

Квазисолитонные режимы распространения двухкомпонентных акустических видеоимпульсов в парамагнитном кристалле

© С.В. Воронков, С.В. Сазонов

Калининградский государственный технический университет,
236000 Калининград, Россия

E-mail авторов: nst@alg.kaliningrad.ru

(Поступила в Редакцию 26 марта 2001 г.)

Проведено теоретическое исследование нелинейного распространения продольно-поперечных акустических импульсов длительностью до одного периода колебаний (видеоимпульсов) в низкотемпературном парамагнитном кристалле параллельно внешнему магнитному полю. В качестве парамагнитных вкраплений рассмотрены ионы с эффективным спином $S = 1/2$. Показано, что в результате спин-фононного взаимодействия двухкомпонентные акустические импульсы способны распространяться в виде мощных солитоноподобных образований. Определены условия, при которых формируются экспоненциально локализованные дозвуковые и распространяющиеся быстрее поперечного звука рациональные солитоны с вращающейся плоскостью поляризации у поперечной компоненты.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 00-02-17436а).

В последние полтора десятилетия была проведена серия экспериментов по генерации лазерных импульсов длительностью порядка одного периода колебаний [1–3] (электромагнитных видеоимпульсов), что повлекло за собой выход теоретических работ, в которых исследовались различные аспекты взаимодействия таких импульсов с веществом (см., например, обзор [4]). Такие нестационарные когерентные эффекты, как фотонное эхо и самоиндуцированная прозрачность, в случае воздействия на среду видеоимпульсов обладают рядом особенностей [5,6] по сравнению с соответствующими явлениями в случае резонансных квазимонохроматических импульсов, имеющих ярко выраженную несущую частоту. По причине отсутствия данной частоты у электромагнитных видеоимпульсов при исследовании взаимодействия последних с веществом не используется приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз.

Следом за электромагнитными во многих лабораториях были генерированы акустические видеоимпульсы пикосекундной длительности [7–9]. После данных экспериментов стали выходить теоретические работы, связанные с распространением таких импульсов в различных средах. Были рассмотрены различные солитонные режимы [10–13] отдельно для продольных и поперечных акустических импульсов. В [14] показано, что при возбуждении примесных парамагнитных ионов последовательностью поперечных акустических видеоимпульсов в кристалле способны генерироваться сигналы акустического эха как поперечной, так и продольной структуры. Наличие у акустического импульса в твердом теле двух составляющих (продольной и поперечной) может выявить некоторые особенности, характерные только для двухкомпонентных акустических солитонов.

В связи с изложенным представляет интерес исследование квазисолитонных режимов распространения продольно-поперечных (двухкомпонентных) акустических видеоимпульсов в кристаллах с парамагнитными

примесями, чему и посвящена настоящая работа. Решения в виде локализованных бегущих видеоимпульсов будем иногда называть солитонами, вкладывая в это понятие обобщенный смысл, т.е. не подразумевая обязательно их упругое взаимодействие с себе подобными.

В качестве парамагнитных примесей рассмотрим ионы с эффективным спином $S = 1/2$ (крамерсовские дублеты), помещенные во внешнее магнитное поле \mathbf{B} . Такими, например, являются парамагнитные ионы Co^{2+} в матрице кубического кристалла MgO [15].

Следуя [6,14,16], ниже будем считать выполненным условие

$$\omega_0 \tau_p \ll 1, \quad (1)$$

где ω_0 – частота зеемановского расщепления крамерсовского дублета, τ_p – характерный временной масштаб видеоимпульса.

Заметим, что в [17] исследованы нерезонансно взаимодействующие с парамагнитными ионами продольно-поперечные солитоноподобные акустические импульсы, длительность τ_p которых удовлетворяет условию $\omega_0 \tau_p \gg 1$, противоположному (1).

Неравенство (1) можно назвать условием спектрального перекрытия, так как, согласно (1), спектральная ширина видеоимпульса $\delta\omega \sim \tau_p^{-1} \gg \omega_0$. Таким образом, в спектре импульса содержатся Фурье-компоненты, вызывающие резонансные квантовые переходы между зеемановскими подуровнями парамагнитных ионов. Поэтому возбуждение последних при выполнении (1) может быть достаточно сильным.

1. Самосогласованная система волновых и материальных уравнений

Условно (1) могут удовлетворить частота зеемановского расщепления $\omega_0 \sim 10^{10} \text{ s}^{-1}$ и длительность акустического видеоимпульса $\tau_p \sim 10^{-11} \text{ s}$. Характерный пространственный размер таких импульсов

$l \simeq a\tau_p$, где a — скорость звука в твердом теле. Взяв $a \sim 5 \cdot 10^5$ см/с [18], получим $l \sim 5 \cdot 10^{-6}$ см, что примерно на два порядка превышает постоянную кристаллической решетки $h \sim 5 \cdot 10^{-8}$ см. Поэтому далее пространственной акустической дисперсией, существенной для импульсов меньших длительностей [9,10,12,13,17], будем пренебрегать. Для эффективного взаимодействия акустических импульсов со спиновой подсистемой в виде крамерсовских дублетов существенной должна быть начальная разность населенностей подуровней. Это накладывает ограничение на температуру парамагнитного образца [13] $T < \hbar\omega_0/k_B$, где \hbar и k_B — постоянные Планка и Больцмана соответственно. При $\omega_0 \sim 10^{10}$ с $^{-1}$ имеем $T < 0.1$ К, что соответствует сверхнизким температурам.

Пусть акустический импульс распространяется в кубическом кристалле вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{B} параллельно одной из осей четвертого порядка (оси z). Гамильтониан спиновой подсистемы, взаимодействующей с деформациями решетки, запишем в виде [12,18]

$$\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_{int}, \quad (2)$$

где

$$\hat{H}_s = \sum_j \hbar\omega_0 \hat{S}_z^j, \\ \hat{H}_{int} = \sum_j \frac{\hbar\omega_0}{g} \{F_{11} + \mathcal{E}_{zz} \hat{S}_z^j + F_{44}(\mathcal{E}_{xz} \hat{S}_x^j + \mathcal{E}_{yz} \hat{S}_y^j)\}. \quad (3)$$

