Косвенное взаимодействие мессбауэровских ядер

© А.Р. Кессель, В.А. Попов

Казанский физико-технический институт им. Е.К. Завойского Российской академии наук,
420029 Казань, Россия

E-mail: vladimir@dionis.kfti.knc.ru

(Поступила в Редакцию 4 декабря 2000 г.)

Получено выражение для оператора косвенного взаимодействия ядер через электромагнитное поле. Для описания свойств мессбауэровских центров был использован формализм псевдоспинов, обычно применяемый в теории оптических двухуровневых систем. Косвенное взаимодействие псевдоспинов выведено методом, заимствованным из теории сверхпроводимости. Оказалось, что потенциалы этого взаимодействия содержат слагаемые, убывающие как r^{-3}, r^{-2}, r^{-1}. Оценки показывают, что двухчастичное взаимодействие может вносить заметный вклад в ширину резонансной линии, например, в кристаллах, ячейки которого содержат ядра тулия.

В теории эффекта Мессбауэра обычно не принимают во внимание взаимодействие ядер друг с другом, поскольку считается, что оно сводится только к магнитному диполь-дипольному взаимодействию [1], которое значительно меньше связи ядра с электронной оболочкой атома. Связанные с этим взаимодействием коллективные эффекты слабо проявляются еще и потому, что потенциал его убывает как r^{-3}.

Между тем из квантовой оптики, например, известно [2,3], что косвенные взаимодействия локализованных частиц через поля-переносчики могут содержать слагаемые, убывающие медленнее с расстоянием (как r^{-2}, r^{-1}) и поэтому оказывающие более сильное влияние на физические свойства.

В мессбауэровской спектроскопии, благодаря более высоким, чем в оптике, резонансным частотам и относительной узости (высокой добротности) резонансных линий, можно ожидать более значительного вклада от косвенного взаимодействия. В связи с этим в настоящей работе предпринимается расчет косвенного взаимодействия мессбауