

# Флуктуационная модель высокочастотной прыжковой электропроводности умеренно компенсированных полупроводников с водородоподобными примесями

© Н.А. Поклонский, С.А. Вырко, А.Г. Забродский\*

Белорусский государственный университет,  
220050 Минск, Белоруссия

\* Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: poklonski@bsu.by

(Поступила в Редакцию 20 октября 2004 г.)

Разработана модель, согласно которой прыжок электрона (или дырки) между двумя водородоподобными донорами (или акцепторами) происходит лишь при выравнивании их энергетических уровней за счет тепловых и/или электростатических флуктуаций в легированном кристалле. Считается, что основной вклад в действительную часть высокочастотной прыжковой электропроводности вносят пары акцепторов, время туннелирования дырки внутри которых равно половине периода внешнего электрического поля и совпадает с ним по фазе. Тогда мнимая и действительная части прыжковой электропроводности примерно равны. Приведено сравнение расчетов по предложенной модели с экспериментальными данными для  $p$ -Ge:Ga с промежуточной степенью компенсации основной легирующей примеси.

Работа поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (грант № Ф01-199), Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 04-02-16587) и грантом Президента Российской Федерации (НШ-2223.2003.02).

## 1. Введение

Экспериментально установлено (см., например, [1,2]), что в легированных полупроводниковых кристаллах при прыжковом движении электронов (дырок) между локализованными состояниями на радиочастотах ( $10^2 < \omega/2\pi < 10^7$  Hz) действительная часть высокочастотной электропроводности  $\text{Re } \sigma_n(\omega) \propto \omega^s$ , где  $0.6 < s < 1$ .

Аналитическое описание прыжковой электропроводности на переменном токе по основным состояниям примесей в компенсированных ковалентных кристаллических полупроводниках до сих пор отсутствует (см. обзоры [3–5]). В работах [6,7] представлены параметрические зависимости прыжковой электропроводности от частоты тока и температуры для случая предельно низкой степени компенсации, когда прыжки электрона (дырки) осуществляются только посредством поглощения или испускания фонона. Роль подгоночного параметра играет константа взаимодействия фононов с локализованными на донорах (акцепторах) носителями заряда. Так, для полупроводника  $n$ -типа считалось [6], что высокочастотная прыжковая проводимость обусловлена прыжками электрона между основными состояниями двух ближайших по расстоянию доноров в зарядовых состояниях (0) и (+1) в окрестности акцептора в зарядовом состоянии (–1). В [7] особенности температурной зависимости высокочастотной прыжковой электропроводности слабокомпенсированных кристаллов  $n$ -типа описываются с учетом того, что возможны прыжки электрона между двумя донорами через третий (промежуточный) донор в окрестности одного отрицательно заряженного

акцептора. При этом один ионизованный донор является ближайшим к нейтральному донору по расстоянию, а другой ионизованный донор — ближайшим к нему по энергии. В моделях [3,6,7] примесная зона полагалась „классической“, т.е. считалось, что разброс энергетических уровней основной легирующей примеси по кристаллу значительно больше квантовомеханического уширения этих уровней вследствие конечности времени локализации на них носителей заряда. В работе [8] для описания температурной зависимости высокочастотной прыжковой электропроводности аморфных германия и кремния предложена модель перехода (прыжка) электрона между парами дефектов с глубокими уровнями в запрещенной энергетической щели. Модель учитывает одно возбужденное и два основных состояния пары дефектов, между которыми происходит переход электрона: термический заброс электрона с одного дефекта на возбужденное состояние пары и последующее туннелирование на другой дефект.

Важно отметить, что в моделях [3–8] энергия каждого одноэлектронного состояния (примесного уровня) в легированных ковалентных кристаллах считалась фиксированной, т.е. не изменяющейся при прыжках электрона (дырки) между примесными атомами.

В то же время для описания прыжков полярона малого радиуса по узлам решетки в ионном кристалле Холстейн (см. репринт его статьи 1959 г. [9], а также [10–12]) ввел понятие „случая совпадения“ поляронных потенциальных ям. Энергетический уровень полярона является функцией мгновенного положения ближайших к нему атомов. Из-за тепловых колебаний атомов эти положения постоянно меняются, так что

энергия электрона проводимости, захваченного им же созданной поляризацией решетки, также меняется во времени. В некоторый момент может возникнуть ситуация, при которой энергия узла со связанным электроном равна энергии ближайшего свободного узла кристаллической решетки. Такое моментальное событие называется „случаем совпадения“ энергетических уровней. В модели [9] считается, что прыжки полярона происходят, когда занятое начальное и незанятое конечное состояния совпадают по энергиям, но при этом деформация решетки в конечном состоянии не обязательно такая же, как в начальном состоянии. Поэтому в единичном акте прыжка энергия фононов либо отдается, либо забирается от решетки, однако в среднем энергия поляризации при движении полярона не переносится.

В работе [13] для описания прыжковой электропроводности на постоянном токе в легированных полупроводниках предложена модель флуктуационного „выравнивания“ энергетических уровней локализованных состояний (примесных атомов).<sup>1</sup> Считалось, что временные флуктуации энергии локализованных состояний обусловлены прыжковой диффузией по ним электронов. Однако предложенные в этой работе формулы лишь качественно согласуются с известными экспериментальными данными.

В [15,16] для описания прыжковой электропроводности на постоянном токе и термоэдс развита модель, согласно которой в кристаллической матрице основная примесь (акцепторы) и компенсирующая (доноры) образуют единую простую кубическую „примесную решетку“. Прыжки дырок происходят при термически активируемом выравнивании энергетических уровней акцепторов, в то время как доноры блокируют соответствующие узлы решетки из примесных атомов. Пронумеруем акцепторы; номера будем обозначать индексами  $\alpha, \beta$ . Заметим далее, что выравнивание (совпадение) уровней двух близких акцепторов может происходить как за счет упругой деформации кристаллической решетки вблизи акцепторов, создаваемой фононами, так и за счет влияния кулоновских флуктуаций, возникающих вследствие прыжков дырок между другими акцепторами. В момент совпадения уровней<sup>2</sup> нейтрального и отрицательно заряженного акцепторов образуется „резонансный“ двухузельный кластер: дырка, находящаяся на акцепторе  $\alpha$ , связывается с некоторым отрицательно заряженным акцептором  $\beta$  и принадлежит одновременно двум акцепторам. Через какое-то время резонансные условия перестают выполняться, и дырка может оказаться на акцепторе  $\beta$  или же снова на акцепторе  $\alpha$ . После этого акцепторы  $\alpha$  и  $\beta$  могут снова образовать резонансный кластер или включиться в другие резонансные кластеры (пары). Для режима прыжков по ближайшим примесным

атомам в [15] дано количественное описание концентрации зависимости энергии активации прыжковой электропроводности с приложением к  $p$ -Ge:Ga, а также ее предэкспоненциального множителя. Результаты расчетов по модели [16] согласуются с известными экспериментальными данными по низкотемпературной прыжковой термоэдс и теплоемкости на диэлектрической стороне фазового перехода изолятор–металл.

Цель настоящей работы — развитие модели [15,16] флуктуационного выравнивания уровней энергии акцепторов в запрещенной зоне кристалла для описания высокочастотной прыжковой проводимости в парном приближении. Проанализирован случай, когда концентрации акцепторов в зарядовых состояниях (0) и (–1) примерно равны, т.е. случай умеренных степеней компенсации акцепторов донорами. Рассматриваются относительно небольшие уровни легирования образцов  $p$ -типа вдали от перехода изолятор–металл при температурах, когда доминируют прыжки дырок между ближайшими по состоянию акцепторами (nearest neighbor hopping, NNH).

## 2. Плотность прыжкового тока и электропроводность

Рассмотрим кристаллический полупроводник  $p$ -типа с концентрацией  $N = N_0 + N_{-1}$  водородоподобных акцепторов (индексы обозначают их зарядовые состояния) и  $N_{+1} = KN$  доноров в зарядовом состоянии (+1), где  $K$  — степень компенсации акцепторов донорами.<sup>3</sup> Условие электронейтральности имеет вид:  $N_{-1} = KN$ . Считаем температуру достаточно низкой, так что обмен дырками между акцепторами в зарядовых состояниях (0) и (–1) осуществляется только прыжковым образом (без участия состояний  $v$ -зоны и возбужденных состояний акцепторов), а уровень легирования слабым, так что борровский радиус локализации дырки на акцепторе много меньше средней длины прыжка.

Пусть к макроскопическому трехмерному образцу полупроводника вдоль оси  $x$  приложено внешнее переменное во времени электрическое поле напряженностью  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$ , где  $2\pi/\omega$  — период гармонических колебаний,  $t$  — время.

Изменение во времени вероятности  $f_\alpha$  того, что акцептор с номером  $\alpha$  находится в зарядовом состоянии (0), удовлетворяет уравнению баланса [3]

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \sum_\beta [f_\beta(1 - f_\alpha)\Gamma_{\beta\alpha} - f_\alpha(1 - f_\beta)\Gamma_{\alpha\beta}], \quad (1)$$

где индексы  $\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots$  нумеруют в образце все акцепторы,  $\Gamma_{\alpha\beta}$  — вероятность прыжка дырки с акцептора  $\alpha$  на акцептор  $\beta$  в единицу времени (темп, или частота переходов дырки).

<sup>3</sup> К умеренным степеням компенсации условно относим значения  $0.1 < K < 0.9$ , которые не подходят под определение низких ( $K \ll 1$ ) и высоких ( $1 - K \ll 1$ ). Именно при умеренной степени компенсации величина прыжковой электропроводности на постоянном токе максимальна [17].

<sup>1</sup> Модель флуктуационного приготовления барьера для туннелирования атома (или молекулы) позволила объяснить основные характеристики твердофазных криохимических реакций (см., например, [14]).

<sup>2</sup> С точностью до квантовомеханического уширения уровней акцепторов из-за конечности времени локализации на них дырки.

Плотность переменного прыжкового тока  $J_h$  определяется изменением во времени проекции на ось  $x$  электрического дипольного момента единицы объема кристалла с равным числом ионизованных акцепторов и доноров (ср. с [18])

$$J_h = \frac{e}{2V} \left[ \sum_{\alpha} x_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} - \sum_{\beta} x_{\beta} \frac{d(1-f_{\beta})}{dt} \right], \quad (2)$$

где  $e$  — модуль заряда электрона,  $V$  — объем образца,  $x_{\alpha}$  — координата акцептора с номером  $\alpha$ .

Из (2) с учетом (1), следуя [3,19], имеем

$$J_h = \frac{e}{2V} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (x_{\beta} - x_{\alpha}) [f_{\alpha}(1-f_{\beta})\Gamma_{\alpha\beta} - f_{\beta}(1-f_{\alpha})\Gamma_{\beta\alpha}], \quad (3)$$

где  $(x_{\beta} - x_{\alpha}) = r_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\beta}$  — проекция вектора  $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ , соединяющего акцепторы  $\alpha$  и  $\beta$ , на ось  $x$  (вдоль напряженности внешнего электрического поля),  $\theta_{\alpha\beta}$  — угол между вектором  $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$  и осью  $x$ .

Примем, что во внешнем однородном электрическом поле  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$  частота прыжков дырки между акцепторами имеет вид

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{(eq)} \exp\left(\frac{e(x_{\beta} - x_{\alpha})\mathcal{E}}{k_B T}\right), \quad (4)$$

где индекс (eq) обозначает равновесное (при  $\mathcal{E}_0 = 0$ ) значение  $\Gamma_{\alpha\beta}^{(eq)}$  для акцепторов  $\alpha$  и  $\beta$ , находящихся на расстоянии  $r_{\alpha\beta}$  друг от друга,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура.

Для случая слабого электрического поля ( $|e(x_{\beta} - x_{\alpha})\mathcal{E}_0| \ll k_B T$ ), когда  $f_{\alpha} \approx f_{\alpha}^{(eq)}$ , из (3) с учетом (4) следует выражение для действительной части прыжковой электропроводности (по форме напоминающее соотношение Титейки [20,21])<sup>4</sup>

$$\text{Re } \sigma_h = \frac{e^2}{V k_B T} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (x_{\beta} - x_{\alpha})^2 f_{\alpha}^{(eq)} (1 - f_{\beta}^{(eq)}) \Gamma_{\alpha\beta}^{(eq)}, \quad (5)$$

индекс (eq) далее не пишем, так как все используемые величины будут равновесными.

Следует заметить, что в выражениях (1)–(5) координаты  $x_{\alpha}$  и  $x_{\beta}$  акцепторов считаются заданными, фактически же они неизвестны, поэтому формулы такого типа напрямую неприменимы к задаче количественного описания экспериментальных данных по прыжковому электропереносу.

Перейдем от дискретного описания прыжкового переноса дырок внутри пар акцепторов к непрерывному. Для замены суммирования в (5) по  $\alpha$  и  $\beta$  на интегрирование по непрерывным переменным  $r$  и  $\theta$ , где  $r_{\alpha\beta} \rightarrow r$ ,  $\theta_{\alpha\beta} \rightarrow \theta$ , найдем плотность распределения расстояния  $r$  между акцепторами в зарядовых состояниях (0) и (–1), а также угла  $\theta$ , задающего ориентацию пар акцепторов относительно оси  $x$ .

<sup>4</sup> Гармонические колебания плотности прыжкового тока  $J_h$  со сдвигом во времени относительно колебаний электрического поля  $\mathcal{E}$  определяются мнимой частью электропроводности  $\sigma_h$ .

В умеренно компенсированном полупроводнике распределение зарядовых состояний примесных атомов по узлам кристаллической решетки можно считать случайным даже при достаточно низких температурах. Тогда вероятность того, что в объеме  $v$  находится  $l$  акцепторов в зарядовом состоянии (–1) не зависит от формы и месторасположения объема  $v$  и дается распределением Пуассона [22–25]

$$\mathcal{P}(l, vN_{-1}) = \frac{1}{l!} (vN_{-1})^l \exp(-vN_{-1}), \quad (6)$$

где  $N_{-1} = KN$  — средняя по кристаллу концентрация ионизованных акцепторов.

Рассмотрим произвольный акцептор в зарядовом состоянии (0). Выберем сферическую систему координат с центром в этом акцепторе. Между сферами радиусами  $r$  и  $r + dr$  выделим кольцо радиусом  $r \sin \theta$ , шириной  $r d\theta$  и толщиной  $dr$ . Тогда из (6) для  $l = 1$  получаем вероятность того, что в кольце объемом  $v = 2\pi \sin \theta r^2 d\theta dr$  найдется акцептор в зарядовом состоянии (–1)

$$P(r, \theta) d\theta dr = 2\pi \sin \theta r^2 KN d\theta dr, \quad (7)$$

где  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Будем считать, что вклад в действительную часть высокочастотной прыжковой электропроводности вносят лишь пары акцепторов, содержащие акцепторы в зарядовых состояниях (0) и (–1). При этом расстояние  $R_{\omega}$  между акцепторами в паре должно быть таким, чтобы время туннелирования дырки между ними было равно половине периода гармонических колебаний внешнего электрического поля, поскольку переходы дырок как с меньшим, так и с большим временем не дают вклада в  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$ . Это означает, что надо умножить плотность  $P(r, \theta)$  распределения пар по расстояниям на безразмерную дельта-функцию  $\delta(1 - r/R_{\omega})$ , которая удовлетворяет соотношению  $\int_0^{\infty} \delta(1 - r/R_{\omega}) dr = R_{\omega}$ . Тогда вероятность того, что в произвольной паре акцепторы находятся на расстоянии  $r = R_{\omega}$  в интервале  $(r, r + dr)$  и в объеме  $2\pi \sin \theta r^2 d\theta dr$  равна  $P(r, \theta) \delta(1 - r/R_{\omega}) dr d\theta$ , где плотность распределения угла  $\theta$  между осью координат  $x$  и вектором длиной  $R_{\omega}$ , равномерно распределенным на сфере, равна  $(1/2) \sin \theta$  [22,25]. Итак, вероятность того, что на расстоянии  $r = R_{\omega}$  от акцептора в интервале  $(r, r + dr)$  в телесном угле  $2\pi \sin \theta d\theta$  найдется другой акцептор, есть

$$\frac{1}{2} \sin \theta P(r, \theta) \delta\left(1 - \frac{r}{R_{\omega}}\right) d\theta dr, \quad (8)$$

где  $P(r, \theta)$  дается формулой (7).

В соответствии с указанным выше в формуле (5) проведем замены  $f_{\alpha} \rightarrow (1 - K)$ ,  $(1 - f_{\beta}) \rightarrow K$ ,  $(x_{\beta} - x_{\alpha}) \rightarrow r \cos \theta$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \rightarrow \Gamma_h(r)$  и перейдем от суммирования по  $\beta$  к интегрированию по объему  $V$  кристалла. Тогда оставшаяся сумма по  $\alpha$  содержит  $(1 - K)NV$  одинаковых ненулевых слагаемых, где  $(1 - K)NV$  — число акцепторов в зарядовом состоянии (0). Поэтому

в парном приближении согласно (5) действительная часть высокочастотной прыжковой электропроводности  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$  с учетом (8) имеет вид

$$\text{Re } \sigma_h(\omega) = \frac{e^2 K(1-K)^2 N}{k_B T} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{2} \int_0^\infty 2\pi \sin \theta r^2 K N \times \delta \left( 1 - \frac{r}{R_\omega} \right) (r \cos \theta)^2 \Gamma_h(r) dr d\theta = \frac{\pi^2 e^2 N_h^2 R_\omega^5 \Gamma_h(R_\omega)}{4k_B T}, \quad (9)$$

где  $N_h = N_0 N_{-1} / N = K(1-K)N$  — эффективная концентрация участвующих в прыжковой электропроводности акцепторов,  $\Gamma_h(R_\omega)$  — частота прыжков дырки между акцепторами в зарядовых состояниях (0) и (-1), которую следует вычислить.

### 3. Частота прыжков дырок между акцепторами

Примем гауссову (нормальную) плотность распределения  $g_a(E_a - \bar{E}_a)$  акцепторных уровней энергии  $E_a$  относительно среднего значения  $\bar{E}_a$ . Пусть  $f_0(E_a)$  — вероятность того, что акцептор с энергетическим уровнем  $E_a$  находится в зарядовом состоянии (0). Усреднение по энергии дает<sup>5</sup> вероятность того, что произвольно выбранный в полупроводнике акцептор нейтрален

$$\bar{f}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 g_a d(E_a - \bar{E}_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-u^2/2\gamma^2)}{1 + \exp(-\xi - u)} du, \quad (10)$$

где  $g_a = (\sqrt{2\pi}W)^{-1} \exp[-(E_a - \bar{E}_a)^2/2W^2]$  — плотность распределения энергетических уровней акцепторов в запрещенной зоне;  $W$  — эффективная ширина акцепторной зоны;  $1 - f_0 = f_{-1} = \{1 + \beta_a \times \exp[(E_a + E_F)/k_B T]\}^{-1}$  — вероятность того, что акцептор с уровнем  $E_a > 0$  ионизован;  $\beta_a$  — фактор вырождения уровня;  $E_F < 0$  — уровень Ферми, отсчитанный от потолка  $v$ -зоны, в запрещенной зоне;  $\bar{E}_a > 0$  — центр акцепторной зоны;  $u = (E_a - \bar{E}_a)/k_B T$ ,  $\xi = (E_F + \bar{E}_a + k_B T \ln \beta_a)/k_B T$ ,  $\gamma = W/k_B T$  — безразмерные параметры.

Ширина „классической“ акцепторной зоны  $W$  в основном обусловлена кулоновским взаимодействием только ближайших зарядов (ионизованных акцепторов и доноров), и согласно [26], равна<sup>6</sup>

$$W = \left( \int_0^\infty U^2 P(r) dr \right)^{1/2} \approx 1.64 \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \left( \frac{8\pi}{3} KN \right)^{1/3}, \quad (11)$$

где  $|U| = e^2/4\pi\epsilon r$  — модуль кулоновской энергии взаимодействия двух ионов;  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  — статическая

<sup>5</sup> При промежуточной степени компенсации акцепторов корреляций между их местоположением (в узле кристаллической решетки) и энергией можно пренебречь.

<sup>6</sup> Рассматриваются образцы на изоляторной стороне фазового перехода изолятор—металл.

диэлектрическая проницаемость кристаллической решетки;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $P(r)dr = 4\pi r^2 (N_{-1} + N_{+1}) \exp[-(4\pi/3)r^3 (N_{-1} + N_{+1})] dr$  — согласно (6), (7), вероятность того, что ближайшим к акцептору в зарядовом состоянии (-1) является ион примеси, расположенный в интервале расстояний  $(r, r + dr)$  от него;  $N_{-1} + N_{+1} = 2KN$  — суммарная концентрация ионизованных акцепторов и доноров.

Итак, согласно (10), средние по кристаллу концентрации нейтральных и ионизованных акцепторов (без учета их возбужденных состояний)

$$N_0 = N\bar{f}_0 = N(1 - K), \quad N_{-1} = N(1 - \bar{f}_0) = KN.$$

Из условия электронейтральности  $\bar{f}_{-1} = 1 - \bar{f}_0 = K$  с учетом (11) определяется далее зависимость уровня Ферми  $E_F$  от температуры  $T$ , степени компенсации  $K$  и концентрации  $N = N_0 + N_{-1}$  акцепторов.

Вследствие тепловых (поглощение или испускание фононов) и кулоновских (из-за прыжков дырок между акцепторами) флуктуаций положения энергетических уровней акцепторов относительно потолка  $v$ -зоны полупроводника изменяются во времени. Следуя [13,15], полагаем, что прыжок дырки между двумя акцепторами в зарядовых состояниях (0) и (-1) может произойти лишь при совпадении энергетических уровней этих акцепторов.<sup>7</sup>

Число переходов дырки между акцепторами в зарядовых состояниях (0) и (-1) за один акт флуктуационного выравнивания их уровней  $E_{a1} = \bar{E}_a + u_1 k_B T$  и  $E_{a2} = \bar{E}_a + u_2 k_B T$  равно целой части отношения продолжительности  $t_i(u)$  одного акта совпадения уровней ( $u_1 = u_2 = u$ ) ко времени акта туннелирования  $\tau(u, r)$ . Положим, что за промежуток времени  $t$  суммарная продолжительность всех случаев совпадения уровней двух акцепторов есть  $t_c(u) = \sum_i t_i(u)$ . Вероятность того, что при совпадении уровней акцепторов, находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга, произойдет  $j = 0, 1, 2, \dots$  переходов дырки между ними, аппроксимируем распределением Пуассона [22–25,27]

$$\mathcal{P}(j) = \frac{[t_c(u)/\tau(u, r)]^j}{j!} \exp\left[-\frac{t_c(u)}{\tau(u, r)}\right], \quad (12)$$

где  $t_c(u)/\tau(u, r) = \sum_{j=0}^{\infty} j \mathcal{P}(j)$  — среднее число переходов дырки между ближайшими акцепторами. Частота прыжков дырок между двумя акцепторами в зарядовых состояниях (0) и (-1) при флуктуационном выравнивании их энергетических уровней ( $E_{a1} = E_{a2} = E_r$ ) за время  $t$  есть [15]

$$\Gamma(u, r) = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{\infty} j \mathcal{P}(j) = \frac{t_c(u)}{t\tau(u, r)}. \quad (13)$$

<sup>7</sup> Вследствие прыжков дырок зарядовые состояния (-1) неподвижных акцепторов мигрируют по кристаллу.

Из теории марковских цепей [22,27] следует, что при наблюдении процесса переходов дырки между двумя акцепторами в течение длительного интервала времени ( $t \gg \tau(u, r)$ ) доля времени  $t_c(u)/t$ , проведенного акцепторами в одном из двух возможных состояний (совпадение и несовпадение энергетических уровней) приближенно равна стационарной вероятности  $\mathcal{P}(u, \xi)$  пребывания акцепторов в этих состояниях. Таким образом, отношение  $t_c(u)/t$  приближенно определяется вероятностью того, что энергетические уровни двух акцепторов в зарядовых состояниях (0) и (-1) выровнены [15]

$$\frac{t_c(u)}{t} \approx \mathcal{P}(u, \xi) = \frac{f_0(u, \xi)f_{-1}(u, \xi)}{K(1-K)}, \quad (14)$$

где  $f_0(u, \xi) = [1 + \exp(-\xi - u)]^{-1}$  — вероятность того, что один из акцепторов пары с энергетическим уровнем  $E_\tau = \bar{E}_a + uk_B T$  заполнен дыркой,  $f_{-1}(u, \xi) = [1 + \exp(u + \xi)]^{-1}$  — вероятность того, что другой акцептор пары с таким же энергетическим уровнем  $E_\tau$  находится в зарядовом состоянии (-1), т.е. ионизован;  $\bar{f}_0 = (1 - K)$ ,  $\bar{f}_{-1} = K$  (см. формулу (10)).

По аналогии с теорией молекулярного иона водорода ( $H_2^+$ ) время туннелирования дырки между двумя акцепторами в зарядовых состояниях (0) и (-1) на расстоянии  $r$  друг от друга при случайном совпадении их энергетических уровней ( $u_1 = u_2 = u$ ) оценим так [15,28,29]:

$$\tau(u, r) = \frac{\pi \hbar}{\delta E_\tau(r)}, \quad (15)$$

где  $\delta E_\tau(r)$  — величина энергетического „расщепления“ (уширения) уровня туннелирования  $E_\tau = \bar{E}_a + uk_B T$  дырки между акцепторами, отсчитанного от потолка  $v$ -зоны нелегированного кристалла;  $a_\tau = e^2/(8\pi\epsilon E_\tau)$  — борковский радиус локализации дырки на акцепторе.

В квазиклассическом приближении без учета возбужденных состояний акцепторов для  $\delta E_\tau(r) \ll E_\tau$ , согласно [29,30], имеем

$$\delta E_\tau(r) = 4E_\tau \times \frac{\rho(1+\rho) \exp(-\rho) - [1 - (1+\rho) \exp(-2\rho)]S}{\rho(1-S^2)}, \quad (16)$$

где  $\rho = r/a_\tau$ ;  $S = [1 + \rho + (\rho^2/3)] \exp(-\rho)$ .

Усредним  $\Gamma(u, r)$  по распределению  $g_a = g_a(u, \gamma)$  энергетических уровней туннелирования  $u = (E_\tau - \bar{E}_a)/k_B T$  в акцепторной зоне шириной  $\gamma = W/k_B T$ . С учетом (13)–(15) и (10) средняя частота прыжков  $\Gamma_h(r)$  дырки между двумя находящимися на расстоянии  $r$  акцепторами представляется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_h(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(u, r) g_a(u, \gamma) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{P}(u, \xi) g_a(u, \gamma)}{\tau(u, r)} du, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $g_a(u, \gamma) = (\sqrt{2\pi}\gamma)^{-1} \exp(-u^2/2\gamma^2)$ .

Из (15) и (16) следует, что время туннелирования  $\tau(u, r)$  монотонно возрастает при смещении уровня туннелирования  $E_\tau$  в глубь запрещенной зоны кристалла, т.е. с ростом  $u$ . Если температура достаточно низкая, так что  $W \gg k_B T$ , функция  $\mathcal{P}(u, \xi) g_a(u, \gamma)$  имеет узкий максимум<sup>8</sup> при  $u = -\xi$ . Это позволяет в (17) вынести монотонную функцию  $\tau(u, r)$  из-под знака интеграла при  $u = -\xi$ . Таким образом, средняя равновесная частота прыжков дырки между находящимися на расстоянии  $r$  акцепторами [15]

$$\Gamma_h(r) \approx \frac{1}{\tau_h(r) \xi_h}, \quad (18)$$

где  $\tau_h(r) \equiv \tau_h(u = -\xi, r)$  — время туннелирования дырки между акцепторами в зарядовых состояниях (0) и (-1) с одинаковыми (совпадающими с точностью до  $\delta E_\tau \ll E_\tau$ ) энергетическими уровнями  $E_\tau = \bar{E}_a - \xi k_B T$ ; безразмерный параметр  $\xi_h$  с учетом (10) и (14) определяется соотношением [31]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi_h} &= \frac{1}{K(1-K)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-u^2/2) \exp(\xi + \gamma u)}{[1 + \exp(\xi + \gamma u)]^2} du. \end{aligned} \quad (19)$$

Для случаев узкой по сравнению с энергией тепловых возбуждений ( $\gamma = W/k_B T \ll 1$ ) и широкой ( $\gamma = W/k_B T \gg 1$ ) акцепторной зоны формулы (10) и (19) для  $\xi$  и  $\xi_h$  упрощаются

- 1) при  $\gamma \ll 1$  имеем  $\xi \approx -\ln[K/(1-K)]$ ,  $\xi_h \approx 1$ ;
- 2) при  $\gamma \gg 1$  имеем

$$\begin{aligned} K = 1 - \bar{f}_0 &\approx \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{\gamma \sqrt{2}} \right) \right], \\ \xi_h &\approx \gamma K(1-K) \sqrt{2\pi} \exp \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\xi}{\gamma} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\xi/\gamma$  — отношение энергии, соответствующей положению уровня Ферми, к ширине акцепторной зоны.

#### 4. Действительная часть прыжковой электропроводности на переменном токе

Примем, что в действительную часть электропроводности на переменном токе вносят вклад только пары акцепторов, время туннелирования  $\tau_h(r = R_\omega)$  дырок внутри которых равно половине периода  $\pi/\omega$  внешнего электрического поля,<sup>9</sup> т.е.  $\tau_h(R_\omega) = \pi/\omega$ . Тогда

<sup>8</sup> В случае узкой примесной зоны ( $W \ll k_B T$ ) функция  $g_a(u, \gamma) \mathcal{P}(u, \xi)$  имеет максимум при  $u = 0$ , и энергетический уровень туннелирования дырок  $E_\tau \approx \bar{E}_a$ .

<sup>9</sup> В этом приближении мнимая часть прыжковой электропроводности на переменном токе равна ее действительной части.

$\Gamma_h(R_\omega) = \omega/(2\pi\xi_h)$  и из (9) с учетом (18) для действительной части высокочастотной прыжковой электропроводности  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$  окончательно получаем

$$\text{Re } \sigma_h(\omega) = \frac{\pi e^2 N_h^2 R_\omega^5}{8k_B T \xi_h} \omega, \quad (21)$$

где  $R_\omega = \rho_\omega a_\tau$  — длина прыжка дырки между акцепторами в паре,  $a_\tau = e^2/[8\pi\varepsilon(\bar{E}_a - \xi k_B T)]$  — боровский радиус,  $\rho_\omega$  — решение уравнения

$$\frac{4(\bar{E}_a - \xi k_B T)}{\pi \hbar} \times \frac{\rho_\omega(1 + \rho_\omega) \exp(-\rho_\omega) - [1 - (1 + \rho_\omega) \exp(-2\rho_\omega)] S_\omega}{\rho_\omega(1 - S_\omega^2)} = \frac{\omega}{\pi} \quad (22)$$

при  $S_\omega = [1 + \rho_\omega + (\rho_\omega^2/3)] \exp(-\rho_\omega)$ . Величины  $\xi k_B T = E_F + \bar{E}_a + k_B T \ln \beta_a$  и  $\xi_h \geq 1$  находятся из (10) и (19); значения  $\xi$  и  $\xi_h$  для узкой и широкой акцепторной зоны<sup>10</sup> даются соотношениями (20);  $N_h = K(1 - K)N$ .

Из (22) видно, что  $R_\omega$  зависит от угловой частоты  $\omega$ , энергетического положения центра акцепторной зоны  $\bar{E}_a$ , уровня Ферми  $E_F$  (относительно потолка  $v$ -зоны) и температуры. Величина  $R_\omega$  через  $\bar{E}_a$  и  $E_F$  зависит от концентрации акцепторов  $N$  и степени их компенсации  $K$  донорами. Оценим влияние  $R_\omega$  на зависимость  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$  от частоты  $10^2 \text{ Hz} < \omega/2\pi < 10^7 \text{ Hz}$  при  $K \approx 0.5$  и низких температурах ( $\bar{E}_a \gg |\xi| k_B T$ ) для легированных атомами галлия кристаллов германия ( $N = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\bar{E}_a = 10 \text{ meV}$ ,  $\varepsilon_r = 15.4$ ). В этих условиях из (22) получаем аппроксимацию  $R_\omega = 155 - 11.3 \lg(\omega/2\pi)$ , где  $[R_\omega]$  — nm,  $[\omega/2\pi]$  — Hz. В итоге, согласно (21) имеем  $\text{Re } \sigma_h(\omega) \propto R_\omega^5 \omega \propto \omega^s$ , где  $s \approx 0.76$ , что близко к экспериментальным значениям (рис. 1).

Входящее в уравнение (22) среднее по кристаллу значение энергии  $\bar{E}_a$  термической ионизации нейтрального водородоподобного акцептора (без учета сдвига и флуктуаций энергии потолка  $v$ -зоны), согласно [26], есть

$$\bar{E}_a = I_a - \frac{3e^2}{16\pi\varepsilon(\Lambda_s + d)}, \quad (23)$$

где  $I_a$  — энергия ионизации одиночного акцептора,  $d = 0.554[(1 + K)N]^{-1/3}$  — среднее расстояние между атомами примесей,  $\Lambda_s$  — длина (радиус) электростатического экранирования кулоновского потенциала мигрирующими по акцепторам дырками. Согласно [31], длина экранирования (по Дебаю–Хюккелю)

$$\Lambda_s = \sqrt{\frac{\varepsilon k_B T \xi_h}{e^2 N_h}} \quad (24)$$

обусловлена наличием в акцепторной зоне прыгающих дырок с концентрацией  $N_h = K(1 - K)N$ ; заметим, что

<sup>10</sup> Согласно (20) и (11), величина  $k_B T \xi_h$  для широкой акцепторной зоны ( $W \gg k_B T$ ) определяется только концентрацией акцепторов и степенью их компенсации донорами.

величина  $\xi_h \geq 1$  показывает, во сколько раз отношение коэффициента диффузии к дрейфовой прыжковой подвижности дырок на постоянном токе больше классического значения  $k_B T/e$ .

Отметим, что описываемый формулой (23) сдвиг центра акцепторной зоны  $\bar{E}_a > 0$  к потолку  $v$ -зоны объясняется уменьшением энергии сродства ионизированного акцептора к дырке  $v$ -зоны из-за статического экранирования ионов примесей дырками, прыгающими по акцепторам [26]. Для высоких температур ( $k_B T \gg W$ ) из (24) с учетом (20) получаем длину экранирования [32,33]:  $\Lambda_s = [\varepsilon k_B T/e^2 N_h]^{1/2}$ . Для низких температур ( $k_B T \ll W$ ) таким же путем получаем [31]:  $\Lambda_s = [\varepsilon W \sqrt{2\pi}/(e^2 N)]^{1/2} \exp(\xi^2/4\gamma^2)$ , где  $\xi/\gamma$  определяется из уравнения  $2K = 1 - \text{erf}(\xi/\gamma\sqrt{2})$ .

Итак, находя из уравнения (22) среднее расстояние  $R_\omega$  между участвующими в прыжковой электропроводности на частоте  $\omega/2\pi$  акцепторами, по формуле (21) с учетом (10), (11), (19), (23) и (24) рассчитываем искомое значение  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$ .

Отметим, что из формулы (21) с учетом (22) следует:  $\text{Re } \sigma_h(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow 0$ , т.е.  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$  — это превышение действительной части прыжковой электропроводности на переменном токе над прыжковой электропроводностью на постоянном токе.

## 5. Сравнение расчетов с экспериментальными данными

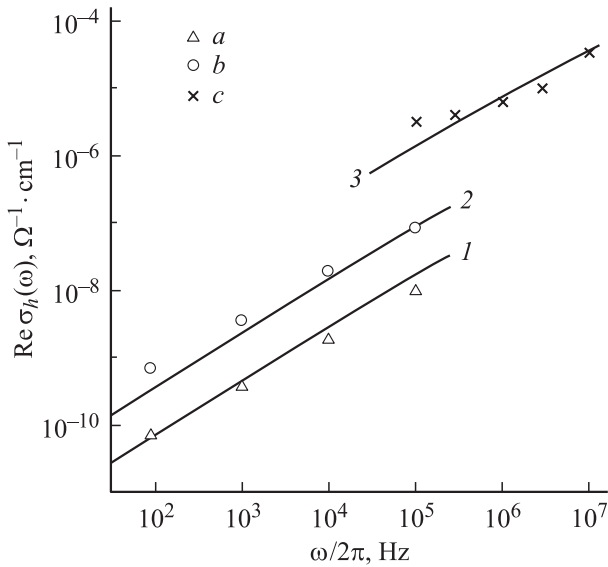
В работах [34,35] приведены экспериментальные данные по прыжковой электропроводности нейтронно-трансмутационно легированных атомами галлия кристаллов  $p$ -Ge ( $K = 0.4$ )<sup>11</sup> при различных температурах и частотах электрического поля, которые мы, пользуясь результатами данной работы, пытаемся количественно описать без каких-либо подгоночных параметров.

Результаты расчета частотных зависимостей прыжковой электропроводности  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$ , обусловленной переменным электрическим полем, по формуле (21) с учетом (22)–(24) в сравнении с экспериментальными данными [34,35] показаны на рис. 1. При расчетах для  $p$ -Ge:Ga использовались следующие значения величин:  $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0 = 15.4$ ,  $I_a = 11.32 \text{ meV}$ ,  $\beta_a = 4$ . Из рис. 1 видно, что результаты расчета по развитой в работе модели высокочастотной прыжковой электропроводности в целом согласуются с экспериментальными данными [34,35] в широком диапазоне частот электрического поля.

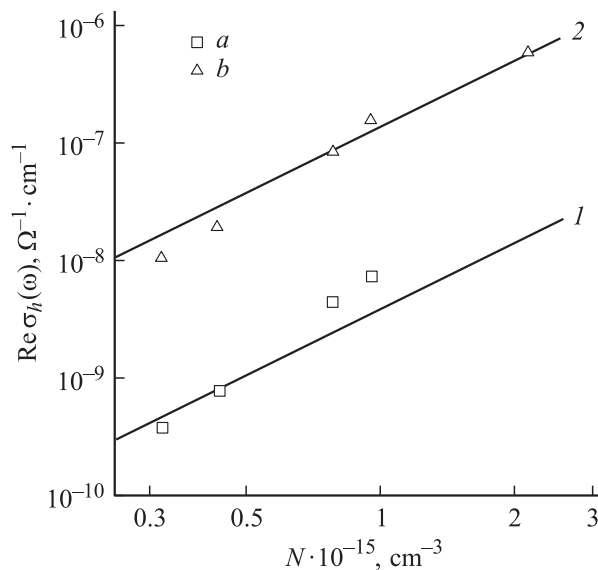
Экспериментальные [34] и расчетные зависимости  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$  от концентрации  $N$  атомов Ga в кристаллах  $p$ -Ge:Ga при  $K = 0.4$  для  $\omega/2\pi = 10^3$  и  $10^5 \text{ Hz}$  показаны на рис. 2, где также видно вполне удовлетворительное согласие.

<sup>11</sup> Впоследствии было показано [36], что степень компенсации германия с природным изотопным составом изменяется в пределах от  $K = 0.3$  до 0.6 в зависимости от „жесткости“ спектра энергии реакторных нейтронов. В частности, работе [35] соответствует значение  $K = 0.35$ .

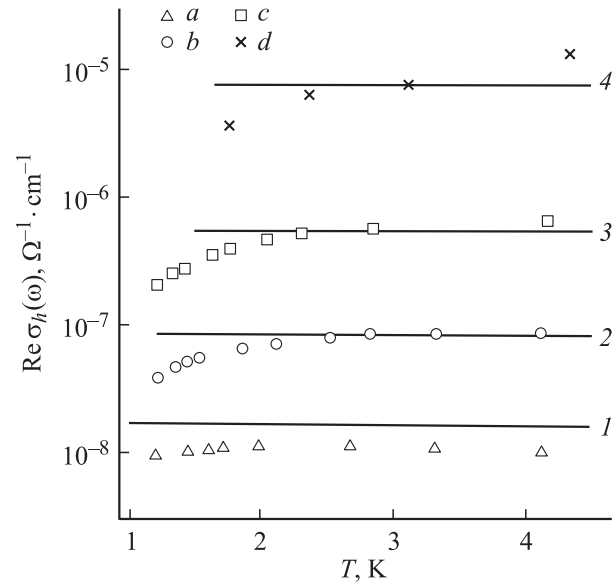
На рис. 3 представлены температурные зависимости прыжковой электропроводности  $p$ -Ge:Ga на переменном токе с частотами  $\omega/2\pi = 10^5$  и  $10^6$  Hz согласно экспериментальным данным [34,35]. Расчет высокочастотной прыжковой электропроводности (рис. 1–3) проводился для интервала температур между низкотемпературной ( $T_l$ ) и высокотемпературной ( $T_h$ ) границами области NНH-режима



**Рис. 1.** Частотные зависимости прыжковой электропроводности. Точки  $a$ – $c$  — экспериментальные данные для  $p$ -Ge:Ga при  $K = 0.4$ :  $a$  —  $T = 4$  K,  $N = 3.2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  [34],  $b$  —  $T = 4$  K,  $N = 7.8 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  [34],  $c$  —  $T = 2.3$  K,  $N = 3.4 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  [35]. Кривые 1–3 — расчет по (21) для данных  $a$ – $c$  соответственно.



**Рис. 2.** Зависимости действительной части прыжковой электропроводности кристаллов германия от концентрации атомов галлия при  $K = 0.4$  для  $T = 3.3$  K. Точки — экспериментальные данные из [34]:  $a$  —  $\omega/2\pi = 10^3$  Hz,  $b$  —  $\omega/2\pi = 10^5$  Hz. Кривые 1, 2 — расчет по (21) для данных  $a, b$  соответственно.



**Рис. 3.** Температурные зависимости высокочастотной прыжковой электропроводности в нейтронно-легированных кристаллах германия. Точки  $a$ – $c$  — экспериментальные данные для  $p$ -Ge:Ga ( $K = 0.4$ ,  $\omega/2\pi = 10^5$  Hz) [34]:  $a$  —  $N = 3.2 \cdot 10^{14}$ ,  $b$  —  $7.8 \cdot 10^{14}$  и  $c$  —  $2.14 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ;  $d$  —  $K = 0.4$ ,  $\omega/2\pi = 10^6$  Hz,  $N = 3.4 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  [35]. Кривые 1–4 — расчет по (21) для данных  $a$ – $d$  соответственно.

проводимости на постоянном токе.<sup>12</sup> Экспериментальные данные [37,38] для  $T_l$  и  $T_h$  в  $p$ -Ge:Ga при  $2 \cdot 10^{14} < N < 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  и  $K = 0.3$  можно аппроксимировать выражениями  $T_l \approx 2.67 \cdot 10^{-4} N^{0.244}$ ,  $T_h \approx 7.6 \cdot 10^{-4} N^{0.258}$ , где  $[T_l], [T_h] = \text{K}$ ,  $[N] = \text{cm}^{-3}$ . Видно, что согласно расчетам по предлагаемой модели  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$  практически не зависит от температуры как при  $T \approx T_l$ , так и при  $T \approx T_h$ . В то же время эксперимент показывает тенденцию к уменьшению высокочастотной прыжковой электропроводности при  $T < T_l$ .

Для широкой акцепторной зоны ( $W \gg k_B T$ ) уменьшение  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$  при  $T < T_l$  даже для промежуточных степеней компенсации ( $K \approx 0.5$ ), возможно, обусловлено корреляцией между пространственным распределением акцепторов и их энергией (VRH-режим проводимости). Эта корреляция ведет к тому, что усреднения по расстоянию между акцепторами и по распределению их энергетических уровней нельзя рассматривать порознь (см. формулы (9) и (17)).

Для узкой акцепторной зоны ( $W \ll k_B T$ ) формула (21) предсказывает, что высокочастотная прыжковая электропроводность компенсированного полупроводника должна уменьшаться с ростом температуры, так как при этом влияние переменного электрического поля постоянной амплитуды на частоту прыжков дырок ослабевает (см. вывод формулы (5)). Этот эффект, хоть

<sup>12</sup> С понижением температуры (при  $T < T_l$ ) NНH-режим трансформируется в режим прыжков дырок с переменной длиной (variable range hopping, VRH). При  $T = T_h$  прыжковая электропроводность в NНH-режиме равна зонной электропроводности дырок  $v$ -зоны.

и слабо выраженный, можно заметить на наименее легированном образце при относительно высоких температурах. Заметим, что при температурах  $T \approx T_h$  (т.е. в области насыщения прыжковой электропроводности на постоянном токе [37,38]) при расчете  $\text{Re } \sigma_h$ , по видимому, необходимо учитывать возбужденные состояния акцепторов [39]. Возможно также, что даже для полупроводников с промежуточной степенью компенсации при приближении по уровню легирования к переходу изолятор–металл следует учитывать в высокочастотной проводимости вклад  $A^+$ -зоны акцепторов [40,41], сформированной акцепторами в зарядовых состояниях (+1).

## 6. Выводы

Для описания высокочастотной прыжковой проводимости легированных кристаллических ковалентных полупроводников с умеренной степенью компенсации предложена модель прыжков дырок (электронов) внутри пар водородоподобных акцепторов (доноров) при хаотическом распределении их зарядовых состояний. Плотность распределения энергетических уровней акцепторов в запрещенной зоне считается гауссовой. Предполагалось, что ширина акцепторной зоны определяется чисто кулоновским взаимодействием ближайших ионизованных акцепторов и доноров, случайно (пуассоновски) распределенных по кристаллу. Идея предлагаемой модели состоит в том, что основной вклад в прыжковую электропроводность  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$  на переменном токе вносят только пары акцепторов в зарядовых состояниях (0) и (-1) с совпадающими уровнями энергии. В рамках равновесной термодинамики определена вероятность совпадения энергетических уровней двух акцепторов под действием тепловых и/или кулоновских флуктуаций прыжковой природы. Важный для расчета результат состоит в том, что оптимальные пары акцепторов оказываются расположенными на таком расстоянии, чтобы время туннелирования дырки между ними было равно половине периода колебаний внешнего электрического поля. Время туннелирования дырки между акцепторами вычисляется в рамках модели ионизованной молекулы водорода ( $H_2^+$ ), т.е. считается, что прыжок дырки происходит только при совпадении уровней двух водородоподобных акцепторов. Получены аналитические выражения, описывающие связь частоты прыжков дырки в парах с концентрацией акцепторов и степенью их компенсации  $K$  донорами. Расчеты  $\text{Re } \sigma_h(\omega)$  согласуются с экспериментальными данными для трансмутационно легированных кристаллов  $p\text{-Ge}:\text{Ga}$ .

## Список литературы

- [1] Н. Мотт, Э. Девис. Электронные процессы в некристаллических веществах. Мир, М. (1982). 664 с.
- [2] J.C. Dyre, T.B. Schröder. Rev. Mod. Phys. **72**, 3, 873 (2000).
- [3] И.П. Звягин. Кинетические явления в неупорядоченных полупроводниках. МГУ, М. (1984). 192 с.

- [4] J.C. Dyre, T.B. Schröder. Phys. Stat. Sol. (b) **230**, 1, 5 (2002).
- [5] M. Pollak. Phys. Stat. Sol. (b) **230**, 1, 295 (2002).
- [6] С.Д. Барановский, А.А. Узаков. ФТП **15**, 5, 931 (1981).
- [7] B.V. Klimkovich, N.A. Poklonski, V.F. Stelmakh. Phys. Stat. Sol. (b) **134**, 2, 763 (1986).
- [8] Б.В. Климович, Н.А. Поклонский, В.Ф. Стельмах. ФТП **19**, 5, 848 (1985).
- [9] T. Holstein. Ann. Phys. **281**, 1–2, 706 (2000).
- [10] R.R. Heikes. In Thermoelectricity: science and engineering. Interscience Publishers, N. Y. (1961). Ch. 4.
- [11] Поляроны / Под ред. Ю.А. Фирсова. Наука, М. (1975). 424 с.
- [12] П. Нагельс. В сб.: Аморфные полупроводники / Под ред. М. Бродски. Мир, М. (1982). С. 177.
- [13] А.Л. Бурин, Л.А. Максимов. ЖЭТФ **95**, 4, 1345 (1989).
- [14] В.И. Гольданский, Л.И. Трахтенберг, В.Н. Флеров. Туннельные явления в химической физике. Наука, М. (1986). 296 с.
- [15] Н.А. Поклонский, С.Ю. Лопатин, А.Г. Забродский. ФТТ **42**, 3, 432 (2000).
- [16] Н.А. Поклонский, С.Ю. Лопатин. ФТТ **43**, 12, 2126 (2001).
- [17] H. Fritzsche, M. Cuevas. Proc. Int. Conf. on Semicond. Phys. Pub. Czech. Acad. Sci., Prague (1961). P. 222.
- [18] B. Sandow, O. Bleibaum, W. Schirmacher. Phys. Stat. Sol. (c) **1**, 1, 92 (2004).
- [19] A. Miller, E. Abrahams. Phys. Rev. **120**, 3, 745 (1960).
- [20] S. Titeica. Ann. Phys. (Leipzig) **22**, 2, 129 (1935).
- [21] П.С. Зырянов, М.И. Клиnger. Квантовая теория явлений электронного переноса в кристаллических полупроводниках. Наука, М. (1976). 480 с.
- [22] П. Уиттл. Вероятность. Наука, М. (1982). 288 с.
- [23] D.K. Pickard. J. Appl. Probability **19**, 2, 444 (1982).
- [24] К. Хир. Статистическая механика, кинетическая теория и стохастические процессы. Мир, М. (1976). 600 с.
- [25] М. Кендалл, П. Моран. Геометрические вероятности. Наука, М. (1972). 192 с.
- [26] Н.А. Поклонский, А.И. Сягло, Г. Бискупски. ФТП **33**, 4, 415 (1999).
- [27] Д.Р. Кокс, У.Л. Смит. Теория очередей. Мир, М. (1966). 218 с.
- [28] Е.О. Кейн. В сб.: Туннельные явления в твердых телах / Под ред. Э. Бурштейна, С. Лундквиста. Мир, М. (1973). С. 9.
- [29] Л.А. Блюменфельд, А.К. Кукушкин. Курс квантовой химии и строения молекул. Изд-во МГУ, М. (1986). 136 с.
- [30] А.С. Давыдов. Квантовая механика. Наука, М. (1973). 626 с.
- [31] N.A. Poklonski, V.F. Stelmakh. Phys. Stat. Sol. (b) **117**, 1, 93 (1983).
- [32] N.A. Poklonski, V.F. Stelmakh, V.D. Tkachev, S.V. Voitkov. Phys. Stat. Sol. (b) **88**, 2, K165 (1978).
- [33] А.А. Узаков, А.Л. Эфрос. ЖЭТФ **81**, 5(11), 1940 (1981).
- [34] S. Golin. Phys. Rev. **132**, 1, 178 (1963).
- [35] И.В. Кляцкина, И.С. Шлимак. ФТП **12**, 1, 134 (1978).
- [36] А.Г. Забродский, М.В. Алексеенко. ФТП **28**, 1, 168 (1994).
- [37] А.Г. Забродский, А.Г. Андреев, М.В. Алексеенко. ФТП **26**, 3, 431 (1992).
- [38] A.G. Zabrodskii, A.G. Andreev. Int. J. Mod. Phys. B **8**, 7, 883 (1994).
- [39] Н.А. Поклонский, С.А. Вырко, А.Г. Забродский, С.В. Егоров. ФТТ **45**, 11, 1954 (2003).
- [40] Н.А. Поклонский, А.И. Сягло. ФТП **33**, 4, 402 (1999).
- [41] В.Д. Каган. ЖЭТФ **117**, 2, 452 (2000).