Здесь $\hat{S}_\alpha^j \equiv \hat{S}_\alpha(\mathbf{r}_j)$ ($\alpha = x, y, z$) — спиновые операторы j -го парамагнитного иона, пропорциональные матрицам Паули $\hat{\sigma}_\alpha$: $\hat{S}_\alpha^j = \hat{\sigma}_\alpha/2$ ($\alpha = x, y, z$), \mathbf{r}_j — радиус-вектор j -го парамагнитного иона, $\mathcal{E}_{ij} = (\partial U_i/\partial x_j + \partial U_j/\partial x_i)/2$ — компоненты линейной части тензора деформации (в нашем случае $\mathcal{E}_{zz} = \partial U_z/\partial z$, $\mathcal{E}_{xz} = 0.5\partial U_x/\partial z$, $\mathcal{E}_{yz} = 0.5\partial U_y/\partial z$), U_i ($i = x, y, z$) — составляющие вектора \mathbf{U} смещений узлов кристаллической решетки, F_{11} и F_{44} — продольная и поперечная компоненты тензора спин-фононной связи соответственно (здесь применены обозначения Фохта [18]: $xx \rightarrow 1$, $yy \rightarrow 2$, $zz \rightarrow 3$, $yz \rightarrow 4$, $xz \rightarrow 5$, $xy \rightarrow 6$), частота зеemannовского расщепления ω_0 следующим образом выражается через g -фактор Ланде, магнетон Бора μ_B и величину внешнего магнитного поля: $\omega_0 = g\mu_B B/\hbar$; суммирование в (3) ведется по всем парамагнитным примесям в кристалле.

Спин-фононное взаимодействие в рассматриваемом нами случае спина $S = 1/2$ обусловлено модуляцией компонент тензора Ланде полем деформации акустического импульса [10,12,18]. Поскольку при $t \rightarrow -t$ $\hat{S}_\alpha^j \rightarrow -\hat{S}_\alpha^j$ ($\alpha = x, y, z$), $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ ($\omega_0 \rightarrow -\omega_0$), гамильтониан (3) инвариантен относительно обращения времени. Данное требование обеспечивает наличие перед константами спин-фононной связи в (3) множителя $\sim \omega_0$.

Далее примем полуклассический подход, согласно которому динамику спиновой подсистемы будем описывать уравнениями квантовой механики, а поле деформаций —

классическим образом. Для этого дополним (2), (3) классическим гамильтонианом акустического поля

$$H_a = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{\rho} + \lambda_{11} \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 + \lambda_{44} \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} d^3\mathbf{r}, \quad (4)$$

где p_j ($j = x, y, z$) — составляющие вектора плотности импульса узлов решетки, ρ — средняя плотность кристалла, λ_{11} и λ_{44} — компоненты тензора модулей упругости второго порядка; интегрирование в (4) ведется по всему объему кристалла.

Исходя из полуклассического подхода [12,17], запишем для динамических переменных упругого поля уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\delta \tilde{H}}{\delta \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\delta \tilde{H}}{\delta \mathbf{U}}, \quad (5)$$

где $\tilde{H} = H_a + \langle \hat{H}_{int} \rangle$, $\langle \dots \rangle$ — операция квантового усреднения.

Для применения (5) $\langle \hat{H}_{int} \rangle$ удобно представить в виде

$$\langle \hat{H}_{int} \rangle = \int \frac{n\hbar\omega_0}{g} \left\{ F_{11} \mathcal{E}_{zz} \langle \hat{S}_z(\mathbf{r}) \rangle + F_{44} (\mathcal{E}_{xz} \langle \hat{S}_x(\mathbf{r}) \rangle + \mathcal{E}_{yz} \langle \hat{S}_y(\mathbf{r}) \rangle) \right\} d^3\mathbf{r}. \quad (6)$$

Здесь $n = \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ — концентрация парамагнитных примесей, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ — дельта-функция Дирака, $\langle \hat{S}_\alpha(\mathbf{r}) \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{S}_\alpha)$ ($\alpha = x, y, z$), $\hat{\rho}$ — оператор плотности спиновой подсистемы, подчиняющийся квантовому уравнению Лиувилля

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (7)$$

Используя (2)–(7), получим

$$\frac{\partial^2 \Omega_\perp}{\partial t^2} - a_\perp^2 \frac{\partial^2 \Omega_\perp}{\partial z^2} = \frac{n\hbar\omega_0^2}{\rho g^2} F_{44}^2 \frac{\partial^2 S_\perp}{\partial z^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_\parallel}{\partial t^2} - a_\parallel^2 \frac{\partial^2 \Omega_\parallel}{\partial z^2} = \frac{n\hbar\omega_0^2}{\rho g^2} F_{11}^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial S_\perp}{\partial t} = i(\omega_0 + \Omega_\parallel) S_\perp - i\Omega_\perp W, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \text{Im}(\Omega_\perp^* S_\perp), \quad (10)$$

где $\Omega_\perp = (\omega_0 F_{44}/g)(\mathcal{E}_{xz} + i\mathcal{E}_{yz})$, $\Omega_\parallel = (\omega_0 F_{11}/g)\mathcal{E}_{zz}$, $a_\perp = \sqrt{\lambda_{44}/\rho}$, $a_\parallel = \sqrt{\lambda_{11}/\rho}$ — скорости поперечного и продольного звука соответственно, динамические переменные S_\perp (поперечный магнитный момент) и W (продольный магнитный момент, взятый с обратным знаком, или инверсия) определяются через элементы матрицы плотности выражениями $S_\perp = \rho_{12}$, $W = (\rho_{22} - \rho_{11})/2$ ($-1/2 \leq W \leq 1/2$).

Из (10) видно, что поперечная компонента деформации при распространении импульса вдоль магнитного поля вызывает квантовые переходы внутри крамеровских дублетов, продольная же компонента модулирует частоту данных переходов.

Дальнейшее изложение основано на анализе самосогласованной системы волновых и материальных уравнений (7)–(10).

2. Укороченные волновые уравнения

Из первого уравнения (10) следует, что $S_{\perp} \sim \Omega_{\perp} \tau_p$. Тогда отношение правой части (8) к одному из слагаемых левой части $\varepsilon \sim (n\hbar\omega_0 F_{44}^2 / g^2 \rho a^2)(\omega_0 \tau_p)$. Полагая $n \sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $\omega_0 \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $F_{44}/g \sim 10^2$ [18], $\rho \sim 5 \text{ г/см}^3$, $a \sim 3 \cdot 10^5 \text{ см/с}$, получим $\varepsilon \sim 10^{-7} \cdot \omega_0 \tau_p \ll 1$ (см. также (1)). Аналогичный вывод можно сделать и применительно к уравнению (9). В этом случае в (8), (9) можно использовать приближение однонаправленного распространения (или приближение медленно меняющегося профиля в сопутствующей системе координат) [19], что и будет сделано далее.

Для решения системы (10) перепишем последнюю в матричной форме

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = i\hat{\mathbf{A}}\mathbf{R}, \quad (11)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} S_{\perp}/\sqrt{2} \\ S_{\perp}^*/\sqrt{2} \\ W \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \omega_0 + \Omega_{\parallel} & 0 & -\Omega_{\perp}/\sqrt{2} \\ 0 & -(\omega_0 + \Omega_{\parallel}) & \Omega_{\perp}^*/\sqrt{2} \\ -\Omega_{\perp}^*/\sqrt{2} & \Omega_{\perp}/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Из (10)–(12) следует, что квадрат длины вектора Блоха $\mathbf{R}^2 = |S_{\perp}|^2 + W^2$ является интегралом движения.

Как видно из первого уравнения (10), при условии (1) в силу ограниченности значений $|S_{\perp}|$ и W должно выполняться одно из неравенств

$$|\Omega_{\perp}|/\omega_0 \gg 1, \quad \Omega_{\parallel}/\omega_0 \gg 1 \quad (13)$$

или оба одновременно (в следующем пункте будут разобраны все возможные случаи). Тогда можно искать решение (10) методом последовательных приближений по ω_0 . Кроме того, согласно (12) и (13), уравнения (11) представляют собой систему с большими переменными коэффициентами, которая, следовательно, может быть приближенно решена методом ВКБ [20,21]. В настоящей работе воспользуемся другим методом, приводящим к цели быстрее, нежели ВКБ [22]. При этом конечные результаты, полученные обоими методами, оказываются идентичными. Вначале непосредственной проверкой

убеждаемся, что условие [23]

$$\int_{t_0}^t [\hat{\mathbf{A}}(t), \hat{\mathbf{A}}(t')] dt' = 0 \quad (14)$$

не выполняется.

Поэтому решение (11) не может быть записано в виде матричной экспоненты, действующей на начальный вектор $\mathbf{R}(t_0)$ [23]. Однако неравенство (1) позволяет формально рассмотреть предел $t \rightarrow t_0$. Тогда за время $\Delta t = t - t_0 \rightarrow 0$ элементы матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ не успевают сильно измениться и $\hat{\mathbf{A}}(t) \approx \hat{\mathbf{A}}(t')$ ($t_0 \leq t' \leq t$). Следовательно, можно говорить о приближенном выполнении (14) и

$$\mathbf{R}(t) = \hat{U}(t, t_0)\mathbf{R}(t_0), \quad (15)$$

где оператор эволюции [22]

$$\hat{U}(t, t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ \|\hat{\mathbf{A}}\| \rightarrow \infty}} \exp\left(i \int_{t_0}^t \hat{\mathbf{A}}(t') dt'\right), \quad (16)$$

$\|\hat{\mathbf{A}}\|$ – норма матрицы $\hat{\mathbf{A}}$.

Если все собственные значения матрицы $\hat{\theta} \equiv \int_{t_0}^t \hat{\mathbf{A}}(t') dt'$ различны, то для вычисления экспоненты в (16) можно воспользоваться формулой Сильвестра [24]

$$\exp(i\hat{\theta}) = \sum_j \prod_{k \neq j} \frac{\hat{\theta} - \lambda_k \hat{I}}{\lambda_j - \lambda_k} \exp(i\lambda_j), \quad (17)$$

где \hat{I} – единичная матрица, $\{\lambda_k\}$ – множество собственных значений $\hat{\theta}$, определяемых из уравнения $\det(\hat{\theta} - \lambda \hat{I}) = 0$. Полагая в пределе $\Delta t \rightarrow 0$ $\hat{\theta} = \int_{t_0}^t \hat{\mathbf{A}} dt' \approx \hat{\mathbf{A}} \Delta t$, $\lambda \approx p \Delta t \approx \int_{t_0}^t p dt'$, получим $\det(\hat{\theta} - \lambda \hat{I}) = (\Delta t)^3 \det(\hat{\mathbf{A}} - p \hat{I}) = 0$. Таким образом, если $\{p_j\}$ – множество собственных значений матрицы $\hat{\mathbf{A}}$, то в пределе $\Delta t \rightarrow 0$, $\|\hat{\mathbf{A}}\| \rightarrow \infty$ множество $\{\lambda_j\} = \left\{ \int_{t_0}^t p_j dt' \right\}$ образует спектр собственных значений матрицы $\hat{\theta} = \int_{t_0}^t \hat{\mathbf{A}} dt'$.

Суммируя изложенное выше и используя (17), запишем оператор эволюции (16) в виде

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_j \exp\left(i \int_{t_0}^t p_j dt'\right) \prod_{k \neq j} \frac{\hat{\mathbf{A}} - p_k \hat{I}}{p_j - p_k}, \quad (18)$$

где суммирование ведется по всем собственным значениям матрицы $\hat{\mathbf{A}}$.

В нашем случае матрица $\hat{\mathbf{A}}$ эрмитова, поскольку она имеет вещественные собственные значения: $p_1 = 0$, $p_2 = -p_3 = \sqrt{\Omega_{\parallel}^2 + |\Omega_{\perp}|^2}$ (здесь в нулевом приближении мы пренебрегли ω_0). Тогда (18) примет вид

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{I} - 2 \frac{\hat{\mathbf{A}}^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{\hat{\mathbf{A}}}{\Omega} \sin \theta, \quad (19)$$

где

$$\Omega = \sqrt{\Omega_{\parallel}^2 + |\Omega_{\perp}|^2}, \quad \theta = \int_{-\infty}^t \Omega dt'. \quad (20)$$

Здесь мы формально положили $t_0 = -\infty$, считая, что основная динамика (изменение \mathbf{R} под действием Ω_{\perp} и Ω_{\parallel}) происходит за короткие времена $\Delta t \sim \tau_p$ (поэтому при $t_0 \rightarrow -\infty$ $\Omega_{\parallel}, \Omega_{\perp} \rightarrow 0$).

Учитывая, что до импульсного воздействия (при $t = -\infty$) $W = W_{\infty}$, $S_{\perp} = S_{\perp}^* = 0$, с помощью (15) и (19) найдем

$$S_{\perp} = -iW_{\infty} \frac{\Omega_{\perp}}{\Omega} \sin \theta + 2W_{\infty} \frac{\Omega_{\parallel}\Omega_{\perp}}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (21)$$

$$W = W_{\infty} \left(1 - 2 \frac{|\Omega_{\perp}|^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (22)$$

Полагая в (21), (22) $\Omega_{\parallel} = 0$, придем к соответствующим решениям, найденным для случая поперечных электромагнитных импульсов в [25].

Представим Ω_{\perp} в виде

$$\Omega_{\perp} = F \exp(i\phi), \quad (23)$$

где F — вещественная амплитуда, ϕ — фаза, определяющая вращение плоскости поляризации поперечной компоненты.

Подстановка (21) в первое уравнение (10), а затем получившегося выражения и (22) в правые части (8) и (9) после использования приближения однонаправленного распространения приводит с учетом (23) к укороченной системе уравнений для динамических параметров акустического импульса

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \mu_{\perp} W_{\infty} (\omega_0 + \Omega_{\parallel}) \frac{F}{\Omega} \sin \theta, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\mu_{\perp} W_{\infty} \cos \theta, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \Omega_{\parallel}}{\partial z} - \alpha \frac{\partial \Omega_{\parallel}}{\partial \tau} = -2\mu_{\parallel} W_{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{|\Omega_{\perp}|^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (26)$$

где $\tau = t - z/a_{\perp}$, $\mu_{\perp} = n\hbar\omega_0^2 F_{44}^2 / (2g^2 \rho a_{\perp}^3)$, $\mu_{\parallel} = n\hbar\omega_0^2 F_{11}^2 / (2g^2 \rho a_{\parallel}^2 a_{\perp})$, $\alpha = (a_{\perp}/2)(1/a_{\perp}^2 - 1/a_{\parallel}^2)$. При получении (23) учтено, что в силу (13) $\omega_0 \Omega_{\parallel} / \Omega^2 \ll 1$. В отсутствие продольной составляющей ($\Omega_{\parallel} = \mu_{\parallel} = 0$) $\Omega = F = \partial\theta/\partial\tau$ (см. (20)). Тогда из (24) получаем уравнение синус-Гордона для поперечной компоненты импульса

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \tau} = \mu_{\perp} \omega_0 W_{\infty} \sin \theta.$$

Соответствующие солитоны с вращающейся плоскостью поляризации рассмотрены в [25,26]. Здесь же нашей задачей является исследование более общей системы (23), (24) (или (24)–(26)), учитывающей динамику и продольной компоненты акустического видеоимпульса.

3. Поперечно-продольные солитоны

Будем искать решения для Ω_{\parallel} и F в виде стационарных бегущих импульсов. В соответствии с этим запишем $\Omega_{\parallel} = \Omega_{\parallel}(\xi)$, $F = F(\xi)$, где $\xi = t - z/v = \tau - (1/v - 1/a_{\perp})z$. Очевидно, v имеет смысл скорости распространения импульса. Тогда, полагая, что при $\xi \rightarrow \pm\infty$ Ω_{\parallel} и F исчезают со всеми производными, из (24) и (26) будем иметь

$$\dot{F} = \beta_{\perp} (\omega_0 + \Omega_{\parallel}) (F/\Omega) \sin \theta,$$

$$\Omega_{\parallel} = -\beta_{\parallel} (F/\Omega)^2 \sin^2(\theta/2), \quad (27)$$

где $\beta_{\perp} = -\mu_{\perp} W_{\infty} (1/v - 1/a_{\perp})^{-1}$, $\beta_{\parallel} = -2\mu_{\parallel} W_{\infty} \times (1/v - 1/a_{\perp} + \alpha)^{-1}$, а точка над F обозначает производную по ξ .

Рассмотрим вначале ситуацию, когда выполняется только первое условие (13), т.е. $\omega_0^2, \Omega_{\parallel}^2 \ll |\Omega_{\perp}|^2 = F^2$. Это не означает, что Ω_{\parallel} можно пренебречь вовсе. Ω_{\parallel} и ω_0 могут быть сравнимы по величине и Ω_{\parallel} способна оказывать заметное влияние на динамику процесса распространения акустического видеоимпульса (см. (24) и первое уравнение (27)). По причине того, что $|\Omega_{\perp}| \gg \Omega_{\parallel}$, солитоны, рассмотренные в настоящем разделе, можно назвать поперечно-продольными видеоимпульсами. В принятых предположениях $\Omega = \dot{\theta} \approx F$ и $\Omega_{\parallel} \approx -\beta_{\parallel} \sin^2(\theta/2)$, а первое уравнение (27) примет вид

$$\ddot{\theta} = \sigma \sin \theta + \nu \sin 2\theta. \quad (28)$$

Здесь $\sigma = \beta_{\perp} (\omega_0 - \beta_{\parallel}/2)$, $\nu = \beta_{\perp} \beta_{\parallel} / 4$.

Будем считать, что до импульсного воздействия квантовая подсистема находилась в состоянии термодинамического равновесия, т.е. $W_{\infty} = -|W_{\infty}| = -0.5 \text{ th}(\hbar\omega_0/2k_B T)$.

Тогда уравнение (28) (см. также (25) и второе уравнение (27)) имеет два возможных решения в виде уединенных бегущих импульсов. Рассмотрим их отдельно.

1) $\sigma > 0$, $\beta_{\perp} > 0$. В этом случае

$$F = \dot{\theta} = \frac{\Omega_{\perp m} \text{ch } \xi}{1 + \lambda^2 \text{sh}^2 \xi}, \quad \Omega_{\parallel} = -\frac{\Omega_{\parallel m}}{1 + \lambda^2 \text{sh}^2 \xi}, \quad (29)$$

$$\phi = \varkappa z + \frac{2\kappa\nu\tau_p}{\sqrt{1-\lambda^2}} \text{Arcth} \left(\frac{\text{th } \xi}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right). \quad (30)$$

Здесь $\xi = (t - z/v)/\tau_p$, $\lambda = \Omega_{\perp m} \tau_p / 2 < 1$ (см. второе уравнение (29)), $\varkappa = -\mu_{\perp} W_{\infty} = \mu_{\perp} |W_{\infty}|$, скорость v , а также характерные амплитуды поперечной $\Omega_{\perp m}$ и продольной $\Omega_{\parallel m}$ компонент определяются через длительность τ_p импульса соотношениями

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a_{\perp}} + \omega_0 \mu_{\perp} |W_{\infty}| \tau_p^2, \quad (31)$$

$$\Omega_{\perp m} = 2\sqrt{\sigma} = \frac{2}{\tau_p} \sqrt{1 - \frac{2\mu_{\parallel} |W_{\infty}| / \omega_0}{\alpha + \omega_0 \mu_{\perp} |W_{\infty}| \tau_p^2}},$$

$$\Omega_{\parallel m} = \beta_{\parallel} = \frac{2\mu_{\parallel} |W_{\infty}|}{\alpha + \omega_0 \mu_{\perp} |W_{\infty}| \tau_p^2}. \quad (32)$$

Из (23) и (30) видно, что параметр \varkappa имеет смысл угла поворота плоскости поляризации поперечной компоненты видеоимпульса на единицу длины (погонного угла вращения). В пределе (1) он не зависит от длительности импульса (как это имеет место для электромагнитного видеоимпульса [22,26]), но чувствителен к изменению начальной инверсии $|W_\infty|$ и внешнего магнитного поля (см. выражения для μ_\perp и W_∞). Если смотреть в направлении распространения видеоимпульса (вдоль или против \mathbf{B}), плоскость поляризации поперечной компоненты вращается против часовой стрелки, так как $\varkappa > 0$ (рис. 1). При этом данная компонента имеет двугорбый профиль с локальным минимумом в центре и распространяется совместно с отрицательной продольной составляющей, имеющей по интенсивности в центре локальный максимум. Из (29) легко видеть, что полная площадь видеоимпульса $\theta_\infty \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega dt' \approx \int_{-\infty}^{+\infty} F dt' = 2\pi$.

2) $\sigma < 0, \beta_\perp > 0$. При этих условиях

$$F = \dot{\theta} = -\frac{\tilde{\Omega}_{\perp m} \operatorname{sh} \xi}{1 + \tilde{\lambda}^2 \operatorname{ch}^2 \xi}, \quad \Omega_{\parallel} = -\frac{\tilde{\Omega}_{\parallel m} (1 + \tilde{\lambda}^2)}{1 + \tilde{\lambda}^2 \operatorname{ch}^2 \xi}, \quad (33)$$

$$\phi = \varkappa z + \frac{2\varkappa v \tau_p}{\sqrt{1 + \tilde{\lambda}^2}} \operatorname{Arth} \left(\frac{\operatorname{th} \xi}{\sqrt{1 + \tilde{\lambda}^2}} \right), \quad (34)$$

где $\tilde{\lambda} = \tilde{\Omega}_{\perp m} \tau_p / 2, \tilde{\Omega}_{\parallel m} = \Omega_{\parallel m} / (1 + \tilde{\lambda}^2)$,

$$\tilde{\Omega}_{\perp m} = 2\sqrt{|\sigma|} = \frac{2}{\tau_p} \sqrt{\frac{2\mu_{\parallel} |W_\infty| / \omega_0}{\alpha + \omega_0 \mu_\perp |W_\infty| \tau_p^2} - 1}, \quad (35)$$

а зависимость скорости импульса от его длительности выражается согласно (31).

Погонный угол вращения \varkappa плоскости поляризации поперечной компоненты (33) не отличается от такового для солитона (29). Отличие состоит в форме соответствующих профилей поперечной составляющей: для солитона (29) данная составляющая, как отмечалось выше, имеет двугорбый, а для солитона (33) — двухполярный вид (рис. 1). В последнем случае площадь поперечной компоненты, очевидно, равна нулю.

Из выражений (32) и (35) вытекают ограничения на длительности солитонов (29) и (33) соответственно

$$(\omega_0 \tau_p)^2 \geq 2 \left(\frac{F_{11} a_\perp}{F_{44} a_\parallel} \right)^2 (1 - q), \quad (36)$$

где $q = g^2 \rho (a_\parallel^2 - a_\perp^2) / (2n |W_\infty| \hbar \omega_0 F_{11}^2)$. При этом необходимо помнить об условии (1). Взяв $g = 2, \rho = 2 \text{ г/см}^3, a_\parallel^2 - a_\perp^2 \sim 10^{11} \text{ (см/с)}^2, n \sim 10^{19} \text{ см}^{-3}, \omega_0 \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}, F_{11} \sim 10^2, |W_\infty| = 1/2 (k_B T \ll \hbar \omega_0)$, получим $q \sim 10^6$. Таким образом, при ненулевой отстройке скоростей продольного и поперечного звука в реальных кристаллах могут формироваться лишь солитоны типа (29). В качестве конкретного кристалла может быть предложена матрица MgO, содержащая примеси ионов Co^{2+} . В случае же

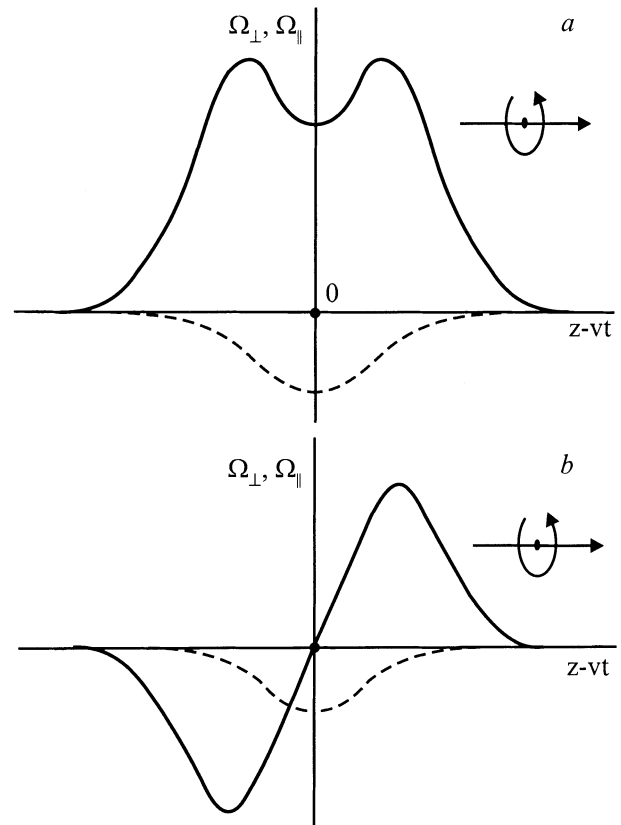


Рис. 1. Профили двухкомпонентных дозвуковых ($v < a_\perp, a_\parallel$) акустических солитонов типа (23), (30), (31) (a) и (23), (38), (39) (b) в термодинамически равновесной среде. Сплошная (штриховая) линия — профиль поперечной (продольной) компоненты. Прямая стрелка указывает направление распространения импульса, овальная — направление вращения плоскости поляризации поперечной компоненты.

точного равенства скоростей продольного и поперечного звука ($a_\parallel = a_\perp$) имеем $q = 0$. В то же время обычно $F_{11} > F_{44}$ [18,27]. Поэтому неравенства (1) и (36) совместны только для солитонов типа (33). Условие $a_\parallel = a_\perp$ лучше выполняется для ионных кристаллов галогенидов щелочных металлов с центральными межатомными силами взаимодействия [28]. Например, солитоны типа (33) с вращающейся плоскостью поляризации у поперечной компоненты могут наблюдаться в кристалле NaBr с примесями Co^{2+} . При этом, как видно из приведенных выше оценок, условие $a_\parallel = a_\perp$ должно выполняться с относительной точностью $\sim 10^{-6}$, чего весьма непросто достичь. При бóльшей относительной отстройке скоростей a_\parallel и a_\perp формирование солитонов вида (33) оказывается проблематичным, зато наблюдение солитонов (29) становится вполне реальным.

Из (32) при принятых выше параметрах среды получим, что $(\Omega_{\parallel m} / \Omega_{\perp m})^2 \ll 1$, если $\omega_0 \tau_p \ll q \sim 10^6$. Данное условие значительно слабее, чем (1), поэтому легко выполнимо. В то же время для солитона (33) при $\alpha = 0$ имеем $\tilde{\Omega}_{\parallel m} / \tilde{\Omega}_{\perp m} \sim (\omega_0 \tau_p)^2 \sqrt{\mu_\perp / \mu_\parallel}$. Поскольку со-

гласно принятому выше предположению $\tilde{\Omega}_{\parallel m}/\tilde{\Omega}_{\perp m} \ll 1$, $(\omega_0\tau_p)^2 \ll \sqrt{\mu_{\parallel}/\mu_{\perp}} = F_{11}/F_{44}$. Как отмечалось выше, обычно $F_{11} > F_{44}$. Поэтому и последнее условие не противоречит (1).

Из (22), (23), (29) и (33) следует, что при распространении солитонов обоих типов инверсия остается неполной из-за наличия продольной компоненты.

Оценим некоторые динамические параметры рассмотренных выше солитоноподобных импульсов. Согласно (13), имеем $|\Omega_{\perp}|/\omega_0 \sim F_{44}|\mathcal{E}_{\perp}| \gg 1$. Полагая $F_{44} \sim 10^2$, найдем $|\mathcal{E}_{\perp}| \sim 0.1$. Взяв, кроме того, $\omega_0 \sim 10^{10} \text{ s}^{-1}$, получим для длительности импульса $\tau_p \sim |\Omega_{\perp}|^{-1} \sim (\omega_0 F_{44} |\mathcal{E}_{\perp}|)^{-1} \sim 10 \text{ ps}$. При $\rho \simeq 2 \text{ g/cm}^3$ и $a_{\perp} \sim 3 \cdot 10^5 \text{ cm/s}$ интенсивность акустического солитона $I \sim \rho a_{\perp}^3 |\mathcal{E}_{\perp}|^2 \sim 10^7 \text{ W/cm}^2$, а давление в месте его расположения $P \sim \rho a_{\perp}^2 |\mathcal{E}_{\perp}| \sim 10 \text{ kbar}$. К настоящему времени упругие импульсы с такими параметрами вполне реально создать в условиях эксперимента [9].

4. Рациональные солитоны

Пусть теперь справедливы оба условия (13). Это означает, что обе компоненты Ω_{\parallel} и $|\Omega_{\perp}|$ (или F) акустического импульса могут быть сравнимы по величине. В соответствии с (13) пренебрежем в первом уравнении (27) ω_0 в сравнении с Ω_{\parallel} . Пусть $F = A\Omega_{\parallel}$, где A – некоторая постоянная, подлежащая определению. Тогда $\dot{\theta} = \Omega = \sqrt{1 + A^2\Omega_{\parallel}} \text{sgn } \Omega_{\parallel} = -\sqrt{1 + A^2\Omega_{\parallel}} \text{sgn } \beta_{\parallel}$ (см. второе уравнение (27)). Подставляя последние выражения в (27) и дифференцируя второе из них, из условия совместности получим $A^2 = (\mu_{\perp}/\mu_{\parallel})(a_{\parallel} - v)/(v - a_{\perp})$. Здесь принято, что значения a_{\perp} и a_{\parallel} близки друг к другу, так что $(a_{\parallel} - a_{\perp})/a_{\parallel} \ll 1$. При этом, как обычно в твердом теле, $a_{\parallel} \geq a_{\perp}$ ($\alpha \geq 0$) [28]. Интегрируя затем второе уравнение (27), будем иметь

$$\Omega_{\parallel} = -\frac{\Omega_{\parallel m} \text{sgn } \beta_{\parallel}}{1 + \xi^2}, \quad F = \frac{\Omega_{\perp m}}{1 + \xi^2}, \quad (37)$$

$$\phi = \varkappa z + 2\chi v \tau_p \text{ arctg } \xi, \quad (38)$$

где $\Omega_{\parallel m} = 2/(\tau_p \sqrt{1 + A^2})$, $\Omega_{\perp m} = 2A/(\tau_p \sqrt{1 + A^2})$.

Связь между длительностью τ_p и скоростью солитона вида (37) дается соотношением

$$(v - a_{\perp})^2 + (\mu_{\perp}/\mu_{\parallel})(a_{\parallel} - v)(v - a_{\perp}) = (\mu_{\perp} W_{\infty} a_{\perp} a_{\parallel} \tau_p)^2. \quad (39)$$

Из (38) и (23) видно, что в термодинамически равновесной среде ($W_{\infty} < 0$) вращение плоскости поляризации поперечной компоненты солитона (37) происходит против часовой стрелки, если смотреть в направлении движения импульса, а в неравновесной ($W_{\infty} > 0$) — по часовой стрелке (рис. 2).

Двухкомпонентный видеоимпульс (37), в отличие от солитонов (29) и (33), локализован не экспоненциальным, а степенным образом. По этой причине его можно назвать рациональным солитоном [29]. Из выражения

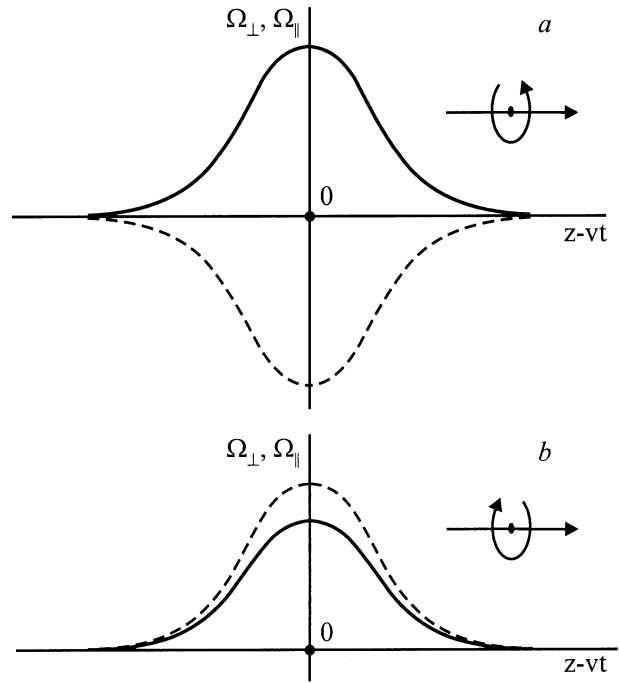


Рис. 2. Профили рациональных солитонов ($a_{\perp} < v < a_{\parallel}$) в термодинамически равновесной (а) и инвертированной (б) средах. Все обозначения соответствуют рис. 1.

