

01;09

Преобразование плоской монохроматической волны импульсно-периодической модуляцией во времени параметров безграничной среды

© О.Н. Рыбин, Н.И. Слипченко

Харьковский государственный технический университет,
310726 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 10 октября 2000 г.)

Рассмотрено точное решение задачи преобразования плоской монохроматической волны конечной во времени последовательностью прямоугольных периодических импульсов диэлектрической проницаемости и проводимости безграничной среды. Последовательность импульсов проводимости сдвинута по отношению к последовательности импульсов проницаемости на произвольную во времени величину. Аналитическое исследование рассматриваемой задачи осуществляется методом интегральных уравнений, согласно которому преобразование электромагнитных волн в среде с изменяющимися во времени параметрами описывается интегральными уравнениями Вольтерра второго рода. Записанное для данной задачи интегральное уравнение решалось методом резольвенты. Получены выражения для преобразованной компоненты электрического поля для любой точки пространственно-временной области. Проведен анализ этих выражений.

Введение

Особое место в теории волновых процессов занимает изучение параметрической модуляции сред. В связи с этим большой интерес представляет изучение преобразования электромагнитных волн периодической модуляцией во времени параметров сред. Исследованию такого преобразования посвящен целый ряд работ [1–3]. Однако аналитические исследования преобразований волн периодически нестационарными средами, как правило, проводятся приближенно при некоторых предположениях. Например, в работе [4] проведено приближенное аналитическое исследование преобразования плоской волны гармоническим изменением во времени проводимости полуограниченной среды. Анализ был проведен в приближении теории возмущений. Это ограничивает диапазон глубины модуляции малыми величинами. Кроме того, в данной задаче модуляция осуществлялась на бесконечном временном интервале. Поэтому представляет интерес преобразование волн средами, материальные параметры которых изменяются периодически на конечном временном интервале.

В данной работе точно решена задача преобразования монохроматической электромагнитной волны в безграничной среде модуляцией во времени диэлектрической проницаемости и проводимости ограниченным набором прямоугольных периодических импульсов. Набор импульсов имеет произвольные характеристики: период, амплитуды импульсов и их длительность (при этом предполагается, что длительность импульсов проницаемости равна длительности импульсов проводимости). Кроме того, последовательность импульсов диэлектрической проницаемости сдвинута по отношению к последовательности импульсов проводимости на произвольную во времени величину.

В работе получены точные выражения для преобразованной компоненты электрического поля, которые позволяют вычислить ее величину в любой момент времени в любой точке пространства. Проведен анализ полученных выражений.

Электрическое поле в ступенчато-периодической нестационарной среде

Пусть начиная с момента времени $t_0 = 0$, параметры безграничной среды начинают меняться во времени по произвольному закону. Тогда, согласно [5], эволюция электромагнитного поля в этой среде будет описываться интегральным уравнением Вольтерра второго рода

$$E(t, x) = F(t, x) + \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \times K(t, t', x, x') E(t', x'), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $E(t, x)$ — электрическая компонента поля; $K(t, t', x, x')$ — ядро интегрального уравнения; $F(t, x)$ — свободный член интегрального уравнения.

Интегральное уравнение (1) может быть решено методом резольвенты [6]

$$E(t, x) = F(t, x) + \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \times R(t, t', x, x') F(t', x'), \quad t > 0, \quad (2)$$

где $R(t, t', x, x')$ — резольвента уравнения (1).

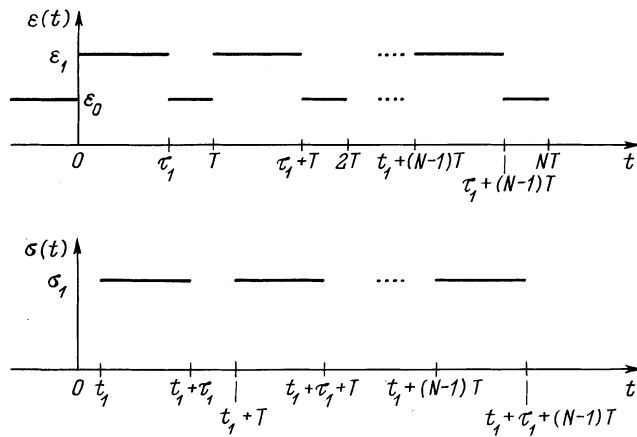


Рис. 1. Закон изменения параметров среды во времени.

Если проницаемость и проводимость в момент времени $t_0 = 0$ изменяются скачком (предполагается, что до момента времени $t_0 = 0$ среда непроводящая, т.е. $\sigma = 0$, то ядро и резольвента уравнения (1) имеют разностный вид [7]

$$K(t, t', x, x') = -\frac{1}{a^2} \left\{ \bar{\sigma}_1 + \frac{1}{2}(1 - a^2) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \times \delta(v_0(t - t') - |x - x'|),$$

$$R(t, t', x, x') = -\frac{1}{2v_1} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} dx' \frac{dp}{2\pi i} (p - \bar{\sigma}_1) \times \frac{(1 - a^2)p + (1 + a^2)\bar{\sigma}_1}{\sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}} e^{p(t-t') - \frac{|x-x'|}{v_1} \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}}, \quad (3)$$

где $\alpha > \bar{\sigma}_1$, $\text{Re}(\sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}) > 0$, $a = \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1}$, $\bar{\sigma}_1 = 2\pi\sigma_1/\varepsilon_1$, $v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1}$, ε_0 — диэлектрическая проницаемость невозмущенной среды ($t < 0$), ε_1 и σ_1 — диэлектрическая проницаемость и проводимость возмущенной среды ($t > 0$), c — скорость света в вакууме.

Пусть диэлектрическая проницаемость и проводимость среды изменяются во времени по закону (рис. 1)

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sum_{k=1}^N \left\{ \Theta(t - (k-1)T) - \Theta(t - \tau_1 - (k-1)T) \right\},$$

$$\sigma(t) = \sigma_1 \sum_{k=1}^N \left\{ \Theta(t - t_1 - (k-1)T) - \Theta(t - t_1 - \tau_1 - (k-1)T) \right\}, \quad (4)$$

где t_1 — временной сдвиг между последовательностями проницаемости и проводимости, τ_1 — длительность импульсов.

Очевидно, что возмущение, которое описывается выражениями (4), имеет период $T = t_1 + \tau_1 + \tau_2$, где τ_2 — скажность возмущения, а всего таких периодов — N .

Можно показать, что электрическое поле на любом интервале n постоянства параметров среды определяется формулами

$$E_n(t, x) = F_n(t, x) + \int_{t_{n-1}}^t \int_{-\infty}^{\infty} dx' R_n(t, t', x, x') F_n(t', x'),$$

$$F_n(t, x) = E_0(t, x) + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{-\infty}^{\infty} dx' K_i(t, t', x, x') E_i(t', x'), \quad (5)$$

где $E_0(t, x)$ — функция первичного поля; $R_n(t, t', x, x')$ и $K_n(t, t', x, x')$ — резольвента и ядро интегрального уравнения (1), структура которых не меняется с изменением номера скачка n параметров среды.

Из последнего утверждения и из структуры формул (3) нетрудно получить выражения для ядра и резольвенты произвольного интервала постоянства параметров среды. Так, на интервалах, где новые значения принимает только диэлектрическая проницаемость, выражения для ядра и резольвенты имеют вид

$$(n-1)T < t < t_1 + (n-1)T, \quad n = 1, \dots, N:$$

$$K_n(t, t', x, x') = -\frac{1}{2a^2} \frac{\partial}{\partial t} \delta(v_0(t - t') - |x - x'|),$$

$$v_0 = c/\sqrt{\varepsilon_0},$$

$$R_n(t, t', x, x') = -\frac{1}{2}(1 - a^2) \frac{\partial}{\partial t} \delta(v_1(t - t') - |x - x'|); \quad (6)$$

на интервалах, где новые значения принимают и диэлектрическая проницаемость, и проводимость, выражения для ядра и резольвенты будут определяться формулами

$$t_1 + (n-1)T < t < \tau_1 + (n-1)T, \quad n = 1, \dots, N:$$

$$K_n(t, t', x, x') = -\frac{1}{a^2} \left\{ \bar{\sigma}_1 + \frac{1}{2}(1 - a^2) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \times \delta(v_0(t - t') - |x - x'|);$$

$$R(t, t', x, x') = -\frac{1}{2v_1} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} (p - \bar{\sigma}_1) \times \frac{(1 - a^2)p + (1 + a^2)\bar{\sigma}_1}{\sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}} e^{p(t-t') - \frac{|x-x'|}{v_1} \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}}, \quad (7)$$

$$\alpha > \bar{\sigma}_1, \quad \text{Re}(\sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}) > 0;$$

на интервалах, где новое значение имеет только проводимость, имеем выражения для ядра и резольвенты

$$\tau_1 + (n-1)T < t < t_1 + \tau_1 + (n-1)T, \quad n = 1, \dots, N:$$

$$K_n(t, t', x, x') = -\bar{\sigma} \delta(v_0(t-t') - |x-x'|), \quad \bar{\sigma} = 2\pi\sigma_1/\varepsilon_0,$$

$$R_n(t, t', x, x') = -\frac{\bar{\sigma}}{v_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \times \frac{e^{(p-\bar{\sigma})(t-t') - \frac{|x-x'|}{v_0} \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}^2}}}{\sqrt{p^2 - \bar{\sigma}^2}}, \quad \alpha > \bar{\sigma}, \quad (8)$$

$$\text{Re}(\sqrt{p^2 - \bar{\sigma}^2}) > 0;$$

а на интервалах покоя, где значения параметров среды равны их первичным значениям, имеем

$$t_1 + \tau_1 + (n-1)T < t < nT, \quad n = 1, \dots, N:$$

$$K_n(t, t', x, x') = 0 = R_n(t, t', x, x'). \quad (9)$$

Преобразование монохроматической волны импульсно-периодической нестационарностью безграничной среды

