Физика твердого тела, 2005, том 47, вып. 7

Влияние характера отражения электронов на электромагнитные свойства неоднородной цилиндрической частицы

Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов

Московский государственный университет леса,
141005 Мытищи, Московская обл., Россия

E-mail: yushkanov@mtu-net.ru

(Поступила в Редакцию 17 марта 2004 г.
В окончательной редакции 2 августа 2004 г.)

Рассчитано сечение магнитного поглощения мелкой вытянутой цилиндрической частицы с диэлектрическим ядром и металлической оболочкой. Рассмотрен общий случай, когда отношение радиуса диэлектрического ядра к радиусу частицы может принимать произвольные значения. В качестве граничных условий задачи принято условие зеркально-диффузного отражения электронов проводимости от поверхностей металлического слоя частицы. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

Электромагнитные свойства малых металлических частиц обладают рядом особенностей [1]. Эти особенности связаны с тем, что длина свободного пробега электронов в таких частицах оказывается одного порядка с их линейными размерами. При этом существенную роль начинают играть нелокальные эффекты. При комнатной температуре в металлах с хорошей проводимостью (алюминий, медь, серебро и др.) длина свободного пробега электронов Λ лежит в характерных пределах $10-100$ nm. Размеры же экспериментально исследуемых частиц достигают нескольких nm, т. е. данная ситуация реализуется. Классическая теория взаимодействия электромагнитного излучения с металлическими частицами (теория Ми) [2], основанная на локальных уравнениях макроскопической электродинамики, в этом случае неприменима.

В работах [3,4] была простроена теория взаимодействия электромагнитного излучения со сферической частицей. Немного ранее в предельном случае низких частот (дальний ИК-диапазон) аналогичный [3] результат получен в [5,6]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов проводимости в металле. Альтернативный подход к проблеме предложен в работах [7,8].

В [9–11] высказывалось предположение о возможном существенном влиянии зеркального отражения электронов от поверхности на электромагнитные свойства малых металлических частиц.

В последнее время возрос интерес к проблеме взаимодействия электромагнитного излучения с несферическими частицами [12]. Отметим также работы, в которых предпринята попытка учета квантово-механических эффектов в данной проблеме, что особенно существенно при низких температурах [13,14].

В работах [15–18] изучен вопрос о магнитном дипольном поглощении ИК-излучения цилиндрическими частицами. При этом для описания электромагнитного отклика частицы применялась стандартная кинетическая теория вырожденного Ферми-газа электронов проводимости в металлах [19]. В [15,16,18] рассмотрение было ограничено случаем чисто диффузного отражения электронов проводимости от внутренней поверхности частицы, а в [17] было проведено подробное исследование магнитного дипольного поглощения цилиндрической частицы при условии, что отражение электронов от поверхности частицы носит смешанный (зеркально-диффузный) характер [19]. Причем во всех перечисленных выше работах рассматривались только однородные частицы, т. е. не поднимался вопрос о внутренней структуре поглощающих частиц.

Однако в последнее время в литературе появились сообщения об экспериментальных исследованиях частиц сложной структуры [20,21]. Такие частицы состоят из диэлектрического (или металлического) ядра, окруженного металлической оболочкой, что, естественно, сказывается на оптических свойствах этих частиц. Важность рассмотрения частиц со сложной внутренней структурой, в частности, отмечается в [22].

В настоящей работе, которая является логическим продолжением [17], построена теория взаимодействия электромагнитного излучения с неоднородной цилиндрической частицей (частица из металла с диэлектрическим ядром) с учетом смешанного (зеркально-диффузного) характера отражения электронов внутри цилиндрического металлического слоя.

1. Постановка задачи

Рассматривается металлический цилиндр длиной L с диэлектрическим ядром, помещенный в поле плоской электромагнитной волны. Обозначим радиус цилиндрического ядра как R_1, а радиус цилиндрической оболочки — как R_2. Причем мы считаем, что $L \gg R_2$. Частота волны ограничена сверху частотами ближнего ИК-диапазона ($\omega < 2 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$). В рассматриваемом диапазоне частот вклад токов дипольной электрической поляризации будет мал по сравнению с вкладом вихревых токов, которые индуцируются внешним магнитным полем волны в металлической оболочке частицы [3].

Поэтому действие внешнего электрического поля волны не учитывается. В дипольном приближении при пренебрежении скин-эффектом (считается, что $R_2 < \delta$; δ — глубина скин-слоя) вихревое электрическое поле, вызывающее появление вихревых токов, имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2c}\left[\mathbf{r},\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right] = \frac{\omega}{2ic}\,[\mathbf{r}, \mathbf{H}_0]\,\exp(-i\omega t), \qquad (1)$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t)$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор (начало координат выбирается на оси частицы), $\mathbf{H}_0$ — амплитуда магнитного поля волны, ω — угловая частота волны, c — скорость света.

Средняя диссипируемая мощность $\bar{Q}$ в частице находится по формуле [23]

$$\bar{Q} = \int \overline{(\mathrm{Re}\,\mathbf{E})(\mathrm{Re}\,\mathbf{j})}\,d^3r = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int \mathbf{j}\mathbf{E}^* d^3r, \qquad (2)$$

где чертой обозначено усреднение по времени, а звездочкой — компелексное сопряжение; $\mathbf{j}$ — плотность вихревого тока.

Связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ в случае, когда радиус частицы R_2 сравним с длиной свбодного пробега электронов в металле Λ (или меньше ее), оказывается существенно нелокальной. Для описания этой связи применим кинетическое уравнение (в приближении времени релаксации) к вырожденному Ферми-газу электронов проводимости, находящемуся в цилиндрической металлической оболочке частицы.

Для достаточно слабых внешних полей это уравнение можно линеаризовать по внешнему полю $\mathbf{E}$ и по малым отклонениям $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ от равновесной фермиевской функции распределения f_0

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v}\,\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}, \qquad (3)$$

где e и $\mathbf{v}$ — соответственно заряд и скорость электронов проводимости, τ — электронное время релаксации.

Далее рассматривается квадратичная зависимость энергии электронов ε от скорости $\varepsilon = mv^2/2$ (m — эффективная масса электрона) и используется ступенчатая аппроксимация для равновесной функции распределения электронов по энергиям $f_0(\varepsilon)$ [24]

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_f - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_f, \\ 0, & \varepsilon_f < \varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon_f = mv_f^2/2$ — энергия Ферми (v_f — скорость Ферми). Предполагается, что поверхность Ферми имеет сферическую форму и что все электроны на поверхности Ферми внутри цилиндрического металлического слоя частицы двигаются со скоростями, равными v_f.

Функция распределения электронов имеет вид

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}.$$

Отклонение $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ функции распределения электронов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ от равновесного значения $f_0(\varepsilon)$, возникающее под действием вихревого электрического поля, приводит к появлению внутри частицы вихревого тока

$$\mathbf{j} = en_0\langle \mathbf{v}\rangle = en_0\left[\int f_0\,d^3v\right]^{-1}\int f_1 \mathbf{v}\,d^3v. \qquad (4)$$

Концентрация электронов n_0 в металлическом слое частицы определяется по стандартной формуле, согласно которой

$$n_0 = 2\,\frac{m^3}{h^3}\int f_0\,d^3v = 2\,\frac{m^3}{h^3}\,\frac{4\pi v_f^3}{3}, \qquad (5)$$

где h — постоянная Планка.

Взяв в уравнении (3) поле $\mathbf{E}$ в виде (1), найдем $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ как решение этого уравнения. Затем, используя выражения (4) и (2), определим ток в металлической оболочке и сечение поглощения энергии внешнего электромагнитного поля частицы

$$\sigma = \frac{8\pi\bar{Q}}{cH_0^2}. \qquad (6)$$

Однозначное решение поставленной задачи возможно при выборе граничных условий для неизвестной функции $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ на цилиндрических поверхностях металлической оболочки и диэлектрического ядра частицы. В качестве таковых принимаем условия зеркально-диффузного отражения электронов от этих поверхностей [17]. Поскольку электроны могут отражаться от внутренней границы (R_1) и от внешней границы (R_2) металлического слоя, необходимо записать два граничных условия:

$$f_{11}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_z) = q_1 f_{11}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}'_\perp, \mathbf{v}_z) \ \text{ при } \begin{cases} |\mathbf{r}_\perp| = R_1, \\ \mathbf{r}_\perp\mathbf{v}_\perp > 0, \end{cases} \qquad (7)$$

$$f_{12}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_z) = q_2 f_{12}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}'_\perp, \mathbf{v}_z) \ \text{ при } \begin{cases} |\mathbf{r}_\perp| = R_2, \\ \mathbf{r}_\perp\mathbf{v}_\perp < 0, \end{cases} \qquad (8)$$

где $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{v}_\perp$ — соответственно компоненты радиус-вектора электрона $\mathbf{r}$ и его скорости $\mathbf{v}$ в плоскости, перпендикулярной оси неоднородного цилиндра,

$$\mathbf{v}'_\perp = \mathbf{v}_\perp - \frac{2\mathbf{r}_\perp(\mathbf{r}_\perp\cdot\mathbf{v})}{R^2}$$

— вектор скорости, который при зеркальном отражении от внутренней или от внешней поверхности металлического слоя в точке $\mathbf{r}_\perp$ ($|\mathbf{r}_\perp| = R_1$ или $|\mathbf{r}_\perp| = R_2$) переходит в вектор $\mathbf{v}_\perp$; $\mathbf{v}_z$ — составляющая скорости электрона вдоль оси частицы; q_1 и q_2 — коэффициенты зеркальности (вероятности зеркального отражения),

$$0 \le q_1 \le 1, \quad 0 \le q_2 \le 1.$$

Случай $\mathbf{r}_\perp\mathbf{v}_\perp > 0$ ($\mathbf{r}_\perp\mathbf{v}_\perp < 0$) соответствует движению электронов в направлении от ядра (к ядру).

При $q_1 = 0$ $(q_2 = 0)$ получаем условия диффузного отражения электронов проводимости от внутренней или от внешней поверхности металлического слоя частицы, а при $q_1 = 1$ $(q_2 = 1)$ — условия чисто зеркального отражения. При значениях $q \neq 0$ и $q \neq 1$ получаем различные варианты смешанного (зеркально-диффузного) отражения электронов.

2. Функция распределения

Кинетическое уравнение (3) решается методом характеристик [25]. Изменение f_1 вдоль траектории (характеристики)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$$

определяется уравнением

$$df_1 = -\left(\nu f_1 + e(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right)dt, \tag{9}$$

где

$$\nu = \frac{1}{\tau} - i\omega$$

— комплексная частота рассеяния.

Граничные условия (7) и (8) позволяют проследить за изменением функции $f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_z)$ вдоль зеркально отраженной траектории. В точке отражения $t = t_n$ (от любой поверхности) функция $f_1(t)$ испытывает скачок

$$f_1(t_n + 0) = q f_1(t_n - 0). \tag{10}$$

Знак $+(-)$ обозначает предел функции $f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_z)$ в точке отражения t_n справа (или слева) по времени пролета.

При зеркальном отражении сохраняется угловой момент $[\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp] = [\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}'_\perp]$, поэтому на рассматриваемой траектории

$$[\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp] = \text{const}.$$

Разность $t_n - t_{n-1}$ не зависит от номера n точки отражения,

$$t_n = nT + \text{const}, \quad n \in Z,$$

где T — время пролета электрона со скоростью $\mathbf{v}_\perp$ от точки $\mathbf{r}_{n-1\perp}$ до точки $\mathbf{r}_{n\perp}$,

$$T = -\frac{2(\mathbf{v}_{n\perp}\cdot\mathbf{r}_{n\perp})}{\mathbf{v}_\perp^2}.$$

Величина $\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$ также постоянна на траектории

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} = \frac{\omega}{2ic}\,[\mathbf{r}, \mathbf{H}]\,\mathbf{v} = \frac{i\omega}{2c}\,[\mathbf{r}, \mathbf{v}]\,\mathbf{H} = \text{const}.$$

Решением уравнения (9) является функция

$$f_1 = C\exp(-\nu t) + A, \tag{11}$$

где $A = -\frac{e(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})}{\nu}\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$.

