

Движение солитонов в модулированных упругих средах

© А.С. Ковалев, О.В. Усатенко*, А.В. Горбач*

Физико-технический институт низких температур Национальной академии наук Украины,
61164 Харьков, Украина

* Харьковский национальный университет,
61077 Харьков, Украина

E-mail: univ@kharkov.ua

(Поступила в Редакцию 9 ноября 2000 г.
В окончательной редакции 22 февраля 2001 г.)

Рассмотрена двухатомная упругая цепочка с нелинейным межчастичным взаимодействием и нелинейным внешним потенциалом. Приведена полная классификация всех типов движущихся двухпараметрических щелевых и околощелевых солитонных решений данной системы при различных соотношениях нелинейностей. Получены аналитические выражения для движущихся околощелевых солитонов в отсутствие внешнего поля.

Работа выполнена при частичной поддержке проекта INTAS-99 (грант N 167) и программы МНОП (грант USU 082087).

Изучение нелинейной динамики модулированных сред, т.е. сред с периодически меняющимися с координатой параметрами, привело к открытию новых типов солитонных возбуждений. В работах Чена, Миллса и Траллинжера [1,2] при изучении распространения нелинейных волн в оптических средах с модулированным коэффициентом прозрачности было впервые теоретически предсказано существование щелевых (брэгговских) солитонов. Параметры таких солитонных решений — частота и волновое число — лежат в щели спектра линейных волн системы. Первоначально были найдены только неподвижные оптические щелевые солитоны. Подобные нелинейные решения были затем получены и в других модулированных средах, в частности в кристаллах с микроскопической структурой [3–7] и в магнетиках с несколькими магнитными подрешетками [7]. Помимо щелевых солитонов в модулированных средах могут также существовать солитоны с более сложной структурой и с частотами, лежащими выше или ниже щели спектра линейных волн (так называемые околощелевые солитоны). Такие солитонные решения были впервые получены в работах Коста и Пейро [8–10]. В [7] приводится полная классификация всех типов неподвижных щелевых и околощелевых солитонов, существующих в нелинейной модулированной оптической среде, двухатомной ангармонической цепочке, а также в магнитных цепочках с двумя подрешетками.

Движущиеся щелевые и околощелевые солитоны являются более сложными по своей структуре. Такие солитоны являются двухпараметрическими. Они образованы двумя нелинейными волнами, распространяющимися в противоположных направлениях с одинаковой частотой. В качестве двух параметров солитонного решения удобно выбирать скорость солитона и частоту нелинейных волн, образующих данный солитон. Динамические щелевые солитоны в модулированной оптической среде были проанализированы в работах Вабница и Асевеса [11,12]. Позже Горшков, Ермакова и Марченко получили решения для движущихся щелевых солитонов в двухатомной

цепочке с нелинейным межчастичным взаимодействием [13]. Движущиеся околощелевые оптические солитоны были рассмотрены в [14]. В работе [15] изучена возможность существования движущихся трехпараметрических солитонных решений в модулированной оптической среде.

Данная работа посвящена изучению движущихся упругих солитонных возбуждений в кристаллах с внутренней структурой. Теоретическому рассмотрению нелинейной динамики таких систем в последнее время уделяется значительное внимание [3–7,13,16], однако большинство результатов, как правило, получено численными методами в рамках простых моделей (см., например, [17,18]). Несмотря на простоту предлагаемых моделей, исследование их актуально, так как проясняет физическую природу сложных нелинейных возбуждений в реальных кристаллах. В частности, для описания термодинамических и кинетических свойств таких кристаллов необходимо знание структуры элементарных возбуждений, которые при больших амплитудах колебаний атомов являются существенно нелинейными. Отметим также, что методы, развиваемые в настоящей работе, могут быть также использованы для изучения нелинейной динамики других модулированных систем, таких как оптические и магнитные (см., например, [7,19]). В работе рассмотрена двухатомная цепочка с двумя типами нелинейностей: "внутренней" нелинейностью межчастичного взаимодействия и нелинейным внешним потенциалом ("внешняя" нелинейность). Проводится анализ всех типов движущихся щелевых и околощелевых солитонов, существующих в такой системе при различных соотношениях между внутренней и внешней нелинейностями. В частности, показано, что в исследуемой системе возможны новые типы движущихся щелевых и околощелевых солитонов, ранее не изученные. При определенном соотношении двух конкурирующих нелинейностей околощелевые солитоны могут одновременно существовать как выше, так и ниже щели спектра линейных волн системы. Приведены также

точные аналитические выражения для движущихся око-лощелевых солитонов двухатомной цепочки в отсутствие внешнего потенциала.

1. Постановка задачи и основные динамические уравнения

Рассмотрим одномерную периодическую двухатомную цепочку с чередующимися атомами с массами M и m ($M > m$), ангармоническим потенциалом межчастичного взаимодействия

$$U(\xi_n) = \frac{K_2}{2}(\xi_n - \xi_{n-1})^2 + \frac{K_4}{4}(\xi_n - \xi_{n-1})^4 \quad (1)$$

и ангармоническим внешним потенциалом

$$V(\xi_n) = \frac{\gamma_2}{2} \xi_n^2 + \frac{\gamma_4}{4} \xi_n^4, \quad (2)$$

где ξ_n — смещение n -го атома; константы K_2 и γ_2 положительны. Разность атомов в дальнейшем будем считать малой величиной: $(M-m) \ll M, m$, что обеспечивает узость щели запрещенных частот спектра линейных волн.

Уравнение движения для n -го атома имеет вид

$$\mu \left[1 + \eta \cos(\pi n) \right] \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} + K_2(2\xi_n - \xi_{n-1} - \xi_{n+1}) + \gamma_2 \xi_n + K_4 \left[(\xi_n - \xi_{n-1})^3 + (\xi_n - \xi_{n+1})^3 \right] + \gamma_4 \xi_n^3 = 0, \quad (3)$$

где $\mu = (M + m)/2$, $\eta = (M - m)/(M + m)$.

1.1. Анализ линейных волн. При анализе свойств линейных волн в приведенной системе общее решение линеаризованных уравнений (3) представляется в виде двух полей, описывающих колебания легких и тяжелых частиц,

$$\begin{aligned} \xi_n &= F \exp(i\omega t - i\beta n), \quad n = \pm 1, \pm 3, \dots, \\ \xi_n &= G \exp(i\omega t - i\beta n), \quad n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где величина β играет роль волнового числа. В этом случае удобно ввести отдельную нумерацию для каждого типа частиц, фактически нумеруя элементарные ячейки [3–7].

Закон дисперсии линейных волн вида (4) изображен на рис. 1 и описывается уравнением

$$\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2 - \tilde{\omega}_1^2\tilde{\omega}_2^2 \cos^2(\beta a) = 0, \quad (5)$$

где $\omega_1^2 = (2K_2 + \gamma_2)/M$, $\omega_2^2 = (2K_2 + \gamma_2)/m$, $\tilde{\omega}_1^2 = 2K_2/M$, $\tilde{\omega}_2^2 = 2K_2/m$, a — постоянная решетки, которую в дальнейшем полагаем равной единице. При $\beta = \beta_0 = \pm\pi/2$ спектр линейных волн имеет щель, ширина которой пропорциональна разности масс ($\omega_2^2 - \omega_1^2 = (2K_2 + \gamma_2)(M - m)/(Mm)$) и является малым параметром.

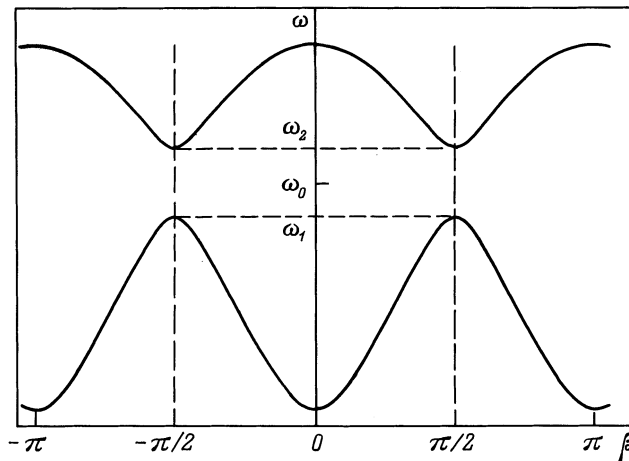


Рис. 1. Спектр линейных волн системы (3), определяемый характеристическим уравнением (5). Вертикальными штриховыми линиями обозначены границы первой зоны Бриллюэна.

Соотношение амплитуд колебаний тяжелых и легких частиц определяется частотой линейных волн [20]

$$\frac{G}{F} = \mp \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1}}. \quad (6)$$

Здесь верхний (нижний) знак относится к возбуждениям с частотами, лежащими на участках спектра, где возрастание модуля волнового вектора соответствует увеличению (уменьшению) частоты.

На нижней ветви спектра, т.е. при $\omega \leq \omega_1$, амплитуда колебаний тяжелых атомов G превышает амплитуду колебаний легких атомов F . При $\omega = \omega_1$ амплитуда легких атомов становится равной нулю, а тяжелые атомы колеблются в противофазе. На верхней ветви спектра, при $\omega \geq \omega_2$, амплитуда колебаний легких атомов превышает амплитуду тяжелых, которая при $\omega = \omega_2$ обращается в нуль, при этом легкие атомы колеблются в противофазе. Таким образом, нижнюю ветвь можно условно назвать ветвью колебаний тяжелых частиц, а верхнюю — легких.

Диапазон изменения волнового числа β в соотношении (5) соответствует интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ (область, ограниченная вертикальными штриховыми линиями на рис. 1), т.е. первой зоне Бриллюэна (см., например, [21]).

Более удобным, однако, является другой подход, в котором общее решение линеаризованных уравнений (3) представлено в виде, универсальном для описания как тяжелых, так и легких частиц [13,20],

$$\xi_n = A \exp i(\omega t - \beta n) + B \exp i(\omega t - (\beta - \pi)n). \quad (7)$$

При таком подходе в общее решение входят две волны с одинаковой частотой и групповой скоростью, но разными амплитудами и фазовыми скоростями.

Амплитуды A и B не являются независимыми, их отношение определяется частотой волн [13,20]

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{|1 - \omega^2/\omega_2^2|} \pm \sqrt{|1 - \omega^2/\omega_1^2|}}{\sqrt{|1 - \omega^2/\omega_2^2|} \mp \sqrt{|1 - \omega^2/\omega_1^2|}}, \quad (8)$$

где верхний (нижний) знак соответствует знаку в формуле (6).

Волновые числа двух волн в решении (7) лежат в пределах так называемой расширенной зоны Бриллюэна, т.е. в диапазоне $(-\pi, \pi)$. Недостаточность первой зоны Бриллюэна объясняется тем фактом, что все атомы в цепочке нумеруются последовательно без учета наличия частиц двух сортов. Уменьшение элементарной ячейки приводит к расширению зоны Бриллюэна, которая теперь совпадает с зоной Бриллюэна для одноатомной цепочки.

Легко установить связь между амплитудами F , G в (4), и A , B

$$\begin{aligned} G &= A + B, \\ F &= A - B. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, оба подхода являются эквивалентными и с одинаковым успехом могут быть использованы для анализа как линейных, так и нелинейных волн.

1.2. Нелинейные возбуждения. При изучении нелинейных волн наиболее интересной частью спектра является окрестность точки $\beta_0 = \pi/2$ (т.е. значения $\beta = \beta_0 + \kappa$ с $\kappa \ll \beta_0$), где обе ветви спектра линейных волн (5) имеют квадратичную форму.

В соответствии с (7) будем искать решение системы нелинейных уравнений (3) в виде

$$\begin{aligned} \xi_n &= A_1(n, t) \exp i \left(\omega t - \frac{\pi}{2} n \right) \\ &+ A_2(n, t) \exp i \left(\omega t + \frac{\pi}{2} n \right). \end{aligned} \quad (10)$$

В длинноволновом пределе, когда $A_i(n, t)$ — медленно меняющиеся функции номера n , заменяем дискретный номер атомов n в $A_i(n, t)$ на непрерывную координату x и используем разложение

$$A_i(x \pm 1, t) + A_i(x, t) \pm \frac{\partial A_i(x, t)}{\partial x} + O(\eta^2 A_i)$$

(как будет видно из дальнейшего, $\partial A_i(x, t)/\partial x \sim \eta A_i$).

В случае слабой модуляции массы в цепочке ($\eta \ll 1$), когда $\partial A_i/\partial t \ll \omega_1 A_i, \omega_2 A_i$ и $\partial A_i/\partial x \ll A_i$ в щели и около щели спектра линейных волн, при подстановке (10) и (3) будем оставлять только первые производные $\partial A_i/\partial t$ и $\partial A_i/\partial x$ в линейной части уравнения (3). Кроме того, с учетом малости амплитуд осцилляций атомов ($|K_4| |A_i|^2 / K_2 \ll 1$, $|\gamma_4| |A_i|^2 / \gamma_2 \ll 1$) в нелинейной части уравнения (3) при подстановке (10) все производные от амплитуд A_i будут опускаться. Для A_1 и A_2 имеем

систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} i \frac{2}{\omega_0} \frac{\partial A_1}{\partial t} + i \frac{2K_2}{2K_2 + \gamma_2} \frac{\partial A_1}{\partial x} &= \frac{2\delta}{\omega_0} A_1 + \eta A_2 - \frac{3K_4}{2(2K_2 + \gamma_2)} \\ &\times \left[(3p + 1) |A_1|^2 A_1 + 2(3p + 1) |A_2|^2 A_1 + 3(p - 1) A_2^2 A_1^* \right], \\ i \frac{2}{\omega_0} \frac{\partial A_2}{\partial t} - i \frac{2K_2}{2K_2 + \gamma_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} &= \frac{2\delta}{\omega_0} A_2 + \eta A_1 - \frac{3K_4}{2(2K_2 + \gamma_2)} \\ &\times \left[(3p + 1) |A_2|^2 A_2 + 2(3p + 1) |A_1|^2 A_2 + 3(p - 1) A_1^2 A_2^* \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где $\omega_0 = \sqrt{(2K_2 + \gamma_2)/\mu}$ — частота, соответствующая середине щели линейного спектра, $\delta = \omega - \omega_0$ — отстройка по частоте от середины щели, $p = (1 + \gamma_4/(2K_4))/3$ — параметр, характеризующий соотношение внутренней и внешней нелинейностей.

Как следует из системы (11), спектр линейных волн вида (7) в окрестности волнового числа $\beta_0 = \pi/2$ ($\beta = \beta_0 + \kappa$, $\kappa \ll \beta_0$) выглядит следующим образом:

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{\omega_0 \eta}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2K_2 \kappa}{\eta(2K_2 + \gamma_2)} \right)^2}. \quad (12)$$

Вводя перенормированные амплитуды $\sqrt{6|K_4|/((2K_2 + \gamma_2)\eta)} A_i = F_i$ и координаты $(\omega_0 \eta/2)t \rightarrow t$, $(\eta(2K_2 + \gamma_2)/(2K_2))x \rightarrow x$, получаем систему уравнений в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} i \frac{\partial F_1}{\partial t} + i \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \Omega F_1 + F_2 - \frac{\sigma}{4} \left[(3p + 1) |F_1|^2 F_1 \right. \\ &\left. + 2(3p + 1) |F_2|^2 F_1 + 3(p - 1) F_2^2 F_1^* \right], \\ i \frac{\partial F_2}{\partial t} - i \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \Omega F_2 + F_1 - \frac{\sigma}{4} \left[(3p + 1) |F_2|^2 F_2 \right. \\ &\left. + 2(3p + 1) |F_1|^2 F_2 + 3(p - 1) F_1^2 F_2^* \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Omega = 2\delta/(\omega_0 \eta)$ — безразмерная отстройка по частоте от середины щели спектра линейных волн, а $\sigma = \text{sign } K_4$. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением "жесткой" внутренней нелинейности, т.е. случаем $\sigma = 1$. Как известно, в нелинейных системах имеется определенная симметрия свойств солитонных возбуждений при изменении знака нелинейности (см., например, [22]).

В новых переменных спектр линейных волн (12) в системе координат, движущейся с групповой скоростью $V = \partial\omega/\partial\kappa$, т.е. для решений вида $F_i \sim \exp(-i\kappa(x - Vt))$, приобретает вид

$$\Omega_L = \frac{2}{\eta} \pm \sqrt{1 - V^2}. \quad (14)$$

Полагая в системе (13) $p = 1/3$, получаем динамические уравнения для двухатомной цепочки в отсутствие внешнего потенциала [13]. В случае $p = 1$ система (13) качественно совпадает с динамическими уравнениями, получаемыми при рассмотрении нелинейной оптической среды с модулированным коэффициентом прозрачности [11,12,14,15].

2. Движущиеся щелевые и околощелевые солитоны

Перейдем к анализу системы (13). Будем полагать зависимость амплитуд F_i от координаты и времени в виде $F_i(x, t) = F_i(x - Vt)$, стандартном для движущихся со скоростью V солитонов огибающей. Введем новые вещественные переменные u_1, u_2, q и s

$$\begin{aligned} F_1 &= u_1 \exp(iq + is), \\ F_2 &= u_2 \exp(iq - is), \end{aligned} \quad (15)$$

которые удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{u_2 \sin(2s)}{1-V} + \frac{3}{4(1-V)} (p-1) u_1 u_2^2 \sin(4s), \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -\frac{u_1 \sin(2s)}{1+V} + \frac{3}{4(1+V)} (p-1) u_2 u_1^2 \sin(4s), \\ \frac{\partial s}{\partial x} &= -\frac{\Omega}{1-V^2} + \frac{3p+1}{8} \frac{3(u_1^2 + u_2^2) + V(u_2^2 - u_1^2)}{1-V^2} \\ &\quad - \frac{(1-V)u_1^2 + (1+V)u_2^2}{2u_1 u_2 (1-V^2)} \cos(2s) \\ &\quad + \frac{3(p-1)}{8} \frac{(1-V)u_1^2 + (1+V)u_2^2}{1-V^2} \cos(4s), \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= -\frac{V\Omega}{1-V^2} + \frac{3p+1}{8} \frac{(u_2^2 - u_1^2) + 3V(u_1^2 + u_2^2)}{1-V^2} \\ &\quad + \frac{(1-V)u_1^2 - (1+V)u_2^2}{2u_1 u_2 (1-V^2)} \cos(2s) \\ &\quad - \frac{3(p-1)}{8} \frac{(1-V)u_1^2 - (1+V)u_2^2}{1-V^2} \cos(4s). \end{aligned} \quad (16)$$

Из первых двух уравнений находим интеграл "движения"

$$(1-V)u_1^2 - (1+V)u_2^2 = C, \quad (17)$$

аналогичный интегралу "движения" в оптических околощелевых солитонах [2,14,15]. Как упоминалось ранее [2], константа C связана с переносом энергии в нелинейной волне. Она определяет отношение двух амплитуд в волне вида (10) и для щелевых солитонов равна нулю, поскольку в таких солитонах поле убывает до нуля на бесконечности [3-7,13]. В околощелевых солитонах асимптотически поля на бесконечности не равны нулю, такие солитоны имеют вид так называемых солитонов на пьедестале. Для этого типа солитонов константа C может быть не равной нулю. В этом случае она становится третьим параметром солитона. В данной работе мы рассмотрим только движущиеся двухпараметрические околощелевые солитоны по аналогии с уже найденными двухпараметрическими щелевыми солитонами [13,14]. Более широкий класс трехпараметрических решений рассмотрен в работе [15].

