

Нелинейное взаимодействие волн в полупроводниковой сверхрешетке

© А.А. Булгаков[¶], О.В. Шрамкова

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова Национальной академии наук Украины,
61085 Харьков, Украина

(Получена 20 сентября 2000 г. Принята к печати 13 ноября 2000 г.)

Изучается нелинейное взаимодействие волн в периодической структуре, образованной чередующимися слоями полупроводника и диэлектрика. Показано, что трансляционная симметрия структуры приводит к ряду особенностей нелинейного взаимодействия. Проанализированы условия резонансного взаимодействия первой и второй гармоник. Впервые рассмотрено возбуждение второй гармоники, происходящее при взаимодействии первых пространственных гармоник, распространяющихся в противоположных направлениях. Дано объяснение существенного увеличения взаимодействия волн вблизи границы зон пропускания.

1. Введение

Тенденция к миниатюризации современных средств обработки и передачи информации с помощью электромагнитных волн от оптического до сантиметрового диапазонов приводит к необходимости использования твердотельных структур практически во всем тракте приема–передачи. Нелинейные механизмы в твердом теле, как правило, относительно малы. Однако их воздействие на полезный сигнал оказывается достаточно большим и приводит к нежелательным последствиям. Причина этого как в значительном уровне передаваемой мощности, так и в большой протяженности линий передачи. Вместе с тем нелинейные явления в твердом теле широко используются для обработки информации (модуляция и гетеродинирование), для умножения частоты, для спектроскопических исследований и определения физических параметров твердотельных структур и т.п. В настоящее время значительное распространение получили искусственные материалы, представляющие собой многослойные структуры, в частности полупроводниковые сверхрешетки. Поэтому изучение нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в слоистых и слоисто-периодических структурах является важным как с физической точки зрения, так и в связи с возможностью многочисленных практических приложений.

Данная работа посвящена возбуждению второй гармоники в полупроводниковой сверхрешетке в области плазменной частоты полупроводникового материала. Исследуемая нами нелинейность обусловлена нелинейностью тока свободных носителей. Сложность построения теории связана с тем, что нелинейность тока складывается из нелинейности скорости и концентрации носителей, вызванных распространением плазменных волн. Слагаемые, описывающие эти нелинейные механизмы, находятся в уравнениях Максвелла, уравнениях движения и непрерывности. Эти нелинейности не могут быть представлены в выражении для диэлектрической проницаемо-

сти в виде квадрата модуля амплитуды электрического поля $|\mathbf{E}|^2$, так как имеют более общую зависимость от компонент поля: $E_i E_k$.

Учет малости нелинейных слагаемых позволяет существенно упростить исследование, используя теорию возмущений, а именно теорию трехволновых взаимодействий (см. [1–3]). В этом случае возникает трудность, связанная с тем, что нелинейные механизмы действуют в разных слоях и описываются слагаемыми в различных уравнениях. Необходимо сформулировать правило, которое позволило бы однозначно (и физически "правильно") учесть все нелинейности. При рассмотрении однородной среды таковым является теорема об ортогональности правой части алгебраической системы уравнений к решению транспонированной системы. В результате получается система "укороченных уравнений" (или уравнений связи) для медленно изменяющейся амплитуды волны, а физический смысл этой системы заключается в том, что доля энергии, связанная с нелинейным взаимодействием, мала по сравнению с энергией волны и медленно (по сравнению с частотой волны) изменяется при взаимодействии. В нашей задаче вследствие пространственной неоднородности система уравнений оказывается дифференциальной, поэтому необходимо пользоваться формулой Грина ([4], см. далее). Ее математический смысл состоит в том, что система дифференциальных уравнений должна подчиняться определенному правилу ортогональности правой части к решению транспонированной дифференциальной системы. Система "укороченных уравнений" оказывается такой же, как и в случае нелинейной однородной среды (поэтому она хорошо изучена в литературе), а все особенности слоистой структуры описываются коэффициентами этой системы. Данная работа посвящена изучению этих особенностей и их зависимости от параметров сверхрешетки.

Теория слабых нелинейных взаимодействий была разработана в рамках кинетического рассмотрения [1], а также в работах [2,5]. Она получила развитие в работах многих других авторов (см., например, [3] и цитируемую там литературу). Методика анализа трехволновых процессов в ограниченных средах была представлена в

[¶] E-mail: bulgakov@ire.kharkov.ua
Fax: 380(572)441105

работе [6], а для периодических структур — в монографии [7]. Применение этой теории к периодическим диэлектрическим решеткам было проведено в [8].

В работе [9] на примере модели уравнений связи для периодической среды было показано, что на краях полос пропускания возможно существенное увеличение нелинейного взаимодействия. Причиной этого явления авторы считают возникновение резонанса для пространственных гармоник и, как следствие, увеличение времени взаимодействия. В работе [8] показано, что имеет место более сложное явление, так как резонансные условия (брэгговский резонанс на полном периоде структуры) выполняются в зоне непропускания электромагнитных волн. Поэтому степень увеличения нелинейного взаимодействия определяется близостью края зоны пропускания к точке брэгговского резонанса.