Параметр t в выражении (11) имеет смысл времени движения электрона вдоль траектории от границы, на которой происходит отражение, до точки $\mathbf{r}_\perp$ со скоростью $\mathbf{v}_\perp$.

Решим это уравнение на интервале (t_{n-1}, t_n) для случая движения электрона по траектории, которая при его зеркальном отражении не пересекается с цилиндрическим диэлектрическим ядром частицы.

В момент начала отсчета времени $(t = 0)$

$$f_1(t_{n-1} + 0) = C + A.$$

Отсюда найдем значение постоянной C

$$C = f_1(t_{n-1} + 0) - A.$$

Теперь получим связь между начальными значениями функции f_1 на двух соседних звеньях траектории. Поскольку $t_n - 0 = t_{n-1} + T$, имеем

$$\begin{aligned} f_1(t_n - 0) &= \big(f_1(t_{n-1} + 0) - A\big)\exp(-\nu T) + A \\ &= A\big(1 - \exp(-\nu T)\big) + f_1(t_{n-1} + 0)\exp(-\nu T). \end{aligned}$$

Применяя условие (10), получаем

$$\begin{aligned} f_1(t_n + 0) = q_2\big\{&A\big(1 - \exp(-\nu T)\big) \\ &+ f_1(t_{n-1} + 0)\exp(-\nu T)\big\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Выражая затем с помощью этого рекуррентного соотношения $f_1(t_{n-1} + 0)$ через $f_1(t_{n-2} + 0)$ и т.д., приходим к выражению для $f_1(t_n + 0)$ через сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q_2\exp(-\nu T)$. Производя суммирование, получаем

$$f_1(t_n + 0) = \frac{q_2 A\big(1 - \exp(-\nu T)\big)}{\big(1 - q_2\exp(-\nu T)\big)}. \tag{13}$$

Чтобы найти конкретный вид решения уравнения (9), воспользуемся начальным условием (13). При $t = 0$ находим

$$\frac{q_2 A\big(1 - \exp(-\nu T)\big)}{\big(1 - q_2\exp(-\nu T)\big)} = C + A.$$

Отсюда получаем

$$C = A\left\{\frac{q_2\big(1 - \exp(-\nu T)\big)}{1 - q_2\exp(-\nu T)} - 1\right\} = A\left\{\frac{q_2 - 1}{1 - q_2\exp(-\nu T)}\right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f_{10}(t_2) &= A\left\{\frac{q_2 - 1}{1 - q_2\exp(-\nu T)}\right\}\exp(-\nu t_2) + A \\ &= A\left\{\frac{(q_2 - 1)\exp(-\nu t_2)}{1 - q_2\exp(-\nu T_2)} + 1\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Параметры t_2 и T_2 можно связать с координатами точки $(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp)$ в фазовом пространстве (при $n = 0$, $\mathbf{v}_{0\perp} = \mathbf{v}_\perp$) условиями

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_{0\perp} + \mathbf{v}_\perp t_2, \quad \mathbf{v}_\perp \mathbf{r}_{0\perp} < 0, \quad r_{0\perp}^2 = R_2^2,$$

$$T_2 = -\frac{2(\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{r}_{0\perp})}{v_\perp^2},$$

где $\mathbf{r}_{0\perp}$ — компонента радиус-вектора электрона в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, в момент отражения от цилиндрической границы частицы.

Исключая отсюда $\mathbf{r}_{0\perp}$, получаем

$$t_2 = \left\{\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp + \left[(\mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp)^2 + (R_2^2 - r_\perp^2)v_\perp^2\right]^{1/2}\right\}/v_\perp^2, \quad (15)$$

$$T_2 = 2\left[(\mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp)^2 + (R_2^2 - r_\perp^2)v_\perp^2\right]^{1/2}/v_\perp^2. \quad (16)$$

Соотношения (14)–(16) полностью определяют функцию $f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_z)$ в случае движения электронов по траектории, не пересекающейся с ядром частицы.

Теперь перейдем к случаю двойного зеркального отражения электрона (от цилиндрического ядра и от внешней цилиндрической границы металла). Решение кинетического уравнения (9) на интервале (t_{n-1}, t_n) проведем, допустив, что в некоторый момент времени электрон отражается от границы металлического слоя (до этого он отражался от ядра). В результате получаем отклонение $f_{12}(t)$ функции распределения электронов от равновесного значения

$$f_{12}(t_2) = A\left\{\frac{q_1\big(1 - \exp(-\nu T_1) + q_2\exp(-\nu T_1)\big) - 1}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\nu T_1)} \times \exp(-\nu t_2) + 1\right\}. \quad (17)$$

Аналогичным образом находится отклонение $f_{11}(t)$ функции распределения электронов, отражающихся от цилиндрического ядра частицы. Приведем сразу окончательный результат

$$f_{11}(t_1) = A\left\{\frac{q_2\big(1 - \exp(-\nu T_1) + q_1\exp(-\nu T_1)\big) - 1}{1 - q_1 q_2 \exp(-2\nu T_1)} \times \exp(-\nu t_1) + 1\right\}. \quad (18)$$

Параметр t_1 в выражении (18) определяется следующей формулой:

$$t_1 = \left\{\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp - \left[(\mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp)^2 + (R_1^2 - r_\perp^2)v_\perp^2\right]^{1/2}\right\}/v_\perp^2. \quad (19)$$

Действительно, из очевидного векторного равенства $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_{0\perp} + \mathbf{v}_\perp t_1$, где $\mathbf{r}_{0\perp}$ — радиус-вектор электрона в момент отражения от ядра частицы ($r_{0\perp}^2 = R_1^2$), легко получить (19), если возвести обе части этого равенства в квадрат и разрешить полученное уравнение относительно t_1.