Полагая в (17) $C = 0$, получаем связь между полями u_1 и u_2

$$u_2 = \sqrt{\frac{1-V}{1+V}} u_1. \quad (18)$$

Исключая переменную u_2 из системы (16), получаем эффективную "динамическую" гамильтонову систему для u_1 и s

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dz} &= -u_1 \sin(2s) + \frac{3(p-1)}{2} \beta(V) u_1^3 \sin(4s), \\ \frac{ds}{dz} &= -\nu - \cos(2s) + \frac{3p+1}{2} \alpha(V) u_1^2 \\ &\quad + \frac{3(p-1)}{2} \beta(V) u_1^2 \cos(4s), \end{aligned} \quad (19)$$

где переменная $z = (x - Vt)/\sqrt{1-V^2}$ играет роль эффективного "времени", $\nu(\Omega, V) = \Omega/\sqrt{1-V^2}$, $\alpha(V) = (3-V^2)/(2(1+V)\sqrt{1-V^2})$, $\beta(V) = \sqrt{(1-V)/(1+V)}/2$. Гамильтониан этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} H &= (\nu + \cos(2s)) u_1^2 \\ &\quad - \frac{3p+1}{4} \alpha u_1^4 - \frac{3(p-1)}{4} \beta u_1^4 \cos(4s), \end{aligned} \quad (20)$$

где переменные u_1^2 и $2s$ играют роль канонически сопряженных координаты и импульса.

Для переменной q получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dq}{dz} = -\nu V + \frac{(3p+1)V}{2\sqrt{1-V^2}(1+V)} u_1^2. \quad (21)$$

Наличие интеграла "движения" (20) позволяет проинтегрировать систему уравнений (19). Однако полезно вначале использовать метод качественного анализа динамических систем и рассмотреть возможные решения системы (19) на фазовой плоскости (u_1, s) . По виду фазового портрета системы легко восстановить профили различных типов решений, возможных при заданных значениях параметров p и ν . Более того, качественный анализ динамической системы (19) позволяет правильно выбрать значение интеграла (20), соответствующее солитонному решению.

3. Качественный анализ динамических уравнений

В общем случае фазовый портрет системы (19) симметричен относительно оси $u_1 = 0$ и является периодическим по переменной s с периодом, равным π . Поэтому мы будем рассматривать фазовый портрет данной системы в области $u_1 > 0, -\pi/2 \leq s \leq \pi/2$ (см. рис. 3).

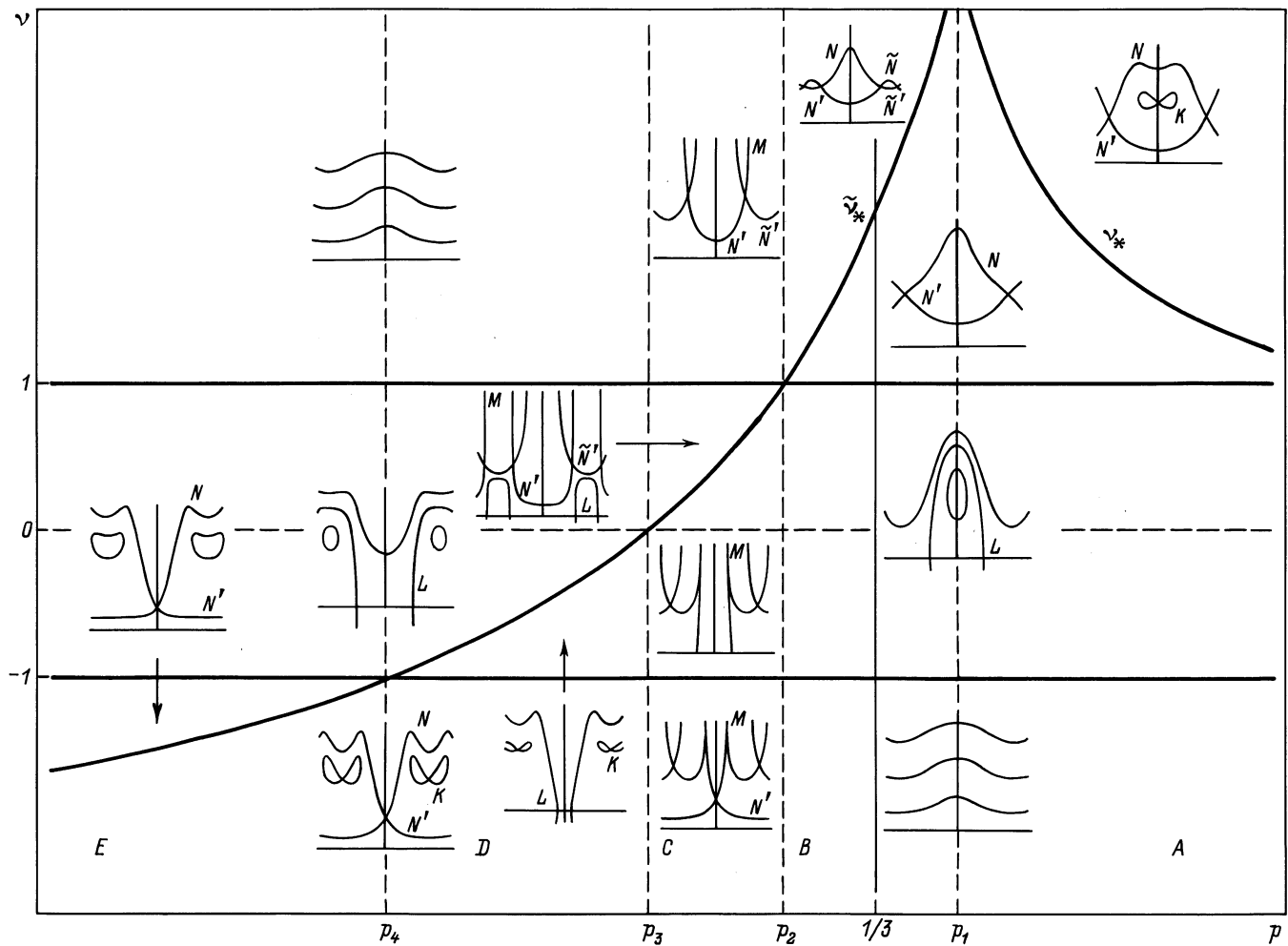


Рис. 2. Эволюция фазового портрета системы (19) с изменением частоты нелинейного возбуждения ν и параметра нелинейности p . На всех фазовых портретах абсцисса соответствует переменной s , а ордината — переменной u_1 .

Анализ показывает, что у системы (19) могут существовать особые точки на фазовой плоскости (u_1, s) со следующими координатами:

$$\text{I. } u_1 = 0, \quad s = \pm \frac{1}{2} \arccos(-\nu);$$

$$\text{II. } u_1 = \pm \left\{ \frac{2(1+\nu)(1+V)\sqrt{1-V^2}}{3p(2-V^2)+V^2} \right\}^{1/2}, \quad s = 0;$$

$$\text{III. } u_1 = \pm \left\{ \frac{2(\nu-1)(1+V)\sqrt{1-V^2}}{3p(2-V^2)+V^2} \right\}^{1/2}, \quad s = \pm \frac{\pi}{2};$$

$$\text{IV. } u_1 = \pm \left\{ \frac{2\nu(1+V)\sqrt{1-V^2}}{3p+3-2V^2} \right\}^{1/2}, \\ s = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{3p+3-2V^2}{3(p-1)\nu} \right).$$

Тип особых точек, а также условие их существования зависят от значений параметров p и ν . Удобно изучать эволюцию фазового портрета системы (19) в терминах зависимости расположения особых точек на фазовой плоскости (u_1, s) от значения частоты ν при

фиксированном параметре p . Существуют пять областей значений параметра p с различным поведением системы

$$\text{A. } p > p_1 = 1,$$

$$\text{B. } -\frac{V^2}{3(2-V^2)} = p_2 < p < p_1,$$

$$\text{C. } \frac{-3+2V^2}{3} = p_3 < p < p_2,$$

$$\text{D. } \frac{-6+5V^2}{3V^2} = p_4 < p < p_3,$$

$$\text{E. } p < p_4.$$

(23)

Эволюция фазового портрета системы (19) с изменением частоты нелинейного возбуждения ν и параметра нелинейности p представлена схематически на рис. 2. Горизонтальная ось на всех изображенных фазовых портретах соответствует переменной s , а вертикальная — переменной u_1 , как на рис. 3.

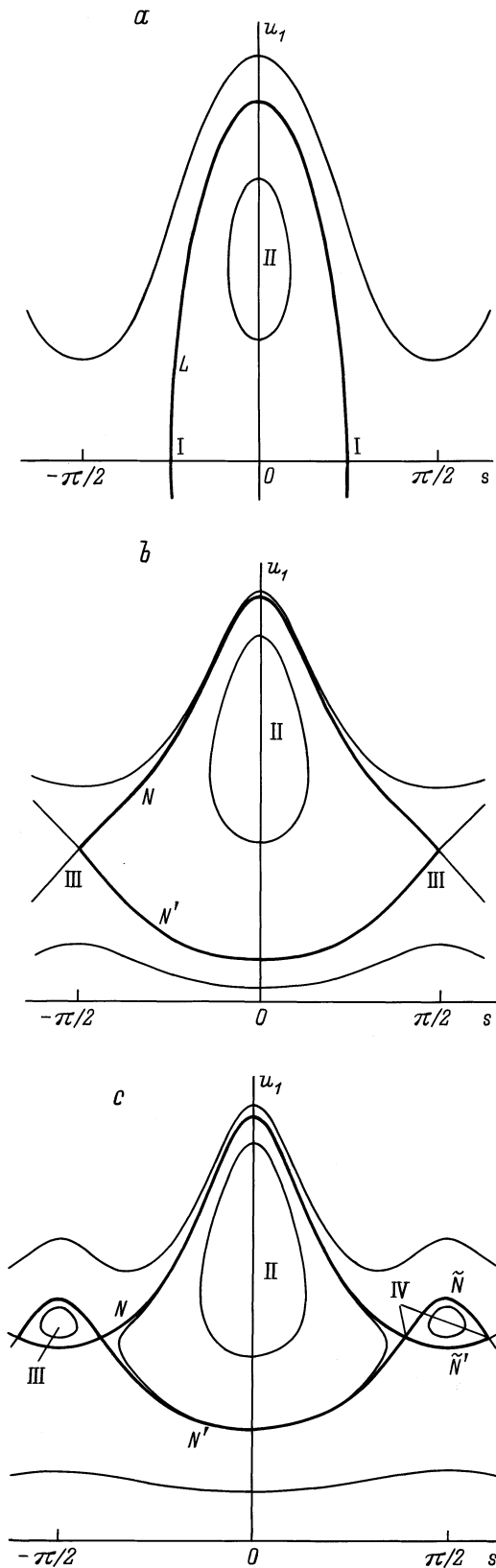


Рис. 3. Фазовые портреты системы (24) при различных значениях параметров ν и p . *a* — $-1 < \nu < 1$, $p > 0$ (области *A* и *B* на рис. 2); *b* — $-1 < \nu < \nu_*$, $p > 1$ (область *A* на рис. 2) и $1 < \nu < \nu_*$, $0 < p < 1$ (область *B* на рис. 2); *c* — $\tilde{\nu}_* < \nu$, $0 < p < 1$ (область *B* на рис. 2).

В области *A* при частотах $\nu < -1$, т.е. под нижней ветвью спектра линейных волн, особых точек на фазовой плоскости (u_1, s) нет и солитонные решения отсутствуют. При таких частотах возможны лишь пространственно-периодические нелинейные волны (так называемые кноидальные волны). При $\nu = -1$ происходит первая бифуркация и возникают новые типы динамических решений системы (19). В частотном промежутке $-1 < \nu < 1$ на фазовой плоскости (u_1, s) существуют особые точки типа седла с координатами *I* и особые точки типа центра с координатами *II* (см. (22)). Седла с координатами *I* соединяют две сепаратрисы типа *L*, каждая из которых выходит из одного седла, огибает один из центров с координатами *II* и заканчивается в другом седле. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 3, *a*. Сепаратрисам *L* соответствуют движущиеся двухпараметрические щелевые солитоны. В таких солитонах амплитуды полей u_1 и u_2 имеют стандартную форму "колокола" с нулевыми асимптотиками на бесконечности ($z \rightarrow \pm\infty$), а фаза s приобретает сдвиг, равный $\Delta_s = \arccos(-\nu)$, при изменении координаты z от $-\infty$ до $+\infty$. В частном случае $p = 1/3$ солитонные решения были получены аналитически в работе [13]. На верхней ветви спектра линейных волн, т.е. при $\nu = 1$, происходит следующая бифуркация системы и в частотном промежутке $1 < \nu < \nu_* = (3p + 3 - 2V^2)/(3(p - 1)(1 - V^2))$ на фазовой плоскости (u_1, s) существуют центры с координатами *II* и седла с координатами *III* (рис. 3, *b*). Возникает два типа сепаратрис *N* и *N'*, которым соответствуют движущиеся двухпараметрические околощелевые солитоны. Основное отличие околощелевых солитонов *N*, *N'* от щелевых солитонов *L* заключается в том, что в этих солитонах амплитуды полей u_1 , u_2 имеют ненулевые асимптотики на бесконечности (солитоны имеют вид так называемых солитонов на пьедестале), а сдвиг фазы s при изменении координаты z от $-\infty$ до $+\infty$ равен $\Delta_s = \pi$. В *N*-солитоне амплитуда в центре больше амплитуды на бесконечности, а в *N'*-солитоне амплитуда в центре меньше, чем на бесконечности, и он имеет вид "темного" солитона на пьедестале. Наконец, при частоте $\nu = \nu_*$ происходит очередная бифуркация: каждый из центров с координатами *II* расщепляется на седло с теми же координатами и два новых центра с координатами *IV*. Таким образом, при частотах $\nu > \nu_*$ возникает новый тип сепаратрис *K*, которые выходят из седла *II*, огибают один из центров *IV* и возвращаются в то же седло. Околощелевые солитоны *K*, так же как и солитоны *N*, *N'*, имеют ненулевые асимптотики на бесконечности у амплитуд u_1 , u_2 , но фаза s в таких солитонах не претерпевает сдвига при изменении координаты z от $-\infty$ до $+\infty$.

Фазовые портреты и солитонные решения системы (19) в области *B* значений параметра p в щели спектра линейных волн и вблизи нее имеют качественно такой же вид, как и в области *A*, однако третья бифуркация при частоте $\nu = \tilde{\nu}_* = (3p + 3 - 2V^2)/(3(1 - p)(1 - V^2)) > 1$ отличается

от бифуркации в области A при $\nu = \nu_*$. Теперь каждое из седел с координатами III расщепляется на центр с теми же координатами и два новых седла с координатами IV. При частотах $\nu > \tilde{\nu}_*$ существует четыре типа сепаратрис, соединяющих седла IV: $N, N', \tilde{N}, \tilde{N}'$ (рис. 3, *c*). Соответствующие этим сепаратрисам движущиеся двухпараметрические околоселевые солитоны аналогичны околоселевым солитонам N и N' в частотном промежутке $1 < \nu < \tilde{\nu}_*$, описанным ранее. Однако при $\nu > \tilde{\nu}_*$ сдвиг фазы s при изменении координаты z от $-\infty$ до $+\infty$ у солитонов N и N' равен $\Delta_s = \arccos[(3p+3-2V^2)/(3(p-1)\nu)]$, а у солитонов \tilde{N} и \tilde{N}' $\Delta_s = \pi - \arccos[(3p+3-2V^2)/(3(p-1)\nu)]$.

Граница между областями A и B соответствует значению параметра $p = 1$. При таком p система (19), как уже упоминалось ранее, качественно совпадает с динамическими уравнениями для модулированной нелинейной оптической среды. В этом случае происходят только две бифуркации на нижней и верхней ветвях спектра линейных волн [14,15].

Область B содержит значение параметра $p = 1/3$, соответствующее отсутствию внешнего потенциала для двухатомной цепочки. Этот случай и отвечающие ему точные солитонные решения будут рассмотрены отдельно в следующем разделе, хотя на фазовой плоскости в области B это значение и не выделено.

Особый интерес представляет область C , где внешняя "мягкая" нелинейность начинает конкурировать с внутренней "жесткой" нелинейностью. При частотах $\nu < -1$, т.е. под нижней ветвью спектра линейных волн, на фазовой плоскости (u_1, s) существуют особые точки типа седла с координатами II и III. Седла II соединены сепаратрисами типа N' . Этим сепаратрисам соответствуют движущиеся двухпараметрические околоселевые солитоны, которые на качественном уровне полностью аналогичны солитонам N' в областях A и B . Кроме сепаратрис N' также существуют сепаратрисы типа M , которые существенным образом отличаются от всех ранее рассмотренных типов сепаратрис. Сепаратрисы M выходят из седловых точек II, III и уходят на бесконечность ($u_1 \rightarrow \infty$). Соответствующие этим сепаратрисам решения не имеют физического смысла. На нижней ветви спектра линейных волн ($\nu = -1$) происходит первая бифуркация и в частотном промежутке $-1 < \nu < \tilde{\nu}_* < 1$ на фазовой плоскости (u_1, s) существуют особые точки типа седла с координатами I и III. При таких частотах существуют только сепаратрисы типа M , и солитонные решения отсутствуют. При $\nu = \tilde{\nu}_*$ происходит вторая бифуркация, при которой каждое из седел III расщепляется на центр III и два седла IV. Помимо сепаратрис M возникают также сепаратрисы L , соединяющие седла с координатами I. Движущиеся целевые солитоны L в этой области аналогичны движущимся целевым солитонам в областях A и B . Кроме того, седла IV соединены между собой сепаратрисами N' и \tilde{N}' , которым соответствуют целевые солитоны, аналогичные околоселевым солитонам N' и \tilde{N}' в области B . Отметим, что в области C

впервые возникают движущиеся двухпараметрические целевые солитоны, у которых амплитуды u_1, u_2 имеют ненулевые асимптотики на бесконечности $z \rightarrow \pm\infty$. Наконец, третья и последняя бифуркация происходит на верхней ветви спектра линейных волн ($\nu = 1$). Выше щели спектра линейных волн на фазовой плоскости (u_1, s) существуют особые точки типа седла с координатами IV. В этом частотном интервале имеется три типа сепаратрис: N', \tilde{N}' (солитонные) и M (нефизические). Соответствующие этим сепаратрисам решения аналогичны описанным ранее решениям для подобных сепаратрис. Существенной особенностью области C является то, что при таких значениях параметра p движущиеся двухпараметрические околоселевые солитоны существуют как ниже щели спектра линейных волн, так и выше ее. Во всех остальных областях возможных значений параметра p околоселевые солитоны могут существовать либо строго выше щели спектра линейных волн (области A и B), либо строго ниже ее (области D и E).

В областях D и E преобладающую роль играет внешняя "мягкая" нелинейность. Фазовые портреты в этих областях аналогичны фазовым портретам в областях A и B , однако они сдвинуты по оси s на $\pi/2$. Кроме того, бифуркации теперь происходят в "обратном порядке" (по мере уменьшения частоты ν). Выше щели спектра линейных волн (при $\nu > 1$) в областях D и E солитонные решения отсутствуют, а околоселевые солитоны существуют ниже щели (при $\nu < -1$). Бифуркационная частота $\tilde{\nu}_*$ в области D лежит внутри щели спектра линейных волн, а в области E — ниже ее.

В пределе $V \rightarrow 0$ граница между областями B и C соответствует значению параметра $p = 0$, граница между областями C и D — $p = -1$, а область E перестает существовать. Таким образом, при $V = 0$ мы получаем эволюционную картину фазового портрета системы (19), полностью совпадающую с рассмотренной в работе [7] для неподвижных целевых и околоселевых солитонов в двухатомной цепочке с внутренней и внешней нелинейностями. В противоположном предельном случае, когда скорость V стремится к своему максимальному значению $V \rightarrow \pm 1$, остаются только области A, B и E . Граница между областями B и E соответствует значению параметра $p = -1/3$.

Изменение знака внутренней нелинейности системы σ не приводит к существенно новым физическим результатам. Меняются только последовательность бифуркаций и области существования околоселевых солитонов. В частности, в областях A и B околоселевые солитоны будут существовать ниже щели спектра линейных волн, а в областях D и E — выше ее.

4. Точные солитонные решения

Для интегрирования системы (19) необходимо задать граничные условия, т.е. определить значение интеграла "движения" (20), соответствующее конкретному типу решения. Для этого используется вышеописанный качественный анализ системы дифференциальных уравнений,

основанный на построении фазового портрета системы. В частности, для получения различных типов солитонных решений необходимо брать значения интеграла (20), соответствующие сепаратрисам на фазовом портрете системы (19).

Аналитические выражения для всех типов солитонных решений системы (19) при произвольных значениях частоты ν и характеристики нелинейности p получаются согласно одной и той же процедуре. Поэтому в этом разделе мы ограничимся лишь рассмотрением частного случая двухатомной цепочки без внешнего потенциала ($p = 1/3$). Динамические двухпараметрические щелевые солитоны в такой системе были получены и проанализированы в работе [13]. Однако, как это было показано в предыдущем разделе, помимо щелевых солитонов в такой системе существуют также окошечные солитоны с частотами, лежащими выше щели спектра линейных волн.

В частотном диапазоне $1 < \nu < \tilde{\nu}_* = (2 - V^2)/(1 - V^2)$ ($p = 1/3$) на фазовом портрете системы (19) существует два типа сепаратрис: N и N' (рис. 3, б). Этим сепаратрисам соответствует значение интеграла (20) $H_0 = (\nu - 1)^2(1 + V)\sqrt{1 - V^2}/2$. После подстановки этого выражения в (20) и последующего интегрирования системы (19) получаются следующие выражения для амплитуды u_1 и фазы s солитонов N и N' :

$$u_1 = \left\{ \sqrt{1 - V^2} (1 + V)(\nu - 1)^2 \times \frac{1 + \gamma \sinh^2 \zeta}{2(1 \pm \sqrt{\nu} \cosh \zeta) + (\nu - 1)(1 + \gamma \sinh^2 \zeta)} \right\}^{1/2},$$

$$s = \arctan(\sqrt{\gamma} \sinh \zeta), \quad (24)$$

где $\gamma = \nu / [(\nu - 1)(1 - (1 - V^2)(\nu - 1))]$, $\zeta = 2\sqrt{(\nu - 1)(1 - (1 - V^2)(\nu - 1))}z$, а различные знаки соответствуют солитонам различных типов (верхний знак отвечает солитону N). Из уравнения (21) находим далее выражение для переменной q

$$q = [\nu - (\nu - 1)^2]Vz \pm \frac{V}{2\sqrt{\gamma(2 - V^2)(1 - V^2)^2}} \times \left\{ \frac{1 - a_2}{\sqrt{1 - a_1^2}} \arctan \left[\frac{\exp(-\zeta) + a_1}{\sqrt{1 - a_1^2}} \right] + \frac{a_1 - 1}{\sqrt{1 - a_2^2}} \arctan \left[\frac{\exp(-\zeta) + a_2}{\sqrt{1 - a_2^2}} \right] \right\}, \quad (25)$$

где $a_n = [1 - (1 - V^2)(\nu - 1) - (-1)^n(\nu - 1) \times \sqrt{(2 - V^2)(1 - V^2)}] / \sqrt{\nu}$, $n = 1, 2$.

Выражение для солитонов N и N' может быть записано в терминах смещений атомов при помощи соотношений (18), (15), (10), а также при учете перехода к исходным амплитудам, координате и времени: $x \rightarrow [\eta(2K_2 + \gamma_2)/(2K_2)]x$, $t \rightarrow (\eta\omega_0/2)t$, $A_i = \sqrt{(2K_2 + \gamma_2)\eta/(6|K_4|)}F_i$.

Найденные солитоны представляют собой движущиеся со скоростью V локализованные возбуждения, каждое из которых образовано двумя нелинейными волнами, распространяющимися навстречу друг другу с одинаковой частотой. Частота этих нелинейных волн и их волновые числа определяют два параметра солитона — его скорость V и частоту внутренней прецессии Ω в движущейся с солитоном системе координат

$$\omega = \omega_0 + \frac{\omega_0\eta}{2} \left(\Omega - \frac{V^2}{(1 - V^2)^{3/2}} \times \left[\Omega\sqrt{1 - V^2} - \left(\Omega - \sqrt{1 - V^2} \right)^2 \right] \right),$$

$$k_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\eta V}{(1 - V^2)^{3/2}} \times \left[\left(\Omega - \sqrt{1 - V^2} \right)^2 - \Omega\sqrt{1 - V^2} \right]. \quad (26)$$

Область локализации солитона пропорциональна $1/\eta$, а его амплитуда — $\sqrt{\eta}$, где η — введенный ранее малый параметр. Заметим, что в многоатомной цепочке амплитуда солитонного решения a и область его локализации η связаны соотношением $a \sim 1/\eta$.

Амплитуда смещений атомов в центре солитона

$$\xi^{(0)} = \sqrt{\frac{K_2\eta}{3K_4}} (\sqrt{\nu} \mp 1) (1 - V^2)^{1/4} (\sqrt{1 + V} + \sqrt{1 - V})$$

в зависимости от скорости солитона V и его частоты Ω может быть как больше, так и меньше амплитуды смещений атомов на бесконечности

$$\xi^{(\infty)} = \sqrt{\frac{K_2\eta}{3K_4}} \sqrt{\nu - 1} (1 - V^2)^{1/4} (\sqrt{1 + V} + \sqrt{1 - V}).$$

Необходимо также отметить, что фаза составляющих солитон нелинейных волн приобретает сдвиг

$$\Delta = \pi \pm \frac{V}{2\sqrt{\gamma(2 - V^2)(1 - V^2)}} \times \left\{ \frac{1 - a_2}{\sqrt{1 - a_1^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{a_1}{\sqrt{1 - a_1^2}} \right) \right] + \frac{a_1 - 1}{\sqrt{1 - a_2^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{a_2}{\sqrt{1 - a_2^2}} \right) \right] \right\}, \quad (27)$$

при изменении переменной $z = (x - Vt)/\sqrt{1 - V^2}$ от $-\infty$ до $+\infty$.

При частотах $\nu > \tilde{\nu}_*$ на фазовом портрете системы (19) существует четыре типа сепаратрис: $N, N', \tilde{N}, \tilde{N}'$ (рис. 3, с). Аналитическое выражение для движущихся окошечных солитонов, соответствующих этим сепаратрисам

ратрисам, имеет вид

$$u_1^{(n)} = \left\{ \frac{\nu_1 \nu - 1}{\sqrt{1 - V^2}} (1 + V) \frac{\nu_1 \cosh(2\zeta_1) - (-1)^n}{(\nu_1 \nu - 1) \cosh(2\zeta_1) + c_n} \right\}^{1/2},$$

$$s^{(n)} = \arctan \left(\sqrt{\frac{\nu_1 + 1}{\nu_1 - 1}} \tanh^{-n}(\zeta_1) \right),$$

$$q^{(n)} = -\nu_1 V z + V \frac{(\sqrt{1/\tilde{\nu}_* \mp \nu_1}) \sqrt{\nu_1^2 - 1}}{(1 - V^2) \sqrt{(\nu_1^2 - 1)^2 - c_n^2}} \times \arctan \left(\frac{(\nu_1 \nu - 1) \exp(2\zeta_1) + c_n}{\sqrt{(\nu_1^2 - 1)^2 - c_n^2}} \right), \quad (28)$$

где верхний индекс нумерует солитонные решения, соответствующие сепаратрисам N , N' ($n = 0$) и \tilde{N} , \tilde{N}' ($n = 1$), $\nu_1 = \nu/\tilde{\nu}_*$, $\zeta_1 = \sqrt{(\nu_1^2 - 1)\tilde{\nu}_*} z$, $c_n = (-1)^{n+1} \nu_1 (\tilde{\nu}_* - 1) \pm (\nu_1^2 - 1) \sqrt{\tilde{\nu}_*}$, $n = 0, 1$ (верхний знак соответствует солитонам N и \tilde{N} , а нижний — N' и \tilde{N}').

Частота и волновые числа нелинейных волн, образующих данные солитонные возбуждения, определяются соотношениями

$$\omega = \omega_0 + \frac{\eta \omega_0 \Omega}{2 - V^2},$$

$$k = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\eta V \Omega}{2 - V^2}. \quad (29)$$

Амплитуды осцилляций атомов в центре солитонного возбуждения и на бесконечности равны соответственно

$$\xi^{(0)} = \sqrt{\frac{K_2 \eta}{3K_4}} \left\{ \frac{\nu_1 \nu - 1}{\sqrt{1 - V^2}} \frac{\nu_1 - (-1)^n}{\nu_1 \nu - 1 + c_n} \right\}^{1/2} \times (\sqrt{1 + V} + \sqrt{1 - V}),$$

$$\xi^{(\infty)} = \sqrt{\frac{K_2 \eta}{3K_4}} \frac{\sqrt{\nu_1}}{(1 - V^2)^{1/4}} (\sqrt{1 + V} + \sqrt{1 - V}).$$

Фаза составляющих солитоны нелинейных волн приобретает сдвиг

$$\Delta^{(n)} = \pi n + (-1)^n 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{\nu_1 + 1}{\nu_1 - 1}} \right) + V \frac{(\sqrt{1/\tilde{\nu}_* \mp \nu_1}) \sqrt{\nu_1^2 - 1}}{(1 - V^2) \sqrt{(\nu_1^2 - 1)^2 - c_n^2}} \times \left[1 - \arctan \left(\frac{c_n}{\sqrt{(\nu_1^2 - 1)^2 - c_n^2}} \right) \right] \quad (30)$$

при изменении координаты z от $-\infty$ до $+\infty$.

Следует отметить, что во всех случаях степень локализации движущихся околоселевых солитонов пропорциональна $(1 - V)^2$, и при стремлении скорости V к максимальному значению ($|V| \rightarrow 1$) солитонные возбуждения делокализуются. В то же время отношение амплитуды

в центре солитона к амплитуде на бесконечности в пределе $|V| \rightarrow 1$ стремится к единице. Таким образом, при больших скоростях движущиеся околоселевые солитоны превращаются в нелинейные волны.

Рассмотренная в данной работе двухатомная цепочка с нелинейным межчастичным взаимодействием и нелинейным внешним потенциалом представляет собой наиболее полную модель одномерной нелинейной модулированной среды. В частности, при определенном соотношении между двумя нелинейностями динамические уравнения (13) аналогичны динамическим уравнениям, получаемым при рассмотрении нелинейной модулированной оптической среды [11,12,14,15]. В работе приводится полная классификация всех типов движущихся двухпараметрических щелевых и околоселевых солитонных решений системы. Также получены явные аналитические выражения для движущихся двухпараметрических околоселевых солитонов в частном случае, когда внешний потенциал отсутствует. Изучен процесс эволюции фазового портрета системы при изменении частоты нелинейного решения и соотношения между внутренней и внешней нелинейностями.

Список литературы

- [1] W. Chen, D.L. Mills. Phys. Rev. Lett. **58**, 2, 160 (1987).
- [2] D. Mills, J. Trullinger. Phys. Rev. **B36**, 2, 947 (1987).
- [3] O. Chubykalo, A. Kovalev, O. Usatenko. Phys. Rev. **B47**, 6, 3153 (1993).
- [4] A.S. Kovalev, K.V. Kladko, O.V. Usatenko. J. Phys. Soc. Jpn. **64**, 7, 2455 (1995).
- [5] O.V. Usatenko, A.S. Kovalev, A.A. Vialov. Fluctuation phenomena: Disorder and Nonlinearity / Ed. A.R. Bishop, S. Jimenez, L. Vazquez. World Scientific (1994). P. 286–291; O.V. Usatenko, A.C. Kovalev, A.A. Вялов. ФТТ **37**, 8, 2487 (1995).
- [6] O. Chubykalo, Yu. Kivshar. Phys. Rev. **E48**, 5, 4128 (1993).
- [7] A.S. Kovalev, O.V. Usatenko, A.V. Gorbach. Phys. Rev. **E60**, 2, 2309 (1999).
- [8] J. Coste, J. Peyraud. Phys. Rev. **B39**, 18, 13 086 (1989).
- [9] J. Coste, J. Peyraud. Phys. Rev. **B39**, 18, 13 096 (1989).
- [10] J. Peyraud, J. Coste. Phys. Rev. **B40**, 18, 12 201 (1989).
- [11] S. Wabnitz. Opt. Lett. **14**, 19, 1071 (1989).
- [12] A.B. Aceves, S. Wabnitz. Phys. Lett. **A141**, 1–2, 37 (1989).
- [13] A.S. Gorshkov, O.N. Ermakova, V.F. Marchenko. Nonlinearity **10**, 4, 1007 (1997).
- [14] A.C. Kovalev, O.V. Usatenko, A.V. Горбач. ФТТ **42**, 7, 1218 (2000).
- [15] A.S. Kovalev, O.V. Usatenko, A.V. Gorbach, submitted to Phys. Rev. E.
- [16] R. Lai, A.J. Sievers. Phys. Rep. **314**, 3, 147 (1999).
- [17] S.A. Kiselev, S.R. Bickham, A.J. Sievers. Phys. Rev. **B48**, 18, 13 508 (1993).
- [18] S.A. Kiselev, S.R. Bickham, A.J. Sievers. Phys. Rev. **B50**, 13, 9135 (1994).
- [19] C. Martijn de Sterke. Phys. Rev. **E48**, 5, 4136 (1993).
- [20] П.С. Ланда, В.Ф. Марченко. УФН **161**, 9, 201 (1991).
- [21] А.М. Косевич. Теория кристаллической решетки. Изд-во Харьк. ун-та, Харьков (1988).
- [22] А.М. Косевич, А.С. Ковалев. Введение в нелинейную физическую механику. Наук. думка, Киев (1989).