В данной работе рассматривается структура, слои которой обладают частотной дисперсией. Вследствие этого законы синхронизма оказываются существенно сложнее, чем рассмотренные в работах [5,8]. Исследуются специфические для периодической структуры законы синхронизма, и показано, что кроме брэгговского резонанса на величину взаимодействия значительное влияние оказывает своеобразный "нелинейный резонанс". Этот резонанс характеризуется равенством нулю алгебраической суммы поперечных (по отношению к границам слоев) волновых чисел взаимодействующих волн одного из слоев. Физически это условие соответствует наибольшему значению энергии, запасаемой волнами в данном слое.

2. Постановка задачи. Дисперсионное соотношение

Рассмотрим периодическую структуру с периодом d , образованную повторением слоя полупроводника толщиной d_1 и слоя диэлектрика толщиной d_2 . Расположим систему координат таким образом, чтобы ось Oz была перпендикулярна границам слоев. В направлениях осей Ox и Oy слои предполагаются однородными, поэтому можно положить $\partial/\partial y = 0$. Это приводит к тому, что уравнения Максвелла распадаются на уравнения для двух поляризаций. В работе исследуется поляризация с компонентами электрического и магнитного полей E_x , E_z , H_y , отличными от нуля. Распространение электромагнитных волн в данной задаче описывается уравнениями Максвелла и материальными уравнениями для каждого слоя, а также граничными условиями, состоящими в равенстве тангенциальных компонент магнитного и электрического полей на всех границах. Для получения дисперсионного соотношения используем метод передаточной матрицы, связывающей поля в начале периода и

в произвольной точке z периода структуры [10]:

$$\begin{pmatrix} H_{y1}(0) \\ E_{x1}(0) \end{pmatrix} = M(z) \begin{pmatrix} H_{y2}(z) \\ E_{x2}(z) \end{pmatrix}$$

Компоненты передаточной матрицы для $z = d$ приведены в *Приложении*.

С помощью теоремы Флоке получим дисперсионное соотношение для безграничной периодической среды [7] (зависимость от координат и времени предполагается в виде $\exp(-i\omega t + ik_x x + ik_z z)$):

$$\cos \bar{k}d = \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2k_{z1}k_{z2}} \left[\left(\frac{k_{z1}}{\varepsilon_1} \right)^2 + \left(\frac{k_{z2}}{\varepsilon_2} \right)^2 \right] \times \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2, \quad (1)$$

где $k_{z1} = \sqrt{(\omega^2/c^2)\varepsilon_1 - k_x^2}$, $k_{z2} = \sqrt{(\omega^2/c^2)\varepsilon_2 - k_x^2}$ — поперечные волновые числа в полупроводниковом и диэлектрическом слоях (в дальнейшем индекс "1" будет относиться к слоям полупроводника, а индекс "2" — к слоям диэлектрика); k_x — волновое число вдоль оси Ox ; $\varepsilon_1 = \varepsilon_{01}(1 - \omega_p^2/\omega^2)$, $\varepsilon_2 = \text{const}$ — диэлектрические проницаемости слоев, ε_{01} — решеточная часть диэлектрической проницаемости; ω_p — плазменная частота;

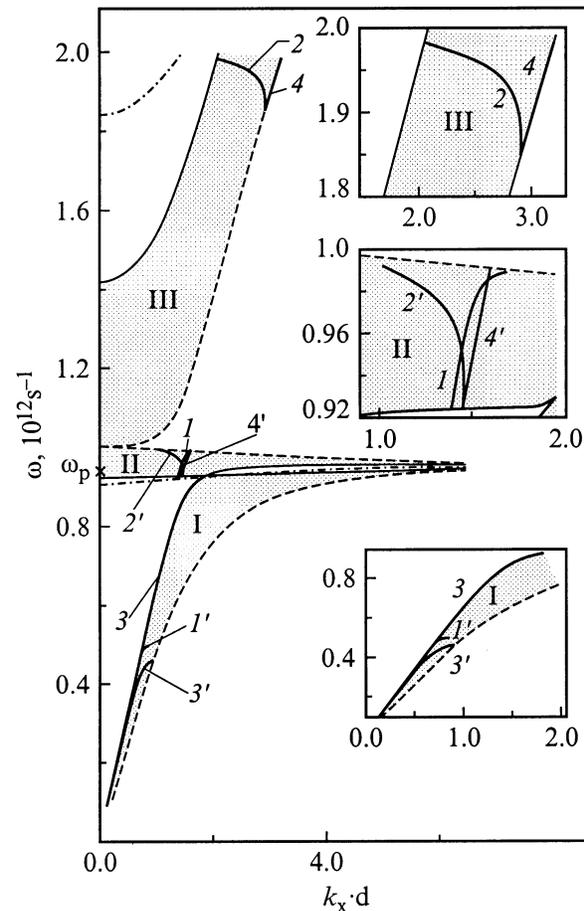


Рис. 1. Дисперсионная зависимость. $\varepsilon_0 = 17.8$, $d_1 = 0.01$ см, $\varepsilon_2 = 2$, $D_2 = 0.015$ см, $H_0 = 2.7 \cdot 10^{-6}$ А/см.

\bar{k} — ”усредненное” волновое число вместо k_{z1} и k_{z2} , так называемое блоховское волновое число. Численное решение уравнения (1) приведено на рис. 1. Расчеты в работе были произведены для структуры со следующими параметрами: первый слой — полупроводник типа InSb ($\varepsilon_{01} = 17.8$, $\omega_p = 10^{12} \text{ с}^{-1}$), $d_1 = 0.01 \text{ см}$, второй слой — диэлектрик ($\varepsilon_2 = 2$), $d_2 = 0.015 \text{ см}$. На рисунке кривые $\bar{k}d = 0$ показаны штриховой линией, а $\bar{k}d = \pi$ — тонкой линией. Зоны пропускания заштрихованы.

В дальнейшем нас будет интересовать область вблизи плазменной частоты, в которой проявляются плазменные свойства полупроводниковых слоев. Поэтому на рисунке представлены три зоны пропускания, обозначенные I, II, III.

Две нижние зоны пропускания электромагнитных волн (I, II), называемые в литературе акустической и оптической ветвями плазменных поляритонов [7], сужаются с ростом $k_x d$, а их границы асимптотически стремятся к частоте поверхностного плазмона на границе полупроводникового и диэлектрического слоев $\omega_{ps} = \omega_p \sqrt{\varepsilon_{01}/(\varepsilon_{01} + \varepsilon_2)}$ при $k_x d \rightarrow \infty$. Зона акустических поляритонов начинается при $k_x = 0$ и $\omega = 0$, а оптические волны имеют при $k_x \rightarrow 0$ ”щель” шириной $\omega \approx \omega_p$.

3. Получение уравнений связи

Цель нашей работы состоит в исследовании нелинейного взаимодействия волн в сверхрешетке. В твердом теле нелинейные механизмы, как правило, малы, поэтому для построения теории можно использовать теорию возмущений. Для однородных сред методика анализа хорошо разработана и представлена в многочисленных литературных источниках (см., например, [11,2,3]). В неоднородных средах ситуация иная. Дело в том, что в нашем случае не удастся свести нелинейную систему к алгебраической системе уравнений с правой частью, как это необходимо в методике, описанной в [2]. Уравнения остаются дифференциальными (в нашем случае остаются производные $\partial/\partial z$), и необходимо сформулировать условия, которые позволяют однозначно учесть нелинейные механизмы, действующие в различных слоях структуры, и, кроме того, выполнить требование непрерывности полей на всех границах структуры. Разработка такой методики для анализа нелинейных волновых взаимодействий в граничащих однородных средах была начата в работе [6]. Применение этой методики к периодическим структурам представлено в [8].

В основе данной методики лежит использование формулы Грина [4]

$$\int_a^b [\tilde{f}^* \cdot (\hat{L}f) - (\tilde{L}\tilde{f})^* \cdot f] dv = f\tilde{f}|_a^b, \quad (2)$$

где \hat{L} — дифференциальный оператор, представляющий собой квадратную матрицу, составленную из операторов

линеаризованной системы уравнений, \tilde{L} — сопряженный оператор, f и \tilde{f} — собственные функции этих операторов; символ ”*” используется для комплексно-сопряженных величин; a и b — границы области интегрирования, интегрирование производится по всему объему структуры; запись $\tilde{f}^* \cdot (\hat{L}f)$ означает скалярное произведение. Нелинейную систему уравнений можно представить в виде

$$\tilde{L}f = \hat{H}(f, f), \quad (3)$$

где $\hat{H}(f, f)$ — билинейный оператор-столбец, образованный нелинейными членами исходной системы уравнений. Подставляя уравнение (3) в соотношение (2) и воспользовавшись условием малости нелинейного взаимодействия

$$\omega \gg \frac{d \ln C}{dt}, \quad (4)$$

где C — амплитуда волны, получим динамическую систему уравнений для амплитуд взаимодействующих волн. В соотношении (4) производная по ”медленному времени” обозначена как d/dt .

В нашем случае предполагается, что нелинейные механизмы связаны с нелинейностью тока $\mathbf{j}_1 = en\mathbf{v}_1$ в слоях полупроводника (n — переменная концентрация, \mathbf{v}_1 — скорость носителей заряда в полупроводнике). Нелинейная система уравнений состоит из уравнений Максвелла, в которых нелинейный ток определяется из уравнения непрерывности и уравнения движения носителей:

$$\text{rot} \mathbf{H}_1 = \frac{\varepsilon_{01}}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_1,$$

$$\text{rot} \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \text{grad}) \mathbf{v}_1 = \frac{e}{m} \mathbf{E}_1 + \frac{e}{mc} [\mathbf{v}_1 \mathbf{H}_0] + \frac{e}{mc} [\mathbf{v}_1 \mathbf{H}_1], \quad (5)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \text{div}(n_0 + n_1) \mathbf{v}_1 = 0,$$

$$\mathbf{j}_1 = e(n_0 + n_1) \mathbf{v}_1.$$

Уравнения для диэлектрического слоя состоят из уравнений Максвелла, в которых следует положить ε_2 вместо ε_{01} и $\mathbf{j} = 0$.

Применим формулу (2) к системе (5), решение которой будем искать в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} C_k(t) [\mathbf{e}(z) + \mathbf{e}^{ad}] \exp(-i\omega_k t + ik_x x), \quad (6)$$

$$H_y = \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} C_k(t) [h_y(z) + h_y^{(ad)}] \exp(-i\omega_k t + ik_x x),$$

где $C(t)$ — медленно меняющаяся во времени (4) амплитуда волны с частотой $\omega = \omega(k_x, \bar{k})$ и волновым вектором $\mathbf{k} = \{k_x, 0, \bar{k}\}$. Зависимости $\mathbf{e}(z)$ и $h_y(z)$ учитывают

неоднородность структуры в этом направлении z , дополнительные слагаемые \mathbf{e}^{ad} и $h_y^{(ad)}$ описывают отклонения направления полей от линейных, вызванные действием нелинейных механизмов. Эти величины имеют такой же порядок малости, как и нелинейные слагаемые.

