

## Поверхностные поляритоны в композитных средах с временной дисперсией диэлектрической и магнитной проницаемостей

© Ю.И. Беспятых, А.С. Бугаев, И.Е. Дикштейн

Институт радиотехники и электроники Российской академии наук,  
141120 Фрязино, Московская обл., Россия

(Поступила в Редакцию 1 марта 2001 г.)

Обсуждается распространение электромагнитных волн в композитном материале, представляющем собой решетку проводящих стержней, заключенных в ферромагнитную непроводящую матрицу. Показано, что в определенном интервале частот и длин волн рассматриваемый композит может обладать свойствами "левой" среды. Исследованы области существования локализованных объемных и поверхностных электромагнитных волн, а также дисперсия поверхностных электромагнитных волн в толстых слоях композита.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-02-39009, 99-02-17404 и 01-02-16596), Польского комитета научных исследований и фонда МНТЦ (грант № 1522).

Создание новых композитов представляет большой физический и прикладной интерес, так как композитные среды могут обладать определенными свойствами, которые не наблюдаются у обычных веществ. В последнее время важные теоретические и экспериментальные результаты получены для композитов на основе проводящих материалов в диэлектрической немагнитной матрице. Под действием электромагнитного излучения периодические решетки проводящих элементов эквивалентны эффективной среде с временной дисперсией диэлектрической и магнитной проницаемостей, если длина электромагнитной волны во много раз превышает размеры элементов и постоянную решетку.

В работе [1] установлено, что трехмерная решетка из тонких прямолинейных проводящих стержней в длинноволновом пределе ведет себя аналогично электронной плазме в металле. Для плоской волны с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  диэлектрическая проницаемость электронной плазмы  $\varepsilon$  имеет вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\gamma)} \quad (1)$$

и в широком диапазоне длин волн не зависит от волнового вектора. Существенно, что  $\varepsilon(\omega) < 0$  при  $\omega < \omega_p$ ,  $\gamma = 0$ . Хотя обычно параметр затухания  $\gamma \ll \omega_p$ , плазменные волны в металлах наблюдаются лишь в ультрафиолетовом и видимом диапазонах частот, поскольку концентрация электронов  $n$ , плазменная частота  $\omega_p = (ne^2/4\pi m)^{1/2}$  и параметр затухания  $\gamma$  для металлов велики. Например, для алюминия  $\omega_p = 15$  eV,  $\gamma = 0.1$  eV. Авторы [1] показали, что в искусственных материалах из тонких проводящих проволок можно реально уменьшить среднюю концентрацию носителей тока и эффективную плазменную частоту на шесть порядков, а эффективную массу носителей тока увеличить на порядок по сравнению с эффективной массой электронов в объемном металле. При этом отношение  $\gamma/\omega_p$  останется достаточно малым (для алюминия  $\gamma/\omega_p \propto 0.01$ ), и плазменный

резонанс в отличие от случая массивного металла будет иметь место в СВЧ-диапазоне.

Периодические системы из круговых проводящих элементов различных типов (проволочные кольца, кольца с разрывом, спирали, слои в форме разорванных колец и т.п.), обладающие значительной эффективной магнитной проницаемостью, предложены и проанализированы в работах [2–6]. Для систем этого типа характерно наличие резонансной частоты поглощения электромагнитных волн, и дисперсия их эффективной магнитной проницаемости  $\mu(\omega)$  в области длинных волн описывается формулой

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma}, \quad (2)$$

где  $\omega_0$  — резонансная частота,  $\Gamma$  — параметр затухания,  $F$  — постоянная; все эти величины зависят от внутренней структуры и концентрации проводящих элементов. Как и поперечная диагональная компонента магнитной проницаемости однородного намагниченного изотропного ферромагнетика, магнитная проницаемость (2) вблизи резонанса со стороны высоких частот отрицательна. В работе [6] отмечалось, что, используя сочетания тонких проводящих прямолинейных стержней и перечисленных выше круговых элементов с большой индуктивностью и емкостью, можно создать композиты, эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости которых в некоторой полосе частот отрицательны. Это позволило бы, наконец, экспериментально обнаружить те необычные эффекты, которые были предсказаны в работах Пафомова [7] и Веселаго [8–10] еще в пятидесятых–шестидесятых годах прошлого столетия.

Работы [7–10] касаются в основном распространения однородных плоских электромагнитных волн в "правых" и "левых" средах и отражения их от границы раздела "правой" и "левой" сред. Однако важно знать также особенности спектра возбуждений, имеющих место в материалах с временной дисперсией общего вида, например

длинных объемных и поверхностных электромагнитных волн в плоскопараллельных слоях композитов.

В настоящей работе исследуется спектр поверхностных поляритонов в слое композитного материала, представляющего собой периодическую решетку проводящих стержней [1], помещенную в ферромагнитную матрицу.

Проанализируем дисперсию поверхностных электромагнитных волн в достаточно толстом слое композита, занимающем область пространства  $-L/2 \leq y \leq L/2$  и представляющем собой ферродиелектрическую матрицу с заключенной в нее простой кубической решеткой тонких проводящих или сверхпроводящих цилиндрических стержней, подобной решетке проводящих стержней в диэлектрической немагнитной матрице [1]. Если период решетки очень мал по сравнению с толщиной слоя, а также длиной и глубиной проникновения электромагнитной волны, то для описания высокочастотных свойств композита применимо континуальное приближение. Объемный процент проводящего материала незначителен, и тензор диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}$  совпадает с вычисленным в работе [1]

$$\hat{\epsilon} = \epsilon \delta_{ik}, \quad (3)$$

где величина  $\epsilon$  описывается формулой (1). При этом эффективные плазменная частота  $\omega_p$  и параметр затухания за счет омических потерь в проводниках  $\gamma$  выражаются через параметры проводящих стержней следующим образом:

$$\omega_p^2 = 2\pi c^2/a^2 \ln(a/r), \quad \gamma = 4a^2\omega_p^2/r^2\sigma, \quad (4)$$

$\sigma$  — проводимость,  $r$  — радиус стержней,  $a$  — период решетки,  $c$  — скорость света в вакууме. Отметим, что отношение  $\gamma/\omega_p$  обратно пропорционально объемной концентрации проводящего материала, поэтому ее нельзя слишком сильно уменьшать. Вообще говоря, для получения композитов с высокой добротностью в СВЧ-диапазоне предпочтительнее использовать сверхпроводники. Далее мы будем пренебрегать влиянием затухания в металле и ферромагнетике, считая его малым. Согласно расчету магнитной проницаемости решетки проводящих стержней в диэлектрической матрице [5], магнитная восприимчивость такого композита пропорциональна объемной концентрации металла. Поскольку мы предполагаем ее малой, эффективная магнитная проницаемость решетки проводящих элементов в ферромагнитной матрице практически не отличается от магнитной проницаемости матрицы. Таким образом, для слоя в касательном внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{n}_z$  при зависимости амплитуды возбуждения от времени  $t$  вида  $\exp(i\omega t)$

$$\epsilon = \frac{\Omega^2 - \Omega_p^2}{\Omega^2}, \quad (5)$$

а тензор магнитной проницаемости  $\hat{\mu}$  равен

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\nu & 0 \\ -i\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $\Omega = \omega/\omega_M$ ,  $\Omega_p = \omega_p/\omega_M$ ,  $\omega_M = 4\pi g M_0$ ,  $g > 0$  — гиромагнитное отношение,  $M_0$  — намагниченность насыщения магнитной матрицы,

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_0}{\Omega_0^2 - \Omega^2}, \quad \nu = \frac{\Omega}{\Omega^2 - \Omega_0^2},$$

$$\Omega_0 = H_0/(4\pi M_0). \quad (7)$$

Электромагнитное поле в композите и вне его удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbf{e}] &= -ik_0\mathbf{b}, & \nabla \cdot \mathbf{d} &= 0, \\ [\nabla \times \mathbf{h}] &= -ik_0\mathbf{d}, & \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$k_0 = \omega/c$ . На границе слоя выполняются условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического  $\mathbf{e}$  и магнитного  $\mathbf{h}$  полей и нормальных составляющих электрической  $\mathbf{d} = \hat{\epsilon}\mathbf{e}$  и магнитной  $\mathbf{b} = \hat{\mu}\mathbf{h}$  индукций. Ограничимся анализом  $TE$ -волны со структурой поля  $\{h_x, h_y, e_z\}$ , распространяющегося вдоль оси  $\mathbf{n}_x$ .

Будем искать решение системы уравнений Максвелла (8) совместно с граничными условиями на поверхности раздела сред, предполагая зависимость компоненты электрического поля  $e_z$  от координат  $x, y$  вида

$$e_z = \begin{cases} a_1 \exp(-ikx - q_0y), & y > L/2, \\ [a_2 \exp(q_1y) + a_3 \times \exp(-q_1y)] \exp(-ikx), & -L/2 \leq y \leq L/2, \\ a_4 \exp(-ikx + q_0y) & y < -L/2, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$q_0 = \sqrt{k^2 - k_0^2}, \quad q_1 = \sqrt{k^2 - k_0^2 \epsilon \mu_{\perp}}, \quad \mu_{\perp} = (\mu^2 - \nu^2)/\mu.$$

Выражение для магнитной индукции  $\mathbf{b}$  непосредственно следует из первого уравнения системы (8), а постоянные  $a_1, a_2, a_3, a_4$  определяются из граничных условий. Опуская простые выкладки, приведем дисперсионное соотношение для электромагнитных волн, локализованных вблизи слоя,

$$\begin{aligned} [q_1^2 + \mu_{\perp}^2 q_0^2 - (\nu/\mu)^2 k^2] \operatorname{sh}(q_1 L) \\ + 2\mu_{\perp} q_0 q_1 \operatorname{ch}(q_1 L) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mu^2 - \nu^2 \neq 0.$$

В предельном случае малых длин волн  $q_0 \cong q_1 \cong |k|$  и уравнение (10) описывает дисперсию волны Деймона-Эшбаха. Неравенство

$$k^2 > k_0^2 \quad (11)$$

представляет необходимое и достаточное условие отсутствия излучения.

Уравнение (10) является трансцендентным, поэтому решения его в общем виде могут быть найдены лишь численными методами.

С точки зрения спин-волновой электроники наибольший интерес представляет исследование поверхностных электромагнитных мод, амплитуда поля которых убывает в глубь слоя экспоненциально. В дополнение к (11) область существования поверхностных электромагнитных волн в плоскости  $k\Omega$  ограничена неравенством

$$k^2 > k_0^2 \epsilon \mu_{\perp}. \quad (12)$$

Если же последнее неравенство нарушено, то электромагнитная волна является объемной.

Для коротких волн или толстых слоев  $q_1 L \gg 1$ , так что дисперсионное соотношение (10) принимает простой вид

$$(q_1 + \mu_{\perp} q_0)^2 - (\nu/\mu)^2 k^2 = 0. \quad (13)$$

Поскольку левая часть уравнения (13) есть четная функция частоты  $\Omega$  и волнового числа  $k$ , дисперсионные кривые в полуплоскости  $k\Omega$  симметричны относительно оси ординат. После соответствующей перегруппировки членов и возведения правой и левой частей уравнения (13) в квадрат получаем биквадратное уравнение для определения зависимости  $k(\Omega)$

$$A_2 k^4 - A_1 k^2 - A_0 = 0, \quad (14)$$

где

$$A_2 = \mu_{\perp}^2 [4 - (\mu_{\perp} + 1/\mu)^2],$$

$$A_1 = 2k_0^2 \mu_{\perp} [2\mu_{\perp} (1 + \epsilon \mu_{\perp}) - (\epsilon + \mu_{\perp})(\mu_{\perp} + 1/\mu)],$$

$$A_0 = k_0^4 \mu_{\perp}^2 (\epsilon - \mu_{\perp})^2.$$

Одно из решений (14) не имеет физического смысла и является результатом возведения (13) в квадрат.

В случае  $k^2 \gg k_0^2$ ,  $|\epsilon \mu_{\perp}| \gg 1$

$$k^2 \cong k_M^2 \cong \frac{(\Omega^2 - \Omega_p^2)(\Omega^2 - \Omega_0^2)}{2(\Omega_0 + 1/2) \pm \Omega \operatorname{sgn} k},$$

$$k_M^2 = (\omega_M/c)^2, \quad \Omega_1 = \sqrt{\Omega_0(\Omega_0 + 1)}. \quad (15)$$

Знаки  $\pm$  в (15) соответствуют распространению поверхностной электромагнитной волны по нижней или верхней стороне слоя. Характер дисперсии коротких поверхностных волн зависит от величины нормированной эффективной плазменной частоты  $\Omega_p$ . В случае  $\Omega_p < \Omega_0 + 1/2$  поверхностная волна является прямой, а в случае  $\Omega_p > \Omega_0 + 1/2$  — обратной, т.е. с изменением знака диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  меняется знак групповой скорости поверхностной волны. Качественный вид областей существования локализованных поверхностных и объемных решений и дисперсии поверхностной электромагнитной моды в слое в зависимости от соотношения величин  $\Omega_p$ ,  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1 = \sqrt{\Omega_0(\Omega_0 + 1)}$ ,  $\Omega_2 = \Omega_0 + 1$  представлен на рис. 1–4.

Прямая линия  $I$  на рис. 1–4

$$|k| = k_0(\Omega) = k_M \Omega, \quad (16)$$

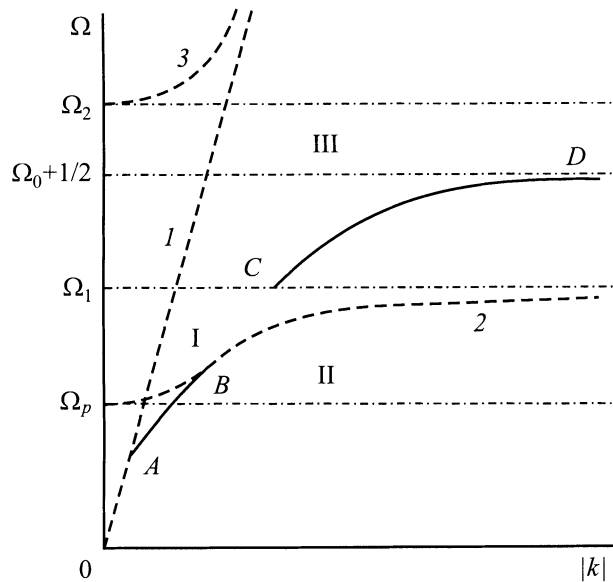


Рис. 1. Области существования локализованных объемных (I) и поверхностных (II, III) волн и дисперсионные кривые поверхностных электромагнитных волн (кривые AB и CD) при  $\Omega_p < \Omega_1$ .

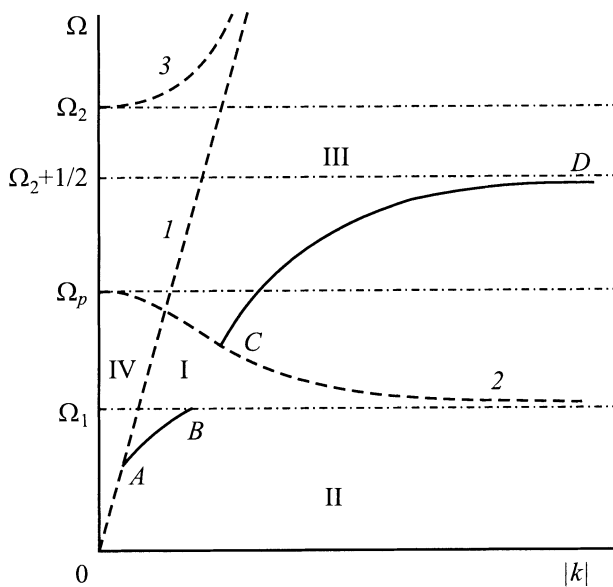
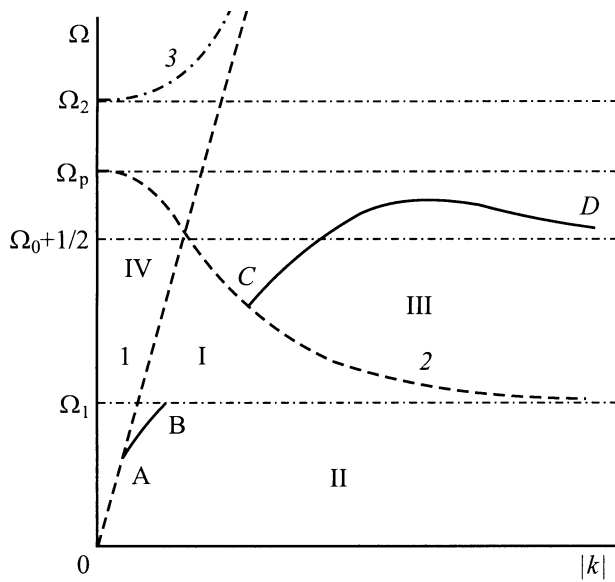