для A^2 видно, что скорость рационального солитона лежит в интервале между a_{\perp} и a_{\parallel} (вне зависимости от знака W_{∞}), в то время как скорость солитонов, рассмотренных в предыдущем разделе, $v < a_{\perp}$ при $W_{\infty} < 0$.

Приближение $|\Omega_{\parallel}| \gg \omega_0$ соответствует тому, что динамическая частота перехода $\omega_d \equiv \omega_0 + \Omega_{\parallel}$ (см. первое уравнение (10)) в месте нахождения видеоимпульса значительно отличается от ω_0 . В случае термодинамически равновесной среды ($W_{\infty} < 0$, $\beta_{\parallel} > 0$), как видно из (37), $\Omega_{\parallel} < 0$. Следовательно, $\omega_d < 0$, что соответствует динамической инверсии квантовых уровней: основной уровень становится возбужденным, и наоборот. Аналогичный эффект имеет место и при распространении электромагнитных видеоимпульсов в изотропных пара- и ферромагнетиках [30]. Исходно равновесная среда становится как бы инвертированной. Известно, что в инвертированной (неравновесной) среде скорость солитонов превышает скорость соответствующих линейных волн, вызывающих в данной среде квантовые переходы [31]. В нашем случае переходы вызывает поперечная компонента импульса, поэтому $v > a_{\perp}$.

Если же среда инвертирована в исходном состоянии ($W_{\infty} > 0$, $\beta_{\parallel} < 0$), то $\Omega_{\parallel} > 0$ (см. (37)). По этой причине $\omega_d > 0$ и эффект динамической инверсии квантовых уровней не имеет места. Следовательно, среда и в присутствии продольной компоненты акустического видеоимпульса остается инвертированной, поэтому здесь также $v > a_{\perp}$.

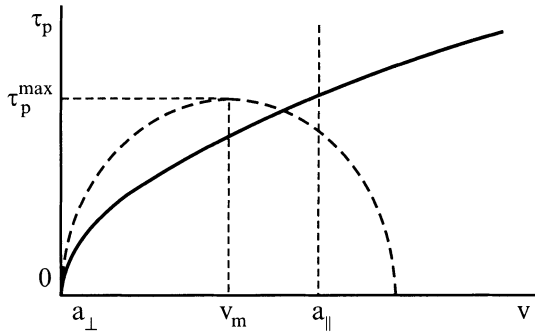


Рис. 3. Зависимость длительности рационального солитона τ_p от его скорости v . Сплошная линия на графике соответствует случаю $\eta < 2$, в котором τ_p монотонно возрастает с увеличением v . Штриховая линия показывает ход зависимости при условии $\eta > 2$. Здесь τ_p имеет максимум между a_{\perp} и a_{\parallel} . При этом $v_m = [\eta(a_{\parallel} + a_{\perp}) - 2a_{\perp}]/2(\eta - 1)$, $\tau_p^{\max} = (a_{\parallel} - a_{\perp})/(2|W_{\infty}| \mu_{\parallel} a_{\perp} a_{\parallel} \sqrt{\eta - 1})$.

В принятом нами приближении $|\Omega_{\parallel}| \gg \omega_0$ имеем $\omega_d \approx \Omega_{\parallel}$, т.е. динамическая частота практически не зависит от частоты ω_0 исходного зеемановского расщепления, а определяется в основном продольной составляющей акустического видеоимпульса (в исходно равновесной среде $\omega_d \approx -|\Omega_{\parallel}|$, в инвертированной — $\omega_d \approx |\Omega_{\parallel}|$). По этой причине скорость v не зависит от знака W_{∞} (см. (39)). С другой стороны, присутствие магнитного поля все же необходимо по двум причинам. Во-первых, в случае $S = 1/2$ спин-фононное взаимодействие невозможно в отсутствие \mathbf{B} (см. п. 2); во-вторых, при $\mathbf{B} = 0$ ($\omega_0 = 0$) начальная инверсия W_{∞} обращается в нуль, и как следствие также невозможна спин-фононная связь (см. (8), (9), (23), (24)), благодаря которой и формируются солитоны.

Как следует из (20) и (37), полная площадь продольно-поперечного рационального солитона $\theta_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega dt' = 2\pi$. На рис. 3 изображена зависимость длительности рационального солитона от его скорости, полученная на основе (39). Видно, что при $\eta \equiv \mu_{\perp}/\mu_{\parallel} = (F_{44}a_{\parallel}/F_{11}a_{\perp})^2 < 2$ длительность τ_p монотонно возрастает с увеличением скорости v . Если же $\eta > 2$, τ_p имеет максимум между a_{\perp} и a_{\parallel} . В обоих случаях при $v \rightarrow a_{\perp}$ $\tau_p \rightarrow 0$, а при $v \rightarrow a_{\parallel}$ τ_p принимает конечное значение.

Если $\eta < 1$, амплитуда продольной составляющей $\Omega_{\parallel m}$ убывает с увеличением скорости и возрастает в противном случае (рис. 4).

Зависимость $\Omega_{\perp m}(v)$ оказывается более сложной. При $\eta < 9$ наблюдается монотонный спад $\Omega_{\perp m}$ с увеличением скорости; если же $\eta > 9$, в зависимости $\Omega_{\perp m}(v)$ появляются два экстремума v_1 и v_2 , в промежутке между которыми $\Omega_{\perp m}$ растет, а вне данного интервала убывает (рис. 4). При этом, если $v \rightarrow a_{\perp}$, $\Omega_{\perp m} \rightarrow \infty$, а при $v \rightarrow a_{\parallel}$ $\Omega_{\perp m} \rightarrow 0$.

Для формирования рационального солитона на вход среды следует подавать акустический импульс, амплитуды как поперечной, так и продольной компоненты которого удовлетворяют условиям (13). В этой связи интенсивность рациональных солитонов должна в несколько раз превышать интенсивность экспоненциально локализованных акустических видеоимпульсов (где выполняется лишь одно из условий (13) для поперечной компоненты) и составлять порядка 10^8 W/cm^2 .