Оператор \hat{L} получается из линеаризованной системы уравнений для полупроводникового и диэлектрического слоев (5). Оператор \hat{H} состоит из нелинейных слагаемых полупроводникового слоя и производных по времени от амплитуды волны dC/dt , входящих в уравнения для первого и второго слоев. Отметим, что dC/dt — величина того же порядка малости, что и нелинейные члены. Поэтому, например, $\partial E_{x2}/\partial t = -i\omega E_{x2} + dE_{x2}/dt$ (см. [12]).

Собственные функции операторов L и \hat{L} пропорциональны $\exp(-i\omega t + ik_x x)$ и $\exp(i\tilde{\omega} t + i\tilde{k}_x x)$ соответственно. Поэтому интегрирование по t и x в линейных операторах приводит к δ -функциям $\delta(\tilde{\omega} - \omega)\delta(\tilde{k}_x - k_x)$, а интегрирование по dz — к граничным условиям. Частоты и x -компоненты волнового вектора собственных функций операторов L и \hat{L} должны совпадать, и, следовательно, $k_z = \tilde{k}_z$. Поэтому все линейные слагаемые после интегрирования обращаются в нуль. В левой части (2) остаются только члены с дополнительными полями $\mathbf{e}^{(ad)}$ и $h_y^{(ad)}$. В результате получаем

$$L(\partial/\partial z)C_k \varphi_k^{ad} = \frac{dC_k}{dt} \varphi_k + \sum_{k_x = k'_x + k''_x} C_{k'} C_{k''} \hat{H}_1(\varphi_{k'}, \varphi_{k''}) e^{-i(\omega' + \omega'' - \omega)t},$$

где \hat{H}_1 — оператор, состоящий только из нелинейных слагаемых полупроводникового слоя, $\varphi_k^{(ad)}$ — вектор-столбец, образованный составляющими поля $h_y^{(ad)}$, $\mathbf{e}^{(ad)}$.

Для интегрирования по dz в формуле (2) в нелинейных слагаемых путь интегрирования разбиваем так, чтобы выделить области шириной $2\delta_i$ ($\delta_i \rightarrow 0$) вблизи каждой границы [7]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\delta_i \rightarrow 0, i=0, \pm 1, \dots} \dots + \int_{-\delta_0}^{\delta_0} + \int_{\delta_0}^{-\delta_1 + d_1} + \int_{-\delta_1 + d_1}^{\delta_1 + d_1} + \int_{\delta_1 + d_1}^{-\delta_2 + d} + \dots,$$

$d = d_1 + d_2$ — период структуры. В интегралах по каждому слою выразим поля с помощью теоремы Флоке через поля первого периода структуры, т.е. сведем к сумме

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[i(\bar{\mathbf{k}}' + \bar{\mathbf{k}}'' - \bar{\mathbf{k}} + 2\pi n/d)z],$$

$$n = 0, \pm 1, \dots,$$

приводящей к закону сохранения для блоховской компоненты волнового вектора

$$\bar{\mathbf{k}}' + \bar{\mathbf{k}}'' - \bar{\mathbf{k}} + 2\pi n/d = 0, \quad (7)$$

а остальные интегралы пропорциональны $2\delta_i$ или $\delta_i + \delta_{i+1}$ и обратятся в нуль при переходе к пределу $\delta_i \rightarrow 0$.

Для выполнения условий непрерывности полей необходимо предположить, что дополнительные поля подчиняются таким же условиям, как и линеаризованные. Тогда в формуле (2) остаются только слагаемые с dC/dt и нелинейные члены. В дальнейшем методика получения уравнений связи совпадает со стандартной [2].

При выполнении резонансных условий (условий синхронизма)

$$\begin{cases} \omega' + \omega'' - \omega = 0 \\ k'_x + k''_x - k_x = 0 \\ \bar{\mathbf{k}}' + \bar{\mathbf{k}}'' - \bar{\mathbf{k}} + 2\pi n/d = 0 \end{cases} \quad (8)$$

получаем уравнение для амплитуды C_k [12]:

$$\frac{dC_k}{dt} = W_{k,k',k''} C_{k'} C_{k''}, \quad (9)$$

где

$$W_{k,k',k''} = \int_0^d dz m n_0 \left\{ \frac{1}{\omega} (\nabla' + \nabla'', v^*) (v' v'') + \frac{1}{\omega'} (\nabla' v') (v^* v'') + \frac{1}{\omega''} (\nabla'' v'') (v^* v') \right\}.$$

Соотношение (9) — уравнение для амплитуды k -й волны. Уравнения для амплитуд двух других волн C' и C'' получаем перестановкой индексов.

Нелинейное взаимодействие, связанное с периодичностью структуры, имеет следующие особенности.

1. Учет зонной структуры спектра состоит в том, что матричный элемент и условия синхронизма имеют смысл только в зонах пропускания решетки.

2. Условие синхронизма для z -компонент волнового вектора не существует, а должно выполняться соотношение для блоховских компонент волнового вектора (7), которое содержит слагаемое $2\pi n/d$. (По-видимому, впервые на это обстоятельство из физических соображений было указано в работе [13]).

3. Матричные элементы в формуле (9) оказываются комплексными величинами в отличие от однородных сред, в которых $W_{k,k',k''}$ — мнимая величина.

4. Исследование уравнений связи

Проанализируем условия взаимодействия первой и второй гармоники с частотами ω' и $\omega = 2\omega'$. В этом случае система уравнений связи (9) имеет вид

$$\begin{cases} dC_k/dt = W_{2k',k'} C_{k'}^2 \\ dC_{k'}/dt = W_{k',2k'} C_k C_{k'}^* \end{cases} \quad (10)$$

Для решения системы (10) введем обозначения: $C_k = Ce^{i\varphi}$, $C_{k'} = C'e^{i\varphi'}$, $W_{2k',k'} = We^{i\Theta}$, $W_{k',2k'} = W'e^{i\Theta'}$, $\Phi = 2\varphi' - \varphi$. Тогда уравнения связи принимают вид

$$\begin{cases} dC/dt = WC'^2 \cos(\Theta + \Phi) \\ dC'/dt = W'CC' \cos(\Theta' - \Phi) \\ d\Phi/dt = -W(C'^2/C) \sin(\Theta + \Phi) - 2W'C \sin(\Theta' - \Phi). \end{cases} \quad (11)$$

В случае, когда W и W' — мнимые величины, т.е. $\Theta = \Theta' = 3/2\pi$, система (11) сводится к эллиптическому интегралу, а решение получаем в виде эллиптических функций

$$C^2 = WK_1 \left\{ y_1 + (y_2 - y_1) \times \operatorname{sn}^2 \left[W'W^{1/2}K_1^{1/2}(t - t_0), \sqrt{\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}} \right] \right\}, \quad (12)$$

где $K_1 = [C^2(0)/W] + [C'^2(0)/W']$, $y_1 < y_2 < y_3$ — корни кубического уравнения:

$$y(1-y)^2 - K = 0 \quad K = \frac{K_2^2}{K_1^3 W (W')^2}.$$

Для случая, когда $C(0) < C'(0)$, находим амплитуды первой и второй гармоник:

$$C^2 \approx \frac{W}{W'} [C'(0)]^2 \operatorname{sn}^2[\sqrt{WW'}C'(0)t, 1 - \sqrt{K}],$$

$$C'^2 \approx [C'(0)]^2 \{1 - \operatorname{sn}^2[\sqrt{WW'}C'(0)t, 1 - \sqrt{K}]\}. \quad (13)$$

Видно, что с ростом отношения W/W' происходит увеличение амплитуды второй гармоники, а период эллиптической функции обратно пропорционален $\sqrt{WW'}$. Таким образом, физические характеристики взаимодействия первой и второй гармоник могут быть получены при исследовании зависимостей коэффициентов нелинейного взаимодействия W и W' от параметров структуры, которое будет проведено в следующем разделе.

5. Нелинейное возбуждение второй гармоники

Возбуждение второй гармоники, помимо практического применения для умножения частоты и спектроскопии периодической среды, представляет интерес в связи с возможностью аналитического исследования и выяснения физических особенностей нелинейного взаимодействия волн.

Для взаимодействия первой и второй гармоник условия синхронизма имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \omega = 2\omega' \\ k_x = 2k'_x \\ \bar{k} = 2\bar{k}'. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь k'_x и ω' определяются из системы дисперсионных соотношений

$$\begin{aligned} \cos \bar{k}'d = \cos k'_{z1}d_1 \cos k'_{z2}d_2 - \frac{\varepsilon'_1 \varepsilon_2}{2k'_{z1}k'_{z2}} \left[\left(\frac{k'_{z1}}{\varepsilon'_1} \right) + \left(\frac{k'_{z2}}{\varepsilon_2} \right)^2 \right] \\ \times \sin k'_{z1}d_1 \sin k'_{z2}d_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \bar{k}d = \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2k_{z1}k_{z2}} \left[\left(\frac{k_{z1}}{\varepsilon_1} \right) + \left(\frac{k_{z2}}{\varepsilon_2} \right)^2 \right] \\ \times \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_{01}\{1 - \omega_p^2/4\omega'^2\}$, а $\varepsilon'_1 = \varepsilon_{01}\{1 - \omega_p^2/\omega'^2\}$, т.е. $\varepsilon_1 \neq \varepsilon'_1$, и, следовательно, $k_{z1} \neq 2k'_{z1}$. В этом состоит сложность аналитического решения данной системы уравнений в отличие от случая диэлектрической сверхрешетки [8]. Аналитическое решение системы (15) удастся получить только в случае резонанса на втором слое, т.е. если $k'_{z2}d_2 = \pi m$ и $k_{z2} = 2k'_{z2}$, где $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда условия синхронизма (14) выполняются для первых гармоник с частотами ω' и волновыми числами k'_x :

$$k'_x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{c^2} (4\omega'^2 - \omega_p^2) - \left(\frac{d_1}{\pi m} \right)^2 \left[\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{01}}{c^2} \omega_p^2 + \left(\frac{\pi m}{d_1} \right)^2 \right]^2}.$$

Численное решение системы уравнений (14) и (15) представлено на рис. 1 утолщенными сплошными кривыми $1'$, $2'$ для первой гармоники и 1 , 2 — для второй, расположенными в зонах пропускания. Видно, что в обоих случаях первая и вторая гармоники находятся в разных разрешенных зонах. Для кривой 1 происходит перебор с акустической ветви на оптическую, а для кривой 2 с оптической на ветвь, расположенную в зоне выше плазменной частоты ω_p . Отметим, что кривые $1'$ и $2'$ заканчиваются внутри соответствующих зон при $\bar{k}' = \pi/2$. Если увеличивать это число, то волновое число второй гармоники приводит к зоне непропускания этой гармоники, так как $\bar{k} > \pi$.

