривая II) и является монотонной. Этот режим характеризуется существенно меньшим, чем в случае первого режима, размером заряженного слоя вблизи эмиттера при небольших значениях η .

4. При небольших отличиях величин η в конце импульса от величины η_0 несложно рассчитать длительность импульса. Из (14) следует

$$\dot{\eta}^2 = 2\omega_0^2 \eta \left[\eta - \eta_0 - \frac{\mu}{2} \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta_0^2} \right) \right]. \quad (21)$$

Можно получить

$$t = \frac{1}{\omega_0} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta / \left(\sqrt{2\eta_0 \left(1 + \frac{\mu}{2} \frac{\eta + \eta_0}{\eta^2 \eta_0^2} \right)} \sqrt{\eta - \eta_0} \right).$$

В начальной стадии основной вклад в интеграл дают точки, где $\eta \sim \eta_0$. Тогда получим

$$t \simeq \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{2(\eta - \eta_0)}{\eta_0 + \mu/\eta_0^3} \right)^{1/2}.$$

Форма импульса может быть определена после вычисления $z_0(t)$ при помощи равенства (18).

Отметим, что рассмотренные режимы дают разного знака добавку к току при $z = 0$. В соотношении (8) второе слагаемое в первом режиме

$$\sim - \frac{R_1 \dot{R}_1 2v_T^2}{\epsilon_0^2 \sqrt{1 - R_1^2/R_*^2}}.$$

Добавка пропорциональна v_T^2 , при $t = 0$ она равна нулю (т.к. $\dot{R}_1|_{t=0} = 0$), во втором режиме добавка противоположна по знаку — усиливает ток. Добавка становится очень большой, если $R_1 \rightarrow R_*(\eta \rightarrow 1)$, однако эта точка недостижима в обоих режимах.

Таким образом, в настоящей работе построена нестационарная модель ускорения сгустков, характеризующихся ненулевым продольным эмиттансом. Показано наличие двух различных режимов ускорения. Качественно определены длительность ускоряющего импульса и роль разброса по продольным скоростям.

Список литературы

- [1] Грановский В.Л. Электрический ток в газе. М.: Наука, 1971. 544 с.
- [2] Смирнов В.М. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. Вып. 4. С. 1005.
- [3] Капчинский И.М. Теория линейных резонансных ускорителей. Динамика частиц. М.: Энергоатомиздат, 1988. 239 с.
- [4] Чихачев А.С. // Тез. докл. на XVI совещании по ускорителям, Протвино, 1998.