Пусть $E_0(t, x)$ есть плоская монохроматическая волна единичной амплитуды $E_0(t, x) = e^{i(\omega t - kx)}$, $k = \omega/v_0$. Подставляя $E_0(t, x)$ в формулы (5), получим выражения для преобразованного электрического поля на первом периоде изменения параметров среды

$$E(t, x) = \tilde{A}_1^+ e^{i(\omega_1 t - kx)} + \tilde{A}_1^- e^{-i(\omega_1 t + kx)}, \quad 0 < t < t_1, \quad (10)$$

где

$$\tilde{A}_1^\pm = \frac{a}{2} (1 \pm a), \quad \omega_1 = a\omega;$$

$$E(t, x) = (\tilde{A}_3^+ + \tilde{B}_3^+) e^{-\bar{\sigma}_1 t} e^{i(\Omega t - kx)} + (\tilde{A}_3^- + \tilde{B}_3^-) e^{-\bar{\sigma}_1 t} e^{-i(\Omega t + kx)}, \quad t_1 < t < \tau_1, \quad (11)$$

где

$$\tilde{A}_3^\pm = \pm \tilde{A}_2 a^2 \frac{(a^2 - 1)\omega^2 - 2\bar{\sigma}_1(\bar{\sigma}_1 \mp i\Omega)}{2i\Omega(\bar{\sigma}_1 \mp i(\Omega \mp \omega))} e^{(\bar{\sigma}_1 \mp i(\Omega \mp \omega))t_1},$$

$$\tilde{B}_3^\pm = \pm \tilde{B}_2 a^2 \frac{(a^2 - 1)\omega^2 - 2\bar{\sigma}_1(\bar{\sigma}_1 \mp i\Omega)}{2i\Omega(\bar{\sigma}_1 \mp i(\Omega \pm \omega))} e^{(\bar{\sigma}_1 \mp i(\Omega \pm \omega))t_1},$$

$$\Omega = \sqrt{a^2\omega^2 - \bar{\sigma}_1^2},$$

$$\tilde{A}_2 = \frac{e^{-i\omega t_1}}{2a} (2a \cos \omega_1 t_1 + i(1 + a^2 \sin \omega_1 t_1)),$$

$$\tilde{B}_2 = ie^{i\omega t_1} \frac{1 - a^2}{2a} \sin \omega_1 t_1;$$

$$E(t, x) = \tilde{A}_5^+ e^{-\bar{\sigma} t} e^{i(\bar{\Omega} t - kx)} + \tilde{A}_5^- e^{-\bar{\sigma} t} e^{-i(\bar{\Omega} t + kx)}, \quad \tau_1 < t < t_1 + \tau_1, \quad (12)$$

где

$$\tilde{A}_5^\pm = \mp \left\{ \tilde{A}_4 \frac{e^{i\omega \tau_1}}{\bar{\sigma} \mp i(\Omega \mp \omega)} + \tilde{B}_4 \frac{e^{-i\omega \tau_1}}{\bar{\sigma} \mp i(\Omega \pm \omega)} \right\} \times \frac{\bar{\sigma}(\bar{\sigma} \mp i\Omega)}{i\Omega} e^{(\bar{\sigma} \mp i\Omega)\tau_1},$$

$$\bar{\Omega} = \sqrt{\omega^2 - \bar{\sigma}^2},$$

$$\tilde{A}_4 = -\frac{e^{-(\bar{\sigma}_1 + i\omega)\tau_1}}{2i\Omega} \left\{ \bar{\sigma}_1 + (1 - a^2) \frac{i\omega}{2} \right\} \times \left\{ \tilde{A}_2 \left(\frac{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega + \omega)}{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega - \omega)} e^{i\Omega \tau_1} - \frac{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega - \omega)}{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega + \omega)} e^{-i\Omega \tau_1} \right) + 2\tilde{B}_2 ie^{-2i\omega t_1} \sin \Omega \tau_1 \right\},$$

$$\tilde{B}_4 = -\frac{e^{-(\bar{\sigma}_1 - i\omega)\tau_1}}{2i\Omega} \left\{ \bar{\sigma}_1 - (1 - a^2) \frac{i\omega}{2} \right\} \times \left\{ \tilde{B}_2 \left(\frac{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega - \omega)}{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega + \omega)} e^{i\Omega \tau_1} - \frac{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega + \omega)}{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega - \omega)} e^{-i\Omega \tau_1} \right) + 2\tilde{A}_2 ie^{2i\omega t_1} \sin \Omega \tau_1 \right\};$$

$$E(t, x) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + B_1 e^{-i(\omega t + kx)}, \quad t_1 + \tau_1 < t < T, \quad (13)$$

где

$$A_1 = \tilde{A}_4 \frac{i\bar{\sigma}}{2\bar{\Omega}} e^{-(\bar{\sigma} + i\omega)t_1} \times \left\{ \frac{\bar{\sigma} - i(\bar{\Omega} + \omega)}{\bar{\sigma} - i(\bar{\Omega} - \omega)} e^{i\bar{\Omega} t_1} - \frac{\bar{\sigma} + i(\bar{\Omega} - \omega)}{\bar{\sigma} + i(\bar{\Omega} + \omega)} e^{-i\bar{\Omega} t_1} \right\} - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\Omega}} \tilde{B}_4 e^{-(\bar{\sigma} + i\omega)t_1 - 2i\omega \tau_1} \sin \bar{\Omega} t_1,$$

$$B_1 = \tilde{B}_4 \frac{i\bar{\sigma}}{2\bar{\Omega}} e^{-(\bar{\sigma} - i\omega)t_1} \times \left\{ \frac{\bar{\sigma} - i(\bar{\Omega} - \omega)}{\bar{\sigma} - i(\bar{\Omega} + \omega)} e^{i\bar{\Omega} t_1} - \frac{\bar{\sigma} + i(\bar{\Omega} + \omega)}{\bar{\sigma} + i(\bar{\Omega} - \omega)} e^{-i\bar{\Omega} t_1} \right\} - \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\Omega}} \tilde{A}_4 e^{-(\bar{\sigma} - i\omega)t_1 + 2i\omega \tau_1} \sin \bar{\Omega} t_1.$$

Подставляя выражения (10)–(13) в формулы (5) и используя метод математической индукции, получим рекуррентные соотношения, описывающие эволюцию электрического поля на произвольном периоде изменения параметров среды, начиная со второго ($n = 2, \dots, N$). Так, на интервале времени $(n-1)T < t < t_1 + (n-1)T$

$$E(t, x) = L_n e^{i(\omega_1 t - kx)} + M_n e^{-i(\omega_1 t + kx)}, \quad (14)$$

где

$$L_n = \frac{a}{2} e^{-i\omega_1(n-1)T} \left\{ (1+a) e^{i\omega(n-1)T} A_{n-1} - (1-a) e^{-i\omega(n-1)T} B_{n-1} \right\},$$

$$M_n = -\frac{a}{2} e^{i\omega_1(n-1)T} \left\{ (1-a) e^{i\omega(n-1)T} A_{n-1} - (1+a) e^{-i\omega(n-1)T} B_{n-1} \right\}.$$

На интервале времени $t_1 + (n-1)T < t < \tau_1 + (n-1)T$ где

$$E(t, x) = (R_n^+ + S_n^+)e^{-\bar{\sigma}_1 t} e^{i(\Omega t - kx)} + (R_n^- + S_n^-)e^{-\bar{\sigma}_1 t} e^{-i(\Omega t + kx)}, \quad (15)$$

где

$$R_n^\pm = \pm E_n a^2 \frac{(a^2 - 1)\omega^2 - 2\bar{\sigma}_1(\bar{\sigma}_1 \mp i\Omega)}{2i\Omega(\bar{\sigma}_1 \mp i(\Omega \mp \omega))}$$

$$\times e^{(\bar{\sigma}_1 \mp i(\Omega \mp \omega))(t_1 + (n-1)T)},$$

$$S_n^\pm = \pm P_n a^2 \frac{(a^2 - 1)\omega^2 - 2\bar{\sigma}_1(\bar{\sigma}_1 \mp i\Omega)}{2i\Omega(\bar{\sigma}_1 \mp i(\Omega \pm \omega))}$$

$$\times e^{(\bar{\sigma}_1 \mp i(\Omega \pm \omega))(t_1 + (n-1)T)},$$

$$E_n = \frac{e^{-i\omega t_1}}{2a} \left(2a \cos \omega t_1 + i(1 + a^2) \sin \omega t_1 \right) A_{n-1}$$

$$- i e^{-i\omega t_1} \frac{1 - a^2}{2a} e^{-2i\omega(n-1)T} \sin \omega t_1 B_{n-1},$$

$$P_n = i e^{i\omega t_1} \frac{1 - a^2}{2a} e^{2i\omega(n-1)T} \sin \omega t_1 A_{n-1}$$

$$+ \frac{e^{i\omega t_1}}{2a} \left(2a \cos \omega t_1 - i(1 + a^2) \sin \omega t_1 \right) B_{n-1}.$$

На интервале времени $\tau_1 + (n-1)T < t < t_1 + \tau_1 + (n-1)T$

$$E(t, x) = C_n^+ e^{-\bar{\sigma} t} e^{i(\bar{\Omega} t - kx)} + C_n^- e^{-\bar{\sigma} t} e^{-i(\bar{\Omega} t + kx)}, \quad (16)$$