В периодической структуре имеет место специфический процесс нелинейного взаимодействия. Он связан с тем, что знак блоховского волнового числа не определяется из дисперсионного соотношения. Поэтому условия синхронизма будут удовлетворяться как для \bar{k}' , так и для $(-\bar{k}')$. Следовательно, возможен следующий тип взаимодействия:

$$\begin{cases} \omega = 2\omega' \\ k_x = 2k'_x \\ \bar{k} \pm 2\pi n/d = \bar{k}' - \bar{k}'. \end{cases} \quad (16)$$

В этом случае возбуждение второй гармоники происходит с волновым числом $\bar{k} = \mp 2\pi n/d$ в результате взаимодействия пространственных гармоник с частотой ω' , бегущих навстречу друг другу вдоль оси Oz . Такой тип взаимодействия возможен благодаря тому, что бло-

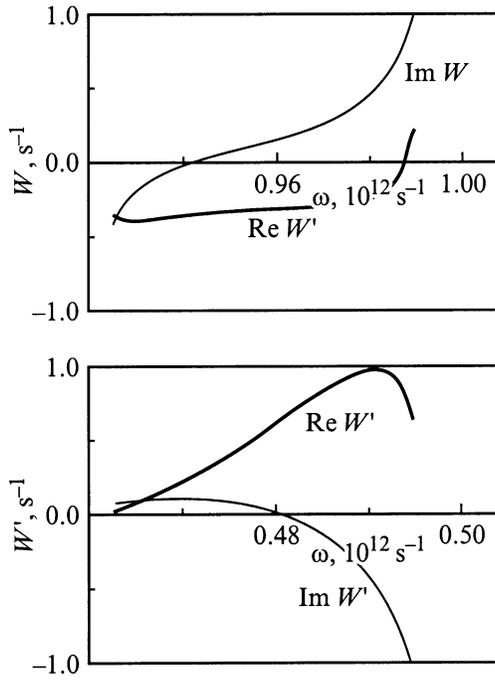


Рис. 2. Зависимости нелинейных коэффициентов от частоты для кривых 1, 1' рис. 1.

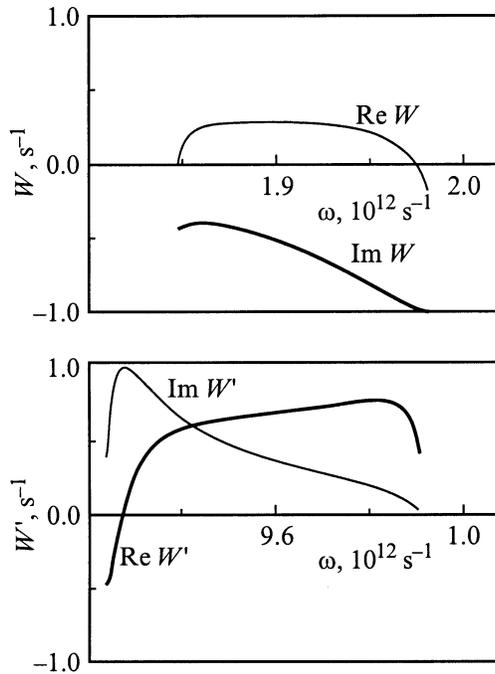


Рис. 3. Зависимости нелинейных коэффициентов от частоты для кривых 4, 4' рис. 1.

ховское волновое число — это "квазиволновое" число, аналогичное квазипульсу электрона в твердом теле. Интерес к этому типу взаимодействия связан с тем, что, как будет показано далее, условие $\bar{k} = 2\pi n/d$ может привести к существенному возрастанию эффективности нелинейного взаимодействия.

Для резонансных условий (16) численные решения дисперсионных соотношений представлены на рис. 1 кривыми 3', 3, 4' и 4. Кривые 3', 3 являются примером условия взаимодействия, при котором первая и вторая гармоники расположены в одной зоне пропускания. Кривые 4', 4 соответствуют процессу, при котором гармоники принадлежат различным зонам пропускания.

На рис. 2,3 приведены зависимости $W(\omega)$ и $W'(\omega)$, нормированные на максимальные значения — $ReW'/\max(ReW')$, $ImW'/\max(ImW')$ и аналогично для W — для кривых 1' и 1, 4' и 4, представленных на рис. 1. Для объяснения этих зависимостей и понимания физических факторов, определяющих величины нелинейного взаимодействия, необходимо учесть, что после интегрирования выражения для W каждое слагаемое в (9) приводит к четырем множителям вида

$$f_s \frac{\cos k_s d_1 - 1 + i \sin k_s d_1}{k_s}, \quad (17)$$

где f_s — коэффициент, определяемый с помощью амплитуд полей взаимодействующих волн, k_s — одна из комбинаций $k_{z1}+k'_{z1}+k''_{z1}$, $k_{z1}-k'_{z1}-k''_{z1}$, $k_{z1}+k'_{z1}-k''_{z1}$, $k_{z1}-k'_{z1}+k''_{z1}$.

Таким образом, одной из особенностей взаимодействия волн в периодической структуре является комплексность коэффициентов W' и W , даже если не учитываются диссипативные процессы. Это приводит к особенностям в динамике процесса взаимодействия. Для правильного определения знаков действительных и мнимых частей W и W' знак показателя экспонент $\exp(\pm i\bar{k}d)$ и $\exp(\pm i\bar{k}d)$ следует выбирать одинаковым, если рассматривается процесс типа (14). Для случая (16) необходимо пользоваться системой динамических уравнений (9), а не (10) и выбирать разные знаки для первых гармоник. В этом случае выбор знака для второй гармоники безразличен, так как $\bar{k}d = \pi n$. Отметим, что неправильный выбор знаков приводит к неустойчивому решению уравнений связи.

Величина коэффициентов определяется двумя резонансными явлениями, которые специфичны для периодической среды. Это брэгговский резонанс на полном периоде структуры [8] и "нелинейный резонанс" [7].

Брэгговский резонанс приводит к тому, что нелинейные коэффициенты в периодической среде могут быть значительно больше (по модулю), чем в однородной. Сущность этого явления связана с тем, что на величину W и W' влияют значения коэффициентов полей A_2 и A'_2 , выражения для которых приведены в Приложении. Резонанс проявляется в том, что эти коэффициенты обращаются в бесконечность в тех точках, для которых

$$m'_{12} = 0 \quad (\text{или} \quad m_{12} = 0). \quad (18)$$

На рис. 1 кривые, удовлетворяющие условиям (18), показаны штрихпунктирной линией.

В соотношениях (17) к бесконечности стремится одна из величин f_s . Как показано в [8], это условия брэгговского резонанса на полном периоде структуры. Решения

приведенных соотношений расположены в запрещенных зонах, так как $(m'_{11} + m'_{22})/2 > 1$ (или $(m_1 + m_2)/2 > 1$), где законы синхронизма не выполняются. Вблизи границы зоны пропускания коэффициенты A_2 и A'_2 имеют конечные значения, величина которых зависит от близости точки резонанса и точки, удовлетворяющей условиям синхронизма и расположенной на границе зоны, т.е. $\bar{k} = 2\pi$ или $\bar{k}' = 0, \pi$. Так как решения уравнений (18) различны, максимумы нелинейных коэффициентов также будут иметь место при разных значениях частоты и волновых чисел. Физически это связано с зависимостью диэлектрической проницаемости полупроводника от частоты. В диэлектрической решетке максимумы W и W' совпадают, так как условие брэгговского резонанса следующее: $m'_{12} = m_{12} = 0$ (см. [8]). Наконец, отметим, что впервые возможность существенного увеличения коэффициента нелинейного взаимодействия показали авторы [9] для модельной задачи.

Вторым фактором, влияющим на величину коэффициентов W и W' , является обращение в нуль одной из величин k_s (при этом, как видно в (17), расходимостей не возникает). Отметим, что в пределе $k_s \rightarrow 0$ действительная часть второго множителя в формуле (17) равна нулю, а мнимая d_1 . Поэтому максимум будет иметь только или $\text{Re}W'$ ($\text{Re}W$), или $\text{Im}W'$ ($\text{Im}W$). Обращение в нуль k_s означает, что "суммарное поле" взаимодействующих волн не зависит от координаты z внутри слоев полупроводника, т.е. энергия этих волн, накапливаемая внутри указанных слоев, оказывается наибольшей для параметров, приводящих к условию $k_s = 0$. В результате величина взаимодействия оказывается тем больше, чем параметры волн ближе к указанному условию.

На рис. 2 представлены зависимости для случая синхронизма (14) (кривые I', I на рис. 1). Уменьшение величины k_s (примерно вдвое) приводит к убыванию $\text{Im}W'(\omega')$ и возрастанию $\text{Im}W(\omega)$. Максимум $\text{Re}W'(\omega')$ связан с брэгговским резонансом для первой гармоники. Уменьшение величины $\text{Re}W'(\omega')$ на краю зоны связано с "конкуренцией" двух резонансов. Для нелинейного коэффициента второй гармоники $W(\omega)$ в данном примере существенным оказался только брэгговский резонанс.

На рис. 3 показаны зависимости для синхронизма, определяемого соотношениями (16) (кривые $4', 4$ на рис. 1). Здесь максимумы, связанные с "нелинейным" резонансом, имеют зависимости $\text{Im}W'(\omega')$ и $\text{Im}W(\omega)$. От этого резонанса зависит увеличение крутизны кривых первой и второй гармоник на низкочастотном и высокочастотном концах. Однако резонансные частоты лежат относительно далеко от края зон, поэтому увеличение коэффициентов W и W' относительно невелико.

6. Заключение

Цель данной работы состоит в изучении нелинейного взаимодействия волн в слоисто-периодической сверхрешетке полупроводник-диэлектрик. С помощью формулы

Грина (2) получены динамические уравнения, в которых учтены нелинейные слагаемые в уравнениях движения и непрерывности, приводящие к нелинейному току в уравнениях Максвелла для полупроводниковых слоев. Кроме того, учтено, что нелинейные процессы имеют место не во всем пространстве сверхрешетки, а только в периодически расположенных слоях полупроводника.

Проведен анализ условий синхронизма для частот, находящихся вблизи плазменной частоты полупроводника, т.е. учтена частотная дисперсия диэлектрической проницаемости. Показано, что возбуждение второй гармоники может происходить как при взаимодействии первых пространственных гармоник, распространяющихся в одном направлении, так и при распространении их в противоположных направлениях. Последний вариант взаимодействия возможен именно в периодических структурах и ранее не был описан.