Рис. 2. Области существования локализованных объемных (I), поверхностных (II, III) и нелокализованных обратных (IV) волн и дисперсионные кривые поверхностных электромагнитных волн (кривые AB и CD) при  $\Omega_1 < \Omega_p < \Omega_0 + 1/2$ .

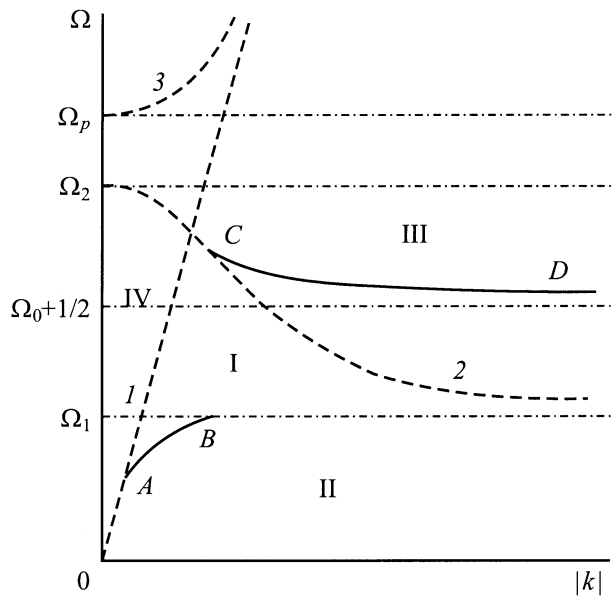
на которой  $q_0 = 0$ , разделяет локализованные и нелокализованные волновые решения, а кривые 2, 3

$$|k| = \kappa_1(\Omega) = k_M \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_p^2)(\Omega_2^2 - \Omega^2)/(\Omega_1^2 - \Omega^2)}, \quad (17)$$

точки которых удовлетворяют уравнению  $q_1 = 0$ , являются границами между областями существования волн поверхностного и объемного типов. Линия (17) дву-



**Рис. 3.** Области существования локализованных объемных (I), поверхностных (II, III) и нелокализованных обратных (IV) волн и дисперсионные кривые поверхностных электромагнитных волн (кривые  $AB$  и  $CD$ ) при  $\Omega_0 + 1/2 < \Omega_p < \Omega_2$ .



**Рис. 4.** Области существования локализованных объемных (I), поверхностных (II, III) и нелокализованных обратных (IV) волн и дисперсионные кривые поверхностных электромагнитных волн (кривые  $AB$  и  $CD$ ) при  $\Omega_p > \Omega_2$ .

связна, поскольку обратная функция  $\Omega(\kappa_1)$  находится из биквадратного уравнения и имеет две положительные ветви. Вследствие этого область существования объемных волн односвязна, а область существования поверхностной волны двусвязна. Верхняя ветвь (17) для нас несущественна, так как она целиком расположена в области нелокализованных решений.