где

$$C_n^\pm = \mp \left\{ W_n \frac{e^{i\omega(\tau_1 + (n-1)T)}}{\bar{\sigma} \mp i(\Omega \mp \omega)} + X_n \frac{e^{-i\omega(\tau_1 + (n-1)T)}}{\bar{\sigma} \mp i(\Omega \pm \omega)} \right\} \times \frac{\bar{\sigma}(\bar{\sigma} \mp i\Omega)}{i\Omega} e^{(\bar{\sigma} \mp i\Omega)(\tau_1 + (n-1)T)},$$

$$W_n = -\frac{e^{-(\bar{\sigma}_1 + i\omega)\tau_1}}{2i\Omega} \left\{ \bar{\sigma}_1 + (1 - a^2) \frac{i\omega}{2} \right\}$$

$$\times \left\{ E_n \left(\frac{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega + \omega)}{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega - \omega)} e^{i\Omega\tau_1} - \frac{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega - \omega)}{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega + \omega)} e^{-i\Omega\tau_1} \right) \right.$$

$$\left. + 2iP_n e^{-2i\omega(t_1 + (n-1)T)} \sin \Omega t_1 \right\},$$

$$X_n = -\frac{e^{-(\bar{\sigma}_1 - i\omega)\tau_1}}{2i\Omega} \left\{ \bar{\sigma}_1 - (1 - a^2) \frac{i\omega}{2} \right\}$$

$$\times \left\{ P_n \left(\frac{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega - \omega)}{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega + \omega)} e^{i\Omega\tau_1} - \frac{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega + \omega)}{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega - \omega)} e^{-i\Omega\tau_1} \right) \right.$$

$$\left. + 2iE_n e^{2i\omega(t_1 + (n-1)T)} \sin \Omega t_1 \right\}.$$

На интервале времени $t_1 + \tau_1 + (n-1)T < t < nT$

$$E(t, x) = A_n e^{i(\omega t - kx)} + B_n e^{-i(\omega t + kx)}, \quad (17)$$

$$A_n = W_n \frac{e^{-(\bar{\sigma} + i\omega)t_1}}{-2i\bar{\Omega}\bar{\sigma}^{-1}} \left\{ \frac{\bar{\sigma} - i(\bar{\Omega} + \omega)}{\bar{\sigma} - i(\bar{\Omega} - \omega)} e^{i\bar{\Omega}t_1} - \frac{\bar{\sigma} + i(\bar{\Omega} - \omega)}{\bar{\sigma} + i(\bar{\Omega} + \omega)} e^{-i\bar{\Omega}t_1} \right\} - \frac{\bar{\sigma} X_n}{\bar{\Omega}} e^{-(\bar{\sigma} + i\omega)t_1 - 2i\omega(\tau_1 + (n-1)T)} \sin \bar{\Omega}t_1,$$

$$B_n = X_n \frac{e^{-(\bar{\sigma} - i\omega)t_1}}{-2i\bar{\Omega}\bar{\sigma}^{-1}} \left\{ \frac{\bar{\sigma} - i(\bar{\Omega} - \omega)}{\bar{\sigma} - i(\bar{\Omega} + \omega)} e^{i\bar{\Omega}t_1} - \frac{\bar{\sigma} + i(\bar{\Omega} + \omega)}{\bar{\sigma} + i(\bar{\Omega} - \omega)} e^{-i\bar{\Omega}t_1} \right\} - \frac{\bar{\sigma} W_n}{\bar{\Omega}} e^{-(\bar{\sigma} - i\omega)t_1 + 2i\omega(\tau_1 + (n-1)T)} \sin \bar{\Omega}t_1.$$

Как видно из формул (10)–(17), модуляция параметров безграничной области приводит к расщеплению первичной монохроматической волны на прямую и обратную монохроматические волны. Абсолютные значения волновых чисел новых волн совпадают с абсолютным значением волнового числа первичной волны, а амплитуды и частоты этих волн являются кусочно-постоянными функциями времени.

В случае большой проводимости ($\bar{\sigma}_1 > a\omega$ для интервалов времени $t_1 + (n-1)T < t < \tau_1 + (n-1)T$, $n = 1, 2, 3 \dots$ или $\bar{\sigma} > \omega$ для интервалов времени $\tau_1 + (n-1)T < t < t_1 + \tau_1 + (n-1)T$, $n = 1, 2, 3 \dots$) частота становится мнимой, а образовавшиеся волны аperiodическими.

Отметим, что выражения (13) при $t_1 = 0$ и $a = 1$ совпадают с соответствующими выражениями работы [8], которые описывают преобразование поля плоской монохроматической волны, вызванное импульсным возмущением проводимости безграничной области.

Представляет интерес изучение состояния поля в конце модулирующего пакета из n импульсов проводимости и проницаемости как функции этого количества импульсов. Для этого проведем анализ коэффициентов A_n и B_n . Введем коэффициенты, которые не зависят от n

$$s = \bar{\sigma} / \omega, \quad q = a\sqrt{1 - a^2 s^2}, \quad \tau = \omega t_1, \quad \tau_d = \omega \tau_1,$$

$$\tau_s = \omega \tau_2, \quad \tau_T = \omega T, \quad g = \sqrt{1 - s^2};$$

$$y = \frac{e^{i\tau}}{2a} \left(2a \cos a\tau - i(1 + a^2) \sin a\tau \right),$$