Параметр T_1 (период движения электрона при двойном отражении, т.е. время, через которое электрон снова отражается от ядра или от внешней границы металла) можно отыскать, если воспользоваться еще одним векторным равенством: $\mathbf{r}_\perp^* = \mathbf{r}_{0\perp} + \mathbf{v}_\perp T_1$, где $\mathbf{r}_{0\perp} = \mathbf{r}_\perp - \mathbf{v}_\perp t_1$, $|\mathbf{r}_{0\perp}| = R_1$, $|\mathbf{r}_\perp^*| = R_2$ (мы считаем, что электрон двигается от ядра к границе частицы). Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем квадратное уравнение

$$v_\perp^2 T_1^2 + 2(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{v}_\perp t_1)\mathbf{v}_\perp T_1 + (R_1^2 - R_2^2) = 0, \quad (20)$$

решение которого (оно приведено далее) позволяет определить величину T_1.

Соотношения (15), (17)–(20) полностью определяют функцию $f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_z)$ в случае движения электронов по траектории, когда они испытывают двойное отражение от цилиндрического ядра и от внешней цилиндрической границы частицы.

3. Сечение поглощения

Найденные функции распределения позволяют рассчитать ток (4), среднюю диссипируемую мощность (2), а также сечение поглощения (6) энергии внешнего электромагнитного поля.

При вычислении интегралов (4), (2) удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат ($r_\perp, \varphi, r_z$; полярная ось — ось Z; вектор $\mathbf{H}_0$ параллелен оси Z), так и в пространстве скоростей ($v_\perp, \alpha, v_z$; полярная ось — ось v_z). Ось цилиндра совпадает с осью Z.

Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь φ-компоненту

$$\mathbf{E} = E_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad E_\varphi = \frac{i\omega}{2c} r_\perp H_0 \exp(-i\omega t). \quad (21)$$

Соответственно и ток (4) обладает лишь φ-компонентой (линии тока являются замкнутыми окружностями с центрами на оси Z в плоскостях, перпендикулярных оси Z).

При интегрировании выражения (4) следует иметь в виду, что место отражения электронов внутри частицы определяется углом α в пространстве скоростей.

1) Если выполняется неравенство $\alpha_0 \le \alpha \le \pi - \alpha_0$, где угол α_0 определяется выражением

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{\sqrt{r_\perp^2 - R_1^2}}{r_\perp}\right), \quad (22)$$

то траектория электрона не пересекается с ядром и он претерпевает отражение от внешней границы металлического слоя частицы. Рассеяние электронов на цилиндрической поверхности в этом случае описывается функцией $f_{10}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp)$ ($t = t_2$, $T = T_2$) (см. (14)).

2) Если $\pi - \alpha_0 < \alpha \le \pi$, электроны двигаются в направлении к ядру частицы и под функцией $f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp)$ понимается $f_{12}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp)$ ($t = t_2$, $T = T_1$) (см. (17)).

3) Наконец, если $0 < \alpha \le \alpha_0$, электроны двигаются от ядра частицы и под функцией $f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp)$ понимается $f_{11}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp)$ $(t = t_1,\ T = T_1)$ (см. (18)).

Движение электронов симметрично относительно любой диаметральной плоскости, в которой лежит точка их положения на траектории, поэтому можно считать, что угол α в пространстве скоростей изменяется от 0 до π, и удваивать результат интегрирования по этой переменной.

В силу симметрии задачи интегрирование по всему диапазону скоростей v_z заменяется интегрированием по положительному диапазону, и результат удваивается. Поэтому, учитывая, что $v_\varphi = v_\perp \sin\alpha$, и подставляя пределы интегрирования, приходим к выражению для компоненты вихревого тока

$$j_\varphi = \frac{3n_0E_\varphi e^2}{\pi v_f^3 m\nu} \int\limits_0^{v_f} \int\limits_{\alpha_0}^{\pi-\alpha_0} \frac{v_\perp^3}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} \left\{ \frac{(q_2-1)\exp(-\nu t_2)}{1 - q_2\exp(-\nu T_2)} + 1 \right\}$$

$$\times \sin^2\alpha\, dv_\perp\, d\alpha + \frac{3n_0E_\varphi e^2}{\pi v_f^3 m\nu} \int\limits_0^{v_f} \int\limits_{\pi-\alpha_0}^{\pi} \frac{v_\perp^3}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}}$$

$$\times \left\{ \frac{q_1\big(1 - \exp(-\nu T_1) + q_2\exp(-\nu T_1)\big) - 1}{1 - q_1q_2\exp(-2\nu T_1)} \exp(-\nu t_2) + 1 \right\}$$

$$\times \sin^2\alpha\, dv_\perp\, d\alpha + \frac{3n_0E_\varphi e^2}{\pi v_f^3 m\nu} \int\limits_0^{v_f} \int\limits_0^{\alpha_0} \frac{v_\perp^3}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}}$$

$$\times \left\{ \frac{q_2\big(1 - \exp(-\nu T_1) + q_1\exp(-\nu T_1)\big) - 1}{1 - q_1q_2\exp(-2\nu T_1)} \exp(-\nu t_1) + 1 \right\}$$

$$\times \sin^2\alpha\, dv_\perp\, d\alpha. \tag{23}$$

Здесь мы учли, что концентрация электронов проводимости в меатллах определяется по формуле (5).

Сечение поглощения электромагнитного излучения неоднородной частицы описывается выражением

$$\sigma = \frac{1}{2}\, \frac{8\pi}{cH_0^2}\, \mathrm{Re}\left\{ \int j_\varphi E_\varphi^* d^3r \right\},$$

которое при учете (21) и (23) после несложных преобразований сводится к виду

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \tag{24}$$

где

$$\sigma_1 = \mathrm{Re}\left\{ \frac{3n_0e^2\pi\omega^2L}{v_f^3mc^3}\, 2\int\limits_{R_1}^{R_2} r_\perp^3 dr_\perp \int\limits_0^{v_f} \int\limits_{\alpha_0}^{\pi-\alpha_0} \frac{v_\perp^3}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{(q_2-1)\exp(-\nu t_2)}{\nu\big(1 - q_2\exp(-\nu T_2)\big)} + \frac{1}{\nu} \right] \sin^2\alpha\, dv_\perp\, d\alpha \right\}, \tag{25}$$

$$\sigma_2 = \mathrm{Re}\left\{ \frac{3n_0e^2\pi\omega^2L}{v_f^3mc^3}\, 2\int\limits_{R_1}^{R_2} r_\perp^3 dr_\perp \int\limits_0^{v_f} \int\limits_{\pi-\alpha_0}^{\pi} \frac{v_\perp^3}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} \right.$$

$$\times \left[\frac{q_1\big(1 - \exp(-\nu T_1) + q_2\exp(-\nu T_1)\big) - 1}{\nu\big(1 - q_1q_2\exp(-2\nu T_1)\big)} \exp(-\nu t_2) + \frac{1}{\nu} \right]$$

$$\left. \times \sin^2\alpha\, dv_\perp\, d\alpha \right\}, \tag{26}$$

$$\sigma_3 = \mathrm{Re}\left\{ \frac{3n_0e^2\pi\omega^2L}{v_f^3mc^3}\, 2\int\limits_{R_1}^{R_2} r_\perp^3 dr_\perp \int\limits_0^{v_f} \int\limits_0^{\alpha_0} \frac{v_\perp^3}{\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} \right.$$

$$\times \left[\frac{q_2\big(1 - \exp(-\nu T_1) + q_1\exp(-\nu T_1)\big) - 1}{\nu\big(1 - q_1q_2\exp(-2\nu T_1)\big)} \exp(-\nu t_1) + \frac{1}{\nu} \right]$$

$$\left. \times \sin^2\alpha\, dv_\perp\, d\alpha \right\}. \tag{27}$$

Введем новые переменные

$$\xi = \frac{r_\perp}{R_2}, \quad \rho = \frac{v_\perp}{v_f},$$

$$z = \nu\frac{R_2}{v_f} = \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\frac{R_2}{v_f} = x - iy, \tag{28}$$

$$\kappa = \frac{R_1}{R_2}.$$

Здесь $x = R_2/\tau v_f$ — отношение радиуса частицы R_2 к длине свободного пробега электронов Λ (τ — электронное время релаксации оболочки, v_f — скорость Ферми электронов в оболочке частицы); $y = R_2\omega/v_f$ — отношение частоты внешнего поля ω к частоте рассеяния электронов на поверхности частицы v_f/R_2. Например, для частицы алюминия ($v_f = 2.02 \cdot 10^6$ m/s), когда $R_2 = 10$ nm, безразмерной частоте $y = 7$ (в этом случае наиболее заметна зависимость сечения поглощения от коэффициентов отражения и от наличия внутреннего ядра) соответствует круговая частота внешнего поля $\omega = yv_f/R_2 \approx 1.4 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$.

С учетом (28) преобразуем выражения (15), (16), (19) и (22) к следующему виду:

$$t_2 = \frac{R_2}{v_\perp}\left(\xi\cos\alpha + \sqrt{1 - \xi^2\sin^2\alpha}\right) = \frac{R_2}{v_\perp}\eta,$$

$$T_2 = \frac{R_2}{v_\perp}\, 2\sqrt{1 - \xi^2\sin^2\alpha} = \frac{R_2}{v_\perp}\eta_0,$$

$$t_1 = \frac{R_2}{v_\perp}\left(\xi\cos\alpha - \sqrt{\kappa^2 - \xi^2\sin^2\alpha}\right) = \frac{R_2}{v_\perp}\psi,$$

$$\alpha_0 = \arccos\left(\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\xi^2}}\right).$$

Здесь мы учли, что $\mathbf{r}_\perp\mathbf{v}_\perp = r_\perp v_\perp\cos\alpha$ (все электроны на поверхности Ферми внутри цилиндрического металлического слоя частицы двигаются со скоростями, равными v_f).

Решив уравнение (20), определяем параметр T_1

$$T_1 = \frac{R_2}{v_\perp}\left(\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha} - \sqrt{\kappa^2-\xi^2\sin^2\alpha}\right) = \frac{R_2}{v_\perp}\psi_0.$$

Далее сечение поглощения (24) представляем в виде

$$\sigma = \sigma_0(F_1+F_2+F_3),$$

где

$$\sigma_0 = \frac{3\pi n_0 e^2 v_f R_2^3 L}{mc^3}, \tag{29}$$

$$F_1 = \mathrm{Re}\left\{2\frac{y^2}{z}\int\limits_\kappa^1 \xi^3\,d\xi \int\limits_0^1 \int\limits_{\alpha_0}^{\pi-\alpha_0} \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} \times\left[\frac{(q_2-1)\exp(-z\eta/\rho)}{\big(1-q_2\exp(-z\eta_0/\rho)\big)}+1\right]\sin^2\alpha\,d\rho\,d\alpha\right\}, \tag{30}$$

$$F_2 = \mathrm{Re}\left\{2\frac{y^2}{z}\int\limits_\kappa^1 \xi^3\,d\xi \int\limits_0^1 \int\limits_{\pi-\alpha_0}^{\pi} \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} \times\left[\frac{q_1\big(1-\exp(-z\psi_0/\rho)+q_2\exp(-z\psi_0/\rho)\big)-1}{\big(1-q_1q_2\exp(-2z\psi_0/\rho)\big)} \times\exp(-z\eta/\rho)+1\right]\sin^2\alpha\,d\rho\,d\alpha\right\}, \tag{31}$$

$$F_3 = \mathrm{Re}\left\{2\frac{y^2}{z}\int\limits_\kappa^1 \xi^3\,d\xi \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\alpha_0} \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} \times\left[\frac{q_2\big(1-\exp(-z\psi_0/\rho)+q_1\exp(-z\psi_0/\rho)\big)-1}{\big(1-q_1q_2\exp(-2z\psi_0/\rho)\big)} \times\exp(-z\psi/\rho)+1\right]\sin^2\alpha\,d\rho\,d\alpha\right\}. \tag{32}$$

Формулы (30)–(32) позволяют рассчитать безразмерное сечение поглощения неоднородной цилиндрической часитцы

$$F(x,y,\kappa,q_1,q_2) = F_1(x,y,\kappa,q_1,q_2)+F_2(x,y,\kappa,q_1,q_2) + F_3(x,y,\kappa,q_1,q_2) \tag{33}$$

и сечение поглощения электромагнитного излучения

$$\sigma = \sigma_0 F(x,y,\kappa,q_1,q_2). \tag{34}$$

Когда $\kappa\to 0$ ($\alpha_0\to 0$), т.е. в частице нет ядра, из (33) следует, что

$$F(x,y) = \mathrm{Re}\left\{2\frac{y^2}{z}\int\limits_0^1 \xi^3\,d\xi \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi} \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} \times\left[\frac{(q_2-1)\exp(-z\eta/\rho)}{\big(1-q_2\exp(-z\eta_0/\rho)\big)}+1\right]\sin^2\alpha\,d\rho\,d\alpha\right\}.$$

Это выражение совпадает с результатом, полученным в работе [17] для однородной цилиндрической частицы металла.

Численный расчет $F(x,y,\kappa,q_1,q_2)$ представлен на рис. 1–6.

4. Обсуждение результатов

В пределе чисто зеркального отражения электронов на границах металлического поля частицы ($q_1=1,\ q_2=1$), используя формулы (30)–(32), получаем для безразмерного сечения поглощения $F(x,y,\kappa)$ выражение

$$F(z,\kappa) = \mathrm{Re}\left\{\frac{y^2}{z(x,y)}\frac{\pi}{6}(1-\kappa^4)\right\}. \tag{35}$$

В результате сечения поглощения (34) принимает вид

$$\sigma(z,\kappa) = \sigma_0\,\mathrm{Re}\left\{\frac{y^2}{z(x,y)}\frac{\pi}{6}(1-\kappa^4)\right\} = \sigma_0\frac{\pi}{6}(1-\kappa^4)\frac{xy^2}{x^2+y^2}. \tag{36}$$

В случае металлической частицы без ядра ($\kappa\to 0$) это выражение соответствует классическому результату для цилиндрической частицы (формула Друде) [15]

$$\sigma(z) = \sigma_0\frac{\pi}{6}\frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

С учетом обозначений (28) и (29) сечение поглощения (36) точно совпадает с классическим результатом для цилиндрического слоя металла. Это связано с тем, что при $q_1=1,\ q_2=1$ границы металлического слоя частицы не оказывают влияния на функцию распределения электронов $f(\mathbf{r}_\perp,\mathbf{v}_\perp,\mathbf{v}_z)$. Вихревой ток внутри зеркально отражающего металлического слоя (см. (23)) удовлетворяет локальному закону Ома при любых соотношениях между толщиной слоя l и длиной свободного пробега электронов Λ. Таким образом, при зеркальном отражении отсутствуют нелокальные (поверхностные) эффекты.

Независимо от характера отражения электронов на границах металлического слоя (при любых q_1 и q_2) с ростом размера частицы (при $x\gg 1$) (в этом случае в

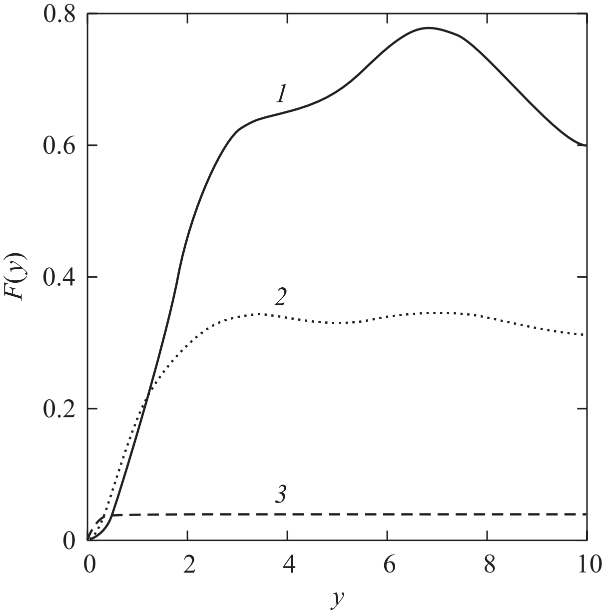

Рис. 1. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты. $y = R_2\omega/v_f$ при $x = 0.1$, $\kappa = 0.7$. *1* — $q_1 = 0, q_2 = 0$, *2* — $q_1 = 0.5, q_2 = 0.5$, *3* — $q_1 = 1, q_2 = 1$.

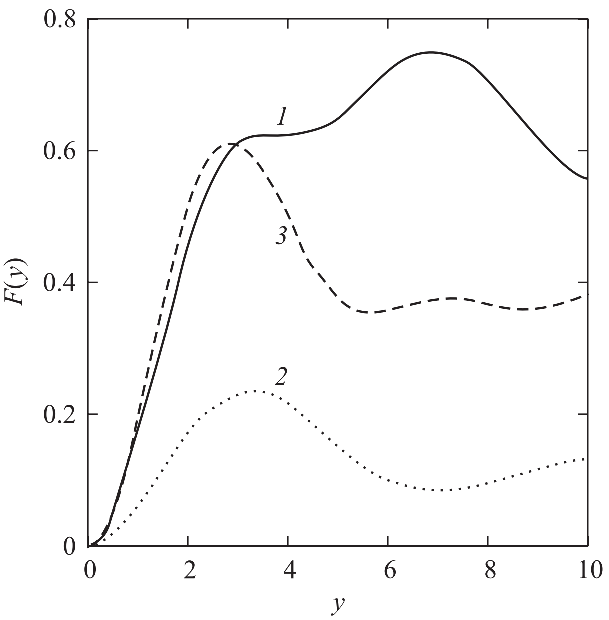

Рис. 2. То же, что на рис. 1, при $x = 0$, $\kappa = 0.7$. *1* — $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, *2* — $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, *3* — $q_1 = 1$, $q_2 = 0$.

формулах (30)–(32) можно пренебречь членами с экспонентами ввиду их быстрого затухания) также имеет место макроскопическая асимптотика (35).

На рис. 1, 2 показаны зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты внешнего поля y. Рис. 1 соответствует случаю одинаковых коэффициентов отражения электронов от поверхностей частицы. Фиксированным для каждой кривой является отношение радиуса ядра к радиусу частицы κ. Как видно из этого рисунка, в области низких безразмерных частот y (когда $y \ll 1$) F может быть больше для частиц, в которых происходит чисто зеркальное отражение электронов проводимости. При $y > 1$ безразмерное сечение поглощения больше для частиц, в которых отражение электронов проводимости на каждой из поверхностей чисто диффузное. На рис. 2 представлены данные для частиц малого размера (по сравнению с длиной свободного пробега электронов), когда $R \ll \Lambda$ $(x = 0)$. Каждая кривая построена для различных значений коэффициентов отражения q_1 и q_2. Наличие осцилляций частотной зависимости объясняется влиянием отношения времени пролета электрона между столкновениями с поверхностями к периоду изменения внешнего электромагнитного поля на диссипацию энергии внутри металлической оболочки частицы. Это влияние наиболее существенно при диффузном отражении электронов от границ металлического слоя частицы ($q_1 = 0$ или $q_2 = 0$). Оно убывает по мере возрастания коэффициента отражения от поверхности. Увеличение радиуса частицы приводит к сглаживанию осцилляций частотной зависимости из-за усиления влияния объемных столкновений электронов. С ростом коэффициентов отражения сечение поглощения уменьшается ввиду снижения роли поверхностных эффектов при диссипации энергии.

На рис. 3 отображены зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега x. Этот рисунок построен при заданной безразмерной частоте y и различных коэффициентах отражения q_1 и q_2. Кривая *2* выходит практически из начала координат и имеет максимум. Эта зависимость близка к классическому результату (36), так как главный

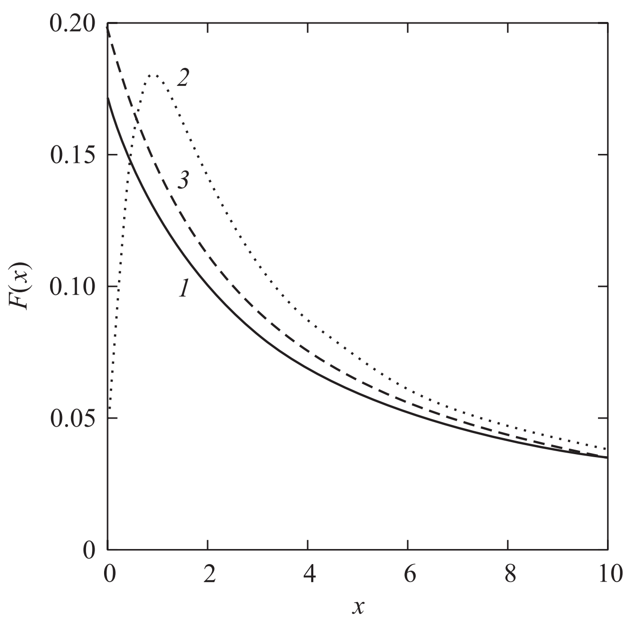

Рис. 3. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега $x = R_2/\tau v_f$ при $y = 1$, $\kappa = 0.7$. *1* — $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, *2* — $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, *3* — $q_1 = 1$, $q_2 = 0$.

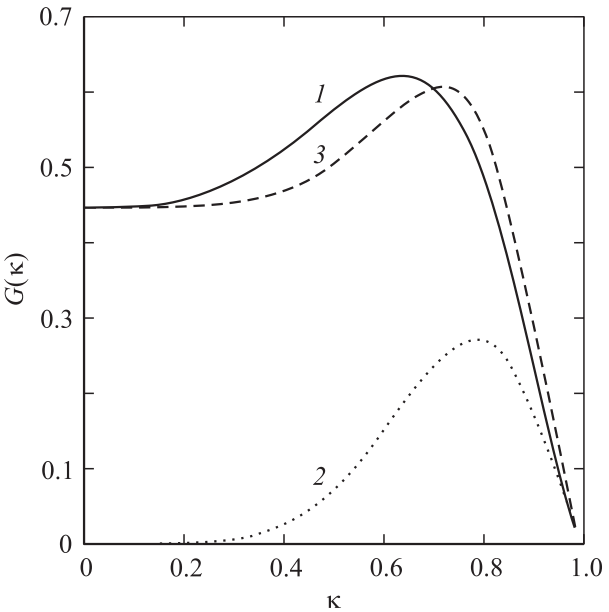

Рис. 4. Зависимость величины G от отношения радиуса ядра к радиусу частицы κ при $y = 3$, $x = 0$. *1* — $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, *2* — $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, *3* — $q_1 = 1$, $q_2 = 0$.

вклад в сечение поглощения вносят электроны, зеркально отражающиеся от границы неоднородной частицы. При промежуточных значениях коэффициентов отражения ($q \neq 0$ и $q \neq 1$) безразмерное сечение поглощения отлично от нуля даже для случая очень чистого металла, когда $x = 0$. С увеличением радиуса частицы все кривые сливаются и результат переходит в классический. При возрастании частоты сечение поглощения также возрастает, поскольку напряженность вихревого электрического поля прямо пропорциональна частоте внешнего поля.

Для анализа зависимости безразмерного сечения поглощения F от отношения радиуса ядра к радиусу частицы κ воспользуемся рис. 4, на котором приведено безразмерное сечение поглощения металлической цилиндрической частицы с диэлектрическим ядром, приходящееся на единицу объема металла $G(\kappa)$ в частице (удельное сечение поглощения),

$$G(\kappa) = \frac{F(\kappa)}{1 - \kappa^2}$$

Ограничимся случаем частиц чистого металла ($x = 0$) и фиксированного значения безразмерной частоты внешнего поля y. Для таких частиц (электроны в чистых металлах обладают большой длиной свободного пробега) в широком диапазоне значений κ удельное сечение поглощения может быть больше при зеркальном отражении электронов от наружной поверхности металлического слоя частицы. При значениях κ, близких к единице, удельное сечение поглощения невелико на всех частотах и при всех значениях коэффициентов отражения, потому что цилиндрическая металлическая оболочка частицы очень тонкая и электроны при движении между поверхностями оболочки не успевают существенно ускориться внешним электромагнитным полем (при этом плотность тока в оболочке стремится к нулю).