Таким образом, в настоящей работе в приближении спектрального перекрытия (1) исследованы квазисолитонные режимы распространения двухкомпонентных акустических видеоимпульсов в парамагнитных кристаллах параллельно внешнему магнитному полю. Во избежание пространственной акустической дисперсии и нелокальности спин-фононного взаимодействия для наблюдения солитоноподобных импульсов предложено использовать магнитные поля, вызывающие зеемановские расщепления $\omega_0 \sim 10^{10} \text{ s}^{-1}$ и сверхнизкие ($T \simeq 0.1 \text{ K}$)

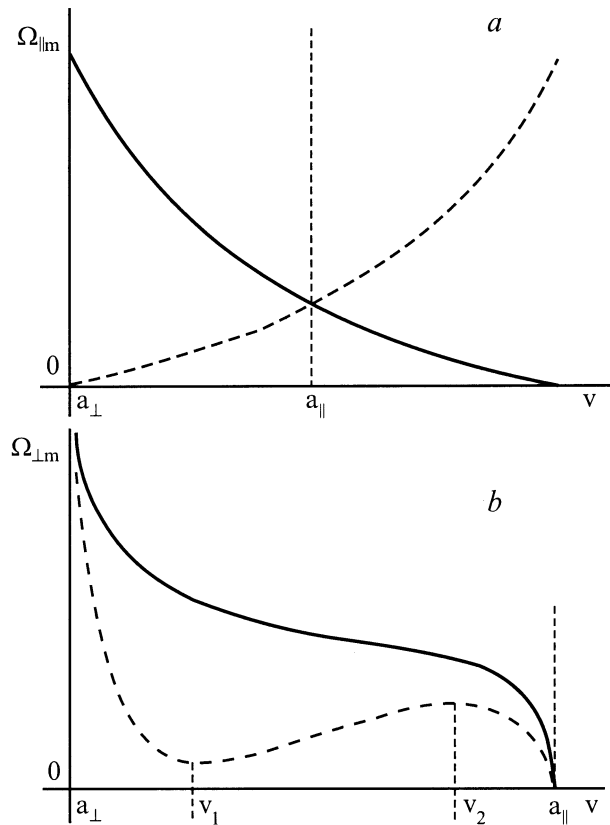


Рис. 4. *a* — зависимость амплитуды продольной составляющей рационального солитона $\Omega_{\parallel m}$ от скорости v . Сплошной (штриховой) линией обозначена зависимость при $\eta < 1$ ($\eta > 1$). *b* — зависимость амплитуды поперечной составляющей рационального солитона $\Omega_{\perp m}$ от скорости v . Сплошной линии соответствует случай $\eta < 9$. Штриховой — случай $\eta > 9$, при котором в данной зависимости появляются два экстремума v_1 и v_2 , в промежутке между которыми $\Omega_{\perp m}$ возрастает с увеличением v . При этом $v_{1,2} = (a_{\parallel} + a_{\perp})/2 + [(a_{\parallel} - a_{\perp})/4](1 \pm \sqrt{(\eta - 9)/(\eta - 1)})$.

температуры. Повышение температуры кристалла до нескольких единиц Кельвина сопряжено с увеличением на порядок напряженности магнитного поля, так как в противном случае значительно уменьшается начальная инверсия спиновой подсистемы, что в свою очередь снижает эффективность спин-фононного взаимодействия. Увеличение же величины B (или ω_0) влечет за собой уменьшение длительности видеоимпульса до 1 ps с целью выполнения условия (1). При таких длительностях принципиально необходим учет пространственной дисперсии.

Хорошо известно, что наиболее сильную динамическую связь с колебаниями кристаллической решетки испытывают парамагнитные ионы, обладающие эффективным спином $S = 1$ [18]. С математической точки зрения исследование распространения акустических видеоимпульсов в системе спинов $S = 1$ оказывается более сложным, чем проведенное в настоящей работе для спинов $S = 1/2$. Однако с точки зрения эксперимента решение данной задачи является более предпочтительным и представляет, на наш взгляд, значительный интерес.

Список литературы

- [1] D.H. Auston, K.P. Cheung, I.A. Valdmanis, D.A. Kleinmann. Phys. Rev. Lett. **53**, 1555 (1984).
- [2] P.C. Becker, H.L. Fragnito, J.Y. Bigot, C.H. Brito-Crus, R.L. Fork, C.V. Shank. Phys. Rev. Lett. **63**, 505 (1989).
- [3] J.T. Darrow, B.B. Hu, X.C. Chang, D.H. Auston. Opt. Lett. **15**, 323 (1990).
- [4] А.И. Маймистов. Квантовая электрон. **30**, 287 (2000).
- [5] А.Ю. Пархоменко, С.В. Сазонов. Письма в ЖЭТФ **67**, 887 (1998).
- [6] А.Ю. Пархоменко, С.В. Сазонов. ЖЭТФ **114**, 1595 (1998).
- [7] A.C. Tam. Appl. Phys. Lett. **45**, 510 (1984).
- [8] В.Э. Гусев, А.А. Карабутов. Лазерная оптоакустика. Наука, М. (1991).
- [9] С.А. Ахманов, В.Э. Гусев. УФН **162**, 3 (1992).
- [10] S.V. Sazonov. J.Phys.: Condens. Matter **4**, 6485 (1992).
- [11] S.V. Sazonov, L.S. Yakupova. J.Phys.: Condens. Matter **4**, 6479 (1992).
- [12] S.V. Sazonov. J.Phys.: Condens. Matter **6**, 6295 (1994).
- [13] С.В. Сазонов. Изв. вузов. Физика **36**, 7, 94 (1993).
- [14] В.Ю. Маньков, С.В. Сазонов. ФТТ **41**, 623 (1999).
- [15] E.V. Tucker. Phys. Rev. **143**, 264 (1966).
- [16] Э.М. Беленов, А.В. Назаркин. Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990).
- [17] С.В. Сазонов. ЖЭТФ **118**, 20 (2000).
- [18] Дж. Такер, Р. Рэмington. Гиперзвук в физике твердого тела. Мир, М. (1975).
- [19] Б.М. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. Наука, М. (1990).
- [20] Н.Н. Моисеев. Асимптотические методы нелинейной механики. Наука, М. (1981).
- [21] А. Найфэ. Введение в методы возмущений. Мир, М. (1984).
- [22] А.Ю. Пархоменко, С.В. Сазонов. Квантовая электрон. **27**, 139 (1999).
- [23] И.А. Лаппо-Данилевский. Применение матричных функций к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М. (1957).
- [24] Я.Р. Гантмахер. Теория матриц. Наука, М. (1966).
- [25] S.V. Sazonov, E.V. Trifonov. J. Phys. **B27**, L7 (1994).
- [26] С.В. Сазонов. ЖЭТФ **107**, 20 (1995).
- [27] В.А. Голенищев-Кутузов, В.В. Самарцев, Н.К. Соловаров, Б.М. Хабибулин. Магнитная квантовая акустика. Наука, М. (1997).
- [28] Ч. Киттель. Введение в физику твердого тела. Физматлит, М. (1963).
- [29] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. Мир, М. (1987).
- [30] С.В. Сазонов, Е.В. Трифонов. ЖЭТФ **103**, 1527 (1993).
- [31] А.Н. Орасевский. УФН **168**, 1311 (1998).