$$z = -ie^{-i\tau} \frac{1 - a^2}{2a} \sin a\tau;$$

$$f = \frac{e^{-(a^2 s + i)\tau_d}}{2q} \left\{ 2q \cos q\tau_d + i(1 + a^2) \sin q\tau_d \right\},$$

$$h = \frac{e^{-(a^2 s - i)\tau_d - 2i\tau}}{2q} \left\{ 2a^2 s - i(1 - a^2) \right\} \sin q\tau_d;$$

$$u = e^{-(s+i)\tau} \left\{ \cos g\tau + i \frac{\sin g\tau}{g} \right\},$$

$$v = -\frac{s}{g} e^{-(s-i)\tau + 2i\tau_d} \sin g\tau.$$

Тогда выражения для коэффициентов $E_n, P_n, W_n, X_n, A_n, B_n$ можно переписать в виде

$$A_{n+1} = uW_{n+1} + v^* e^{-2int\tau} X_{n+1},$$

$$B_{n+1} = ve^{2int\tau} W_{n+1} + u^* X_{n+1}; \quad (18)$$

$$W_n = fE_n - h^* e^{-2int\tau} P_n, \quad X_n = -he^{2int\tau} E_n + f^* P_n; \quad (19)$$

$$E_n = y^* A_{n-1} + ze^{-2i(n-1)t\tau} B_{n-1},$$

$$P_n = z^* e^{2i(n-1)t\tau} A_{n-1} + yB_{n-1}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19), а (19) в (18), после некоторых преобразований получим

$$A_{n+1} e^{i(n+1)t\tau} = c_{11} e^{int\tau} A_n + c_{12} e^{-int\tau} B_n,$$

$$B_{n+1} e^{-i(n+1)t\tau} = c_{21} e^{int\tau} A_n + c_{22} e^{-int\tau} B_n, \quad (21)$$

где

$$c_{11} = ufy^* - v^* hy^* e^{2it\tau} - uh^* z^* e^{-2it\tau} + v^* f^* z^*,$$

$$c_{12} = u fz - v^* hze^{-2it\tau} - uh^* ye^{2it\tau} + v^* f^* y,$$

$$c_{21} = vfy^* - u^* hy^* e^{-2it\tau} - vh^* z^* e^{2it\tau} + u^* f^* z^*,$$

$$c_{22} = v fz^* - u^* hze^{2it\tau} - vh^* ye^{-2it\tau} + u^* f^* y.$$

Вводя новые обозначения для амплитуд $a_n = A_n e^{int\tau}$, $b_n = B_n e^{-int\tau}$, при условии, что

$$a_1 = e^{it\tau} [(uf - v^* h)y^* + (f^* v^* - uh^*)z^*],$$

$$b_1 = e^{-it\tau} [(vf - u^* h)y^* + (f^* u^* - vh^*)z^*],$$

перепишем выражение (21) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = e^{-s(a^2\tau_d + \tau)} R \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Используя метод математической индукции, перепишем (22) в виде

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = e^{-ns(a^2\tau_d + \tau)} R^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Поскольку $e^{-s(a^2\tau_d + \tau)} \cdot \det R = 1$, то [9]

$$R^n = U_{n-1} \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \right) R - U_{n-2} \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \right) I, \quad (24)$$

где $U_n(\alpha)$ — многочлен Чебышева порядка n , I — единичная матрица.

Подставляя (24) в (23), получим выражения для амплитуд прямой и обратной волн на интервале покоя

произвольного $n + 1$ периода изменения параметров среды

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= e^{-i(n+1)t\tau - n(a^2\tau_d + i\tau)} \left\{ (c_{11}a_1 + c_{12}b_1) \right. \\ &\quad \left. \times U_{n-1} \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \right) - U_{n-2} \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \right) a_1 \right\}, \\ B_{n+1} &= e^{i(n+1)t\tau - n(a^2\tau_d + i\tau)} \left\{ (c_{21}a_1 + c_{22}b_1) \right. \\ &\quad \left. \times U_{n-1} \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \right) - U_{n-2} \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \right) b_1 \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

В данной работе была проведена численная оценка амплитуд прямой и обратной волн для типичных значений величин a и s полупроводника типа InGaAsP ($a \approx 1$, $b \approx 0.05$) [10]. Эти расчеты показали, что импульсно-периодическая модуляция диэлектрической проницаемости и проводимости среды может приводить к тому, что амплитуды прямой и обратной волн по абсолютной величине становятся больше амплитуды первичной волны. Это превосходство в пассивных средах ($\sigma \geq 0$) может достигаться не только за счет изменения диэлектрической проницаемости (рис. 2, 3), но и за счет изменения проводимости среды, как показано на рис. 4, 5.

Как видно, усиление прямой и обратной волн за счет изменения проводимости среды имеет место для малых значений параметра s , что соответствует малым значениям проводимости или большим значениям частоты первичного сигнала.