Рис. 5 и 6 показывают влияние на безразмерное сечение поглощения F коэффициентов отражения q_1 и q_2 для частицы с тонкой металлической оболочкой (κ близко к единице). Из рис. 5 видно, что при отсутствии объемного

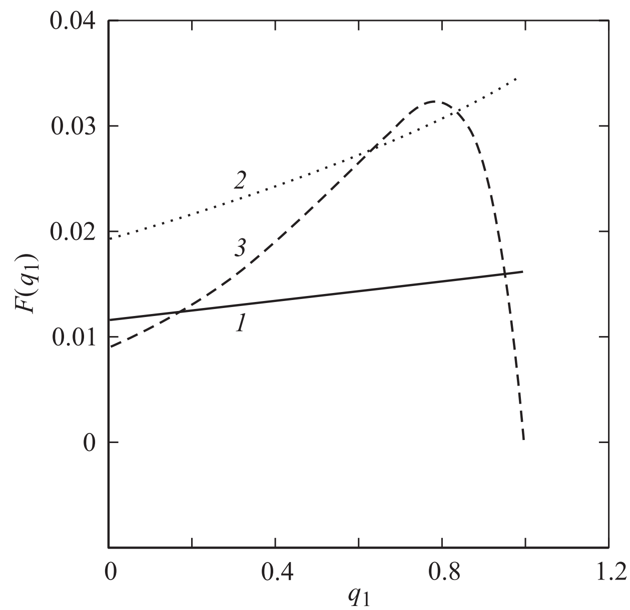

Рис. 5. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от коэффициента отражения q_1 электронов от внутренней поверхности металлического слоя частицы при $y = 1$, $x = 0$, $\kappa = 0.95$. $q_2 = 0$ (*1*), 0.5 (*2*) и 1 (*3*).

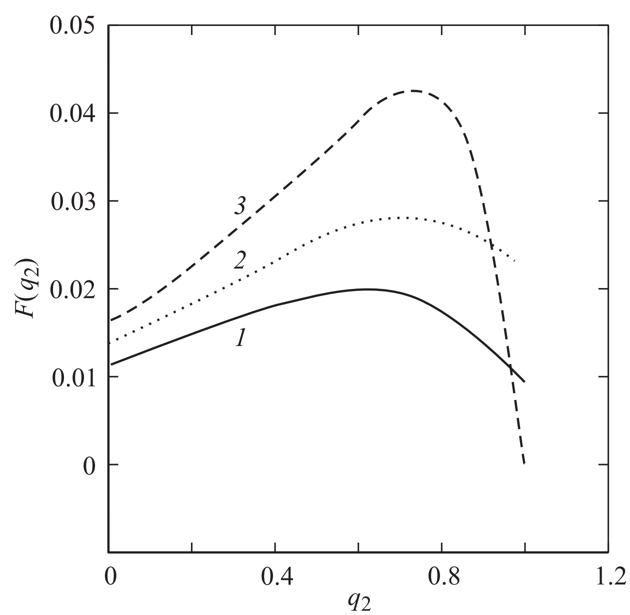

Рис. 6. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от коэффициента отражения q_2 электронов от внешней поверхности металлического слоя частицы при $y = 1$, $x = 0$, $\kappa = 0.95$. $q_1 = 0$ (*1*), 0.5 (*2*) и 1 (*3*).

рассеяния электронов в металле (размер металлического слоя частицы предельно мал) особенно сложный характер зависимости безразмерного сечения поглощения F от коэффициента отражения q_1 наблюдается в случае зеркального отражения электронов от внешней границы металлического слоя ($q_2 = 1$). В этом случае сечение поглощения стремится к нулю при всех y, когда рассеяние электронов на двух отражающих поверхностях металла становится чисто зеркальным ($q_1 = 1$ и $q_2 = 1$). Рис. 6 показывает, как безразмерное сечение поглощения F зависит от коэффициента отражения q_2. Практически при любых значениях q_2 (за исключением узкой области вблизи единицы) сечение поглощения становится больше при возрастании степени зеркальности отражения электронов от внутренней границы цилиндрического металлического слоя частицы.

Список литературы

[1] Ю.И. Петров. Физика малых частиц. Наука, М. (1984).
[2] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. Наука, М. (1973).
[3] А.Г. Лесскис, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. ЖЭТФ **83**, *1*, 310 (1982).
[4] А.Г. Лесскис, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. Поверхность **11**, 115 (1987).
[5] H.J. Trodahl. Phys. Rev. B **19**, 1316 (1979).
[6] H.J. Trodahl. J. Phys. C: Solid State Phys. **15**, 7245 (1982).
[7] Е.А. Бондарь. Опт. и спектр. **75**, *4*, 837 (1993).
[8] Е.А. Бондарь. Опт. и спектр. **89** (1996).
[9] R.B. Dingle. Proc. Roy. Soc. A **201**, 545 (1950).
[10] A.G. Mal'shukov. Solid State Commun. **44**, *8*, 1257 (1982).
[11] А.Г. Мальшуков. ЖЭТФ **85**, *2*, 700 (1983).
[12] П.М. Томчук, Б.П. Томчук. ЖЭТФ **112**, *2*, 661 (1997).
[13] R.J. Kubo. Phys. Soc. Jap. **17**, 975 (1962).
[14] Э.А. Маныкин, П.П. Полуэктов, Ю.Г. Рубежный. ЖЭТФ **70**, *6*, 2117 (1976).
[15] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. ЖТФ **71**, *11*, 114 (2001).
[16] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. Опт. и спектр. **92**, *5*, 851 (2002).
[17] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. ЖТФ **73**, *3*, 16 (2003).
[18] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. ЖЭТФ **124**, *5*, 1112 (2003).
[19] Дж. Займан. Электроны и фононы. М. (1962).
[20] R.D. Averitt, S.L. Westcott, N.J.J. Halas. J. Opt. Soc. Am. B **16**, *10*, 1824 (1999).
[21] A. Henglein. J. Phys. Chem. B **104**, *10*, 2201 (2000).
[22] А.И. Сидоров. Опт. журн. **70**, *2*, 9 (2003).
[23] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1992).
[24] У. Харрисон. Теория твердого тела. Мир, М. (1972).
[25] Р. Курант. Уравнения с частными производными. Мир, М. (1962).