Выяснены физические причины, влияющие на амплитуду второй гармоники. Они связаны с брэгговским резонансом на периоде структуры и нелинейным резонансом, когда одна из величин $\pm 2k'_{z1}, \pm k_{z1}$ стремится к нулю. Брэгговский резонанс приводит к расходимости полей в запрещенной зоне. Поэтому величина нелинейного коэффициента взаимодействия зависит от близости края зоны пропускания к этой точке. Физически наличие резонанса означает, что время нелинейного взаимодействия как бы увеличивается. Нелинейный резонанс означает, что энергия взаимодействующих гармоник, запасаемая в полупроводниковых слоях, оказывается наибольшей в точке резонанса. Это и приводит к увеличению нелинейного коэффициента. "Конкуренция" между указанными двумя типами резонанса приводит к довольно сложной зависимости нелинейных коэффициентов от частоты.

Приложение

Компоненты передаточной матрицы:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 - \frac{k_{z2}\varepsilon_1}{k_{z1}\varepsilon_2} \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2; \\ m_{12} &= -i\frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_1}{k_{z1}} \sin k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 - i\frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_2}{k_{z2}} \cos k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2; \\ m_{21} &= -i\frac{c}{\omega} \frac{k_{z1}}{\varepsilon_1} \sin k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 - i\frac{c}{\omega} \frac{k_{z2}}{\varepsilon_2} \cos k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2; \\ m_{22} &= \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_2 - \frac{k_{z1}\varepsilon_2}{k_{z2}\varepsilon_1} \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_2. \end{aligned}$$

Выражения для полей:

$$\begin{aligned} E_{x1} &= -i\frac{c}{\omega\varepsilon_1} A_1(-k_{z1} \sin k_{z1}z + A_2 k_{z1} \cos k_{z1}z), \\ E_{x2} &= -i\frac{c}{\omega\varepsilon_2} A_1(-B_1 k_{z2} \sin k_{z2}z + B_2 k_{z2} \cos k_{z2}z), \\ H_{y1} &= A_1(\cos k_{z1}z + A_2 \sin k_{z1}z), \\ H_{y2} &= A_1(B_1 \cos k_{z2}z + B_2 \sin k_{z2}z), \end{aligned}$$

где

$$B_1 = \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_1 + \frac{k_{z1}\varepsilon_2}{k_{z2}\varepsilon_1} \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_1 + A_2 \left\{ \sin k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_1 - \frac{k_{z1}\varepsilon_2}{k_{z2}\varepsilon_1} \cos k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_1 \right\},$$

$$B_2 = \cos k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_1 - \frac{k_{z1}\varepsilon_2}{k_{z2}\varepsilon_1} \sin k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_1 + A_2 \left\{ \sin k_{z1}d_1 \sin k_{z2}d_1 + \frac{k_{z1}\varepsilon_2}{k_{z2}\varepsilon_1} \cos k_{z1}d_1 \cos k_{z2}d_1 \right\},$$

$$A_2 = i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_1}{k_{z1}} \frac{m_{11} - e^{-ikd}}{m_{12}}.$$

Список литературы

- [1] Б.Б. Кадомцев, В.И. Петвиашвили. ЖЭТФ, **43**, 2234 (1962).
- [2] А.А. Галеев, В.И. Карпман. ЖЭТФ, **44** (2), 592 (1963).
- [3] Х. Вильгельмссон, Я. Вейланд. *Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме* (М., Энергоиздат, 1981).
- [4] Ф. Хартман. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (М., Мир, 1970).
- [5] Н. Бломберген. *Нелинейная оптика* (М., Мир, 1966).
- [6] А.А. Булгаков, С.И. Ханкина, В.М. Яковенко. ФТТ, **22** (8), 2536 (1980).
- [7] Ф.Г. Басс, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов. *Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками* (М., Наука, 1989).
- [8] А.А. Bulgakov, S.A. Bulgakov, L. Vazquez. Phys. Rev. E, **58**, 7887 (1998).
- [9] В.Э. Пожар, Л.А. Чернозатонский. ФТТ, **27** (3), 682 (1985).
- [10] М. Борн, Э. Вольф. *Основы оптики* (М., Наука, 1973).
- [11] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (М., Наука, 1974).
- [12] В.Н. Цытович. *Нелинейные волны в плазме* (М., Наука, 1967).
- [13] N. Blombergen, A.I. Silvers. Appl. Phys. Lett., **17** (11), 483 (1970).

Редактор Л.В. Шаронова

Nonlinear interaction of the waves in semiconductor superlattice

A.A. Bulgakov, O.V. Shramkova

A.Ya. Usicov Institute
for Radiophysics and Electronics,
National Academy of Sciences of Ukraine,
61085 Kharkov, Ukraine

Abstract Nonlinear interaction of the waves in a periodic structure that was obtained by alternating semiconductor and dielectric layers has been studied. We showed that the translation symmetry of this structure incorporates a number of features peculiar to nonlinear interaction. Conditions for resonant interaction of the first and second harmonics have been analyzed. We first considered the excitation of the second harmonic arising due to interaction of the first space harmonics, propagating in the opposite directions. Explanation of an essential increase of the wave interaction near the boundary of the allowed band is given in the work.