Численное исследование выражений (25) также показало, что многочлен, стоящий в правой части второго равенства в (25), при определенном подборе параметров n, s, τ, τ_d и τ_T обращается в нуль. Это означает, что при определенном подборе параметров n, s, τ, τ_d и τ_T обратная волна исчезает. Очевидно, что если при некоторых значениях параметров n, s, τ, τ_d и τ_T амплитуда прямой волны по абсолютному значению превосходит амплитуду первичной волны, а амплитуда обратной волны равна нулю, то имеет место режим усиления первичной волны.

Важная особенность поведения амплитуд прямой и обратной волн при переходе от периода к периоду может быть определена исследованием поведения отношений a_{n+1}/a_n и b_{n+1}/b_n при изменении числа n . Преобразуя матричные выражения (22), получим

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= c_{11} + \frac{c_{12}}{F_n}, \\ \frac{b_{n+1}}{b_n} &= c_{22} + c_{21}F_n, \quad (26) \end{aligned}$$

где $F_n = a_n/b_n$.

Выполняя в (26) деление верхнего равенства на нижнее, в предположении неравенства нулю амплитуды обратной волны (т.е. исключая режим отсутствия обратной волны) получим

$$F_{n+1} = \frac{c_{12} + c_{11}F_n}{c_{22} + c_{21}F_n}. \quad (27)$$

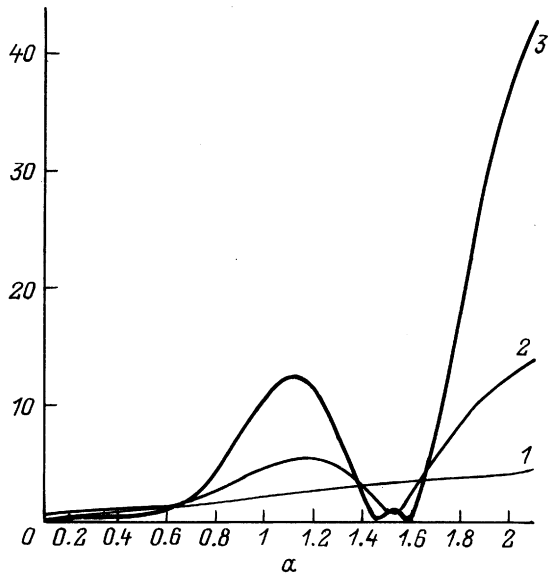


Рис. 2. Зависимость модуля амплитуды прямой волны A_n от относительного изменения диэлектрической проницаемости α для разных количеств возмущающих импульсов параметров среды. $s = 0.05$, $\tau = 1$, $\tau_d = 2$, $\tau_T = 5$; $n = 3$ (1), 4 (2), 5 (3).

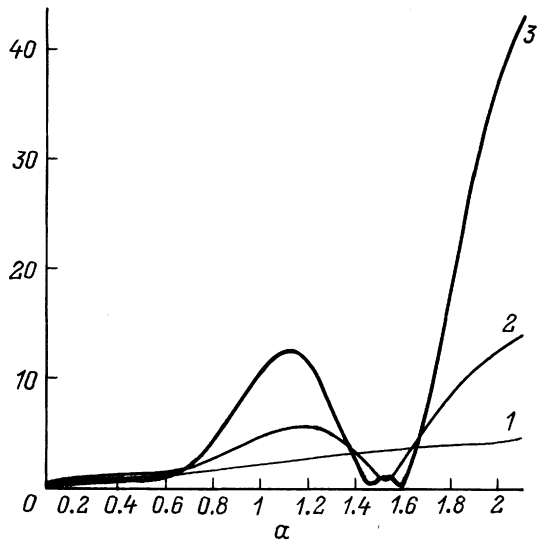


Рис. 3. Зависимость модуля амплитуды прямой волны B_n от относительного изменения диэлектрической проницаемости α для разных количеств возмущающих импульсов параметров среды. $s = 0.05$, $\tau = 1$, $\tau_d = 2$, $\tau_T = 5$; $n = 2$ (1), 3 (2), 4 (3).

В работе [11] было показано, что в случае синхронного возмущения параметров среды ($\tau = 0$) для любых возможных значений параметров n, s, τ_d и τ_T имеет место равенство $|F_1| > 1$. Как известно из теории конформных отображений [12], дробно-линейная функция (27) переводит внешность круга единичного радиуса во внешность круга единичного радиуса. Отсюда

следует, что если $|F_1| > 1$, то тем более $|F_n| > 1$. Это означает, что амплитуда прямой волны в случае синхронного возмущения параметров среды по модулю превосходит амплитуду обратной волны. Исходя из физических соображений, можно предположить, что в случае несинхронного возмущения параметров безграничной среды ($t_1 \neq 0$) для любых возможных значений

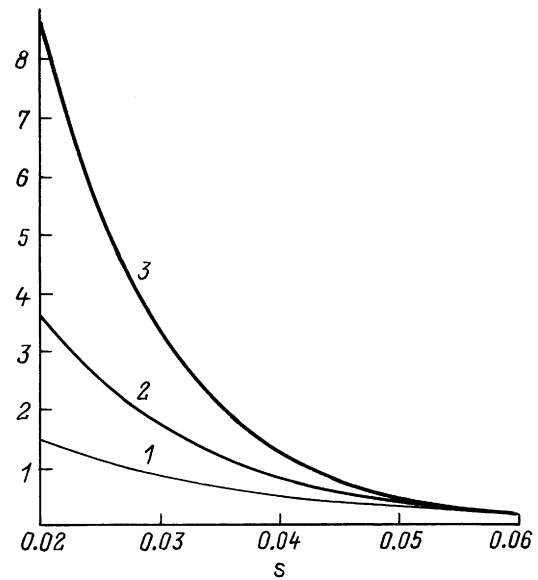


Рис. 4. Зависимость модуля амплитуды прямой волны A_n от относительного изменения диэлектрической проницаемости s для разных количеств возмущающих импульсов параметров среды. $\alpha = 1$, $\tau = 0$, $\tau_d = 2$, $\tau_T = 5$; $n = 3$ (1), 4 (2), 5 (3).

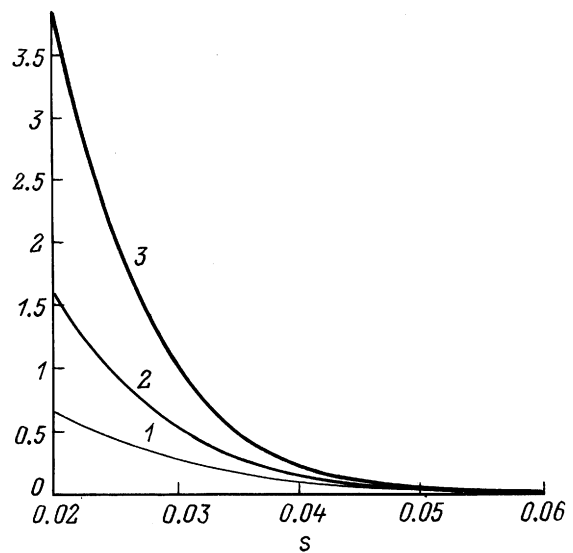


Рис. 5. Зависимость модуля амплитуды прямой волны B_n от относительного изменения диэлектрической проницаемости s для разных количеств импульсов возмущающих параметров среды. $\alpha = 1$, $\tau = 0$, $\tau_d = 2$, $\tau_T = 5$; $n = 6$ (1), 7 (2), 8 (3).

параметров n , s , τ , τ_d и τ_T также имеет место равенство $|F_1| > 1$. Действительно, обширный численный анализ выражения (27) не позволил отыскать таких наборов параметров n , s , τ , τ_d и τ_T , при которых бы $|F_1| \leq 1$. Таким образом, амплитуда прямой волны в случае несинхронного возмущения параметров среды, как правило, по модулю превосходит амплитуду обратной волны.

Заключение

В данной работе рассмотрено преобразование монохроматической электромагнитной волны конечным во времени импульсно-периодическим изменением во времени диэлектрической проницаемости и проводимости безграничной области. Показано, что преобразованное поле в любой точке положительной полуоси времени представляет собой сумму прямой и обратной монохроматических волн, абсолютное значение волновых чисел которых совпадают с абсолютным значением волнового числа первичной волны, а амплитуды и частоты являются кусочно-постоянными функциями времени. На интервале покоя параметров среды амплитуда прямой волны по модулю превосходит амплитуду обратной волны, а при некоторых значениях параметров среды и частоты первичной волны обратная волна исчезает. Численные исследования также показали, что на интервалах покоя параметров среды амплитуды образовавшихся волн по абсолютному значению могут превосходить амплитуду первичной волны. Причем в пассивных средах данное превосходство может достигаться как за счет изменения диэлектрической проницаемости, так и за счет изменения проводимости в случае коротких возмущающих импульсов.

Список литературы

- [1] Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние радиоволн. Пер. с англ. М.: Мир, 1978. Т. 1. 543 с.
- [2] Аверков С.И., Болдин В.П. // Изв. вузов Радиофизика. 1980. Т. 23. № 9. С. 1060–1066.
- [3] Борисов В.В. Неустановившиеся электромагнитные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 240 с.
- [4] Harfoush F.A., Taflov A. // IEEE Trans. on Antennas and Propag. 1991. Vol. 39. N 7. P. 898–906.
- [5] Нерух А.Г., Хижняк Н.А. Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков: НПО Тест-Радио, 1991. 280 с.
- [6] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
- [7] Нерух А.Г., Рыбин О.Н., Щербатко И.В. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 84–92.
- [8] Борисов В.В. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1989. Т. 29. № 5. С. 730–737.
- [9] Born M., Wolf E. Principle of Optics. Oxford; London; Edinburgh; New York; Paris; Frankfurt: Pergamon press, 1964. 856 p.
- [10] Visser T.D., Block H., Lenstra D. // IEEE J. Quantum Electronics. 1995. Vol. 31. N 10. P. 1803–1810.

[11] Рыбин О.Н. Канд. дис. Харьков, 1999. 142 с.

[12] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. С. 736.