В случае  $\Omega_p < \Omega_1$  (рис. 1) область существования объемных волн I ограничена слева прямой 1, снизу нижней ветвью  $\kappa_1(\Omega)$  (17) (кривая 2), а сверху — прямой  $\Omega = \Omega_1$ . Низкочастотная область существования поверхностных волн II расположена правее прямой 1 и ниже ветви  $\kappa_1(\Omega)$  (кривая 2), а высокочастотная III — правее прямой 1 и выше прямой  $\Omega = \Omega_1$ . В области II дисперсионная кривая поверхностной электромагнитной волны  $AB$  оканчивается на прямой  $|k| = \kappa_0(\Omega) = k_M \Omega$  в точке A с координатами

$$k = k_A = k_M \Omega_A, \quad \Omega = \Omega_A = \Omega_1 \Omega_p (\Omega_0 + \Omega_p^2)^{-1/2}, \quad (18)$$

а на нижней ветви кривой  $|k| = \kappa_1(\Omega)$  (кривая 2) в точке B с координатами

$$k = k_B = \kappa_1(\Omega_B), \quad \Omega = \Omega_B \quad (19)$$

непрерывно переходит в ветвь объемных волн, причем частота  $\Omega_B$  удовлетворяет уравнению

$$B_2 \Omega_B^4 - B_1 \Omega_B^2 + B_0 = 0,$$

$$B_2 = 1 + \Omega_2 + \Omega_p^2, \quad B_1 = \Omega_2^3 + (1 + 2\Omega_2^2)\Omega_p^2, \quad B_0 = \Omega_2^4 \Omega_p^2.$$

В области III ветвь поверхностных волн  $CD$  оканчивается на прямой  $\Omega = \Omega_1$  в точке C при значениях

$$|k| = k_C = k_M \Omega_1 \Omega_2^{1/2}, \quad \Omega = \Omega_C = \Omega_1. \quad (20)$$

На линии  $\Omega = \Omega_1$  величина  $\mu_{\perp}$  имеет особенность. Вследствие этого при  $\Omega \rightarrow \Omega_1$  глубина проникновения поверхностной волны в композит  $q_1^{-1} \rightarrow 0$ , и длинноволновое приближение в окрестности линии  $\Omega = \Omega_1$  при любых значениях параметра  $\Omega_p$  оказывается неприменимым. Из (15) видно, что при  $|k| \rightarrow \infty$  частота волны  $\Omega$  стремится к значению  $\Omega = \Omega_0 + 1/2$ , совпадающему с верхней границей спектра поверхностных волн в ферромагнитном слое без проводящих элементов. Однако при  $|k| \propto 2\pi/a$  необходимо учитывать эффекты периодичности системы. И в области II, и в области III поверхностные волны являются прямыми при любых значениях  $k$ .

Если значения  $\Omega_p$  находятся в интервале  $\Omega_1 < \Omega_p < \Omega_2$  (рис. 2, 3), то область объемных локализованных электромагнитных волн на плоскости  $k\Omega$  ограничена слева и снизу прямыми  $|k| = \kappa_0(\Omega) - k_M \Omega$  (линия 1) и  $\Omega = \Omega_1$ , а сверху — нижней ветвью 2 кривой  $|k| = \kappa_1(\Omega)$ . Остальная двусвязная часть плоскости  $k\Omega$  со значениями  $|k|$  правее прямой 1 (области II, III) есть зона возможного существования поверхностных электромагнитных волн. Дисперсии поверхностных волн в области II (кривая  $AB$ ) является положительной. Точка окончания A данной кривой имеет координаты (18), а точка окончания B, в которой поверхностная волна переходит в объемную, определяется формулами (20). В области III дисперсионная ветвь поверхностных волн имеет окончание в точке C с координатами (19) и с ростом  $|k|$  асимптотически приближается к прямой

$\Omega = \Omega_0 + 1/2$ . При  $\Omega_p < \Omega_0 + 1/2$  поверхностные волны являются прямыми (рис. 2). Если же  $\Omega_p > \Omega_0 + 1/2$  (рис. 3), то с ростом  $|k|$  дисперсия поверхностных волн может становиться отрицательной.

При  $\Omega_p > \Omega_2$  (рис. 4) области существования локализованных объемных и поверхностных решений в принципе те же, что и в предыдущем случае. Поверхностные волны в нижней зоне (кривая АВ) также существуют и являются прямыми волнами. Точки окончания дисперсионной кривой поверхностных волн АВ описываются теми же формулами, что и при  $\Omega_1 < \Omega_p < \Omega_2$ . Однако с ростом  $\Omega_p$  дисперсионная кривая АВ все более приближается к линии  $I$   $|k| - \kappa(\Omega)$  и стягивается в точку пересечения прямых  $I$  ( $q_0 = 0$ ) и  $\Omega = \Omega_1$  с координатами

$$|k| = k_M \Omega_1, \quad \Omega = \Omega_1, \quad (21)$$

вблизи которой длинноволновое приближение некорректно. В верхней зоне III поверхностные волны являются обратными; дисперсионная ветвь поверхностной волны непрерывно переходит в ветвь объемных волн в точке, определяемой формулой (19).

Высокочастотная ветвь поверхностных поляритонов, описанная в работе [11], в рассматриваемой системе отсутствует, поскольку электрической поляризуемостью ферромагнитной матрицы мы пренебрегали. Она будет иметь место, если учесть диэлектрическую проницаемость ферромагнетика  $\varepsilon_0 > 1$ . Однако для этого следует, по-видимому, предварительно рассчитать эффективную диэлектрическую проницаемость композита.

Очень важно, что для данного композита может существовать область нелокализованных объемных решений в плоскости  $k\Omega$  (область IV на рис. 2–4), где одновременно выполнены неравенства  $\varepsilon < 0$ ,  $\mu_{\perp} < 0$ ,  $k^2 < k_0^2$ ,  $k^2 < k_0^2 \varepsilon \mu_{\perp}$ . Нетрудно показать, что достаточным условием для этого является неравенство

$$\Omega_p > \Omega_1. \quad (22)$$

В данной области частот и волновых чисел композит ведет себя как "левая" среда, и направление фазовой скорости объемной электромагнитной волны в нем противоположно направлению групповой скорости.

Таким образом, взаимодействие колебаний намагниченности с плазменными колебаниями приводит к появлению в спектре длинноволновых возбуждений композитного слоя дополнительной ветви поверхностных электромагнитных волн. В отличие от чисто ферромагнитного слоя в композите поверхностные электромагнитные волны в зависимости от величины плазменной частоты (и связанного с ней знака эффективной диэлектрической проницаемости) могут быть не только прямыми, но также обратными и смешанными.

Отметим также, что анализируемый нами композит при достаточно либеральных условиях для параметров проводящих элементов будет обладать в некотором диапазоне частот свойствами "левой" среды. Главное

преимущество этого композита перед композитом, предложенным авторами [6], состоит в том, что для его изготовления можно использовать планарную технологию. Например, для наблюдения нарушения закона Снеллиуса пригодны многослойные структуры из чередующихся пленок железо-иттриевого граната и двумерных проводящих решеток, полученных методом фотолитографии. Основные трудности при этом, скорее всего, будут связаны с подбором оптимальных параметров проводящих элементов, обеспечивающих приемлемое затухание электромагнитных волн, и с необходимостью иметь объемную систему достаточно больших размеров.

Хотя выше обсуждались волны в композите с трехмерной кубической решеткой проводящих элементов, полученные результаты справедливы и для композитов с двумерной решеткой проводящих стержней, ориентированных параллельно оси  $z$ .

## Список литературы

- [1] J.B. Pendry, A.J. Holden, W.J. Stewart, I. Youngs. Phys. Rev. Lett. **76**, 4773 (1996).
- [2] М.В. Костин, В.В. Шевченко. РЭ **33**, 1526 (1988).
- [3] М.В. Костин. РЭ **35**, 424 (1990).
- [4] М.В. Костин, В.В. Шевченко. РЭ **37**, 1992 (1992).
- [5] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, W.J. Stewart. IEEE Trans. Microwave Theory Techniq. **47**, 2075 (1999).
- [6] D.R. Smith, Willie J. Padilla, D.C. Vier, S.C. Nemat-Nasser, S. Schultz. Phys. Rev. Lett. **84**, 4184 (2000).
- [7] В.Е. Пафомов. ЖЭТФ **36**, 1853 (1959).
- [8] В.Г. Веселаго. ФТТ **8**, 3571 (1966).
- [9] В.Г. Веселаго, П.В. Глушков, А.М. Прохоров. РЭ **12**, 1220 (1967).
- [10] В.Г. Веселаго. УФН **92**, 517 (1967).
- [11] М.И. Каганов, Т.И. Шалаева. ЖЭТФ **96**, 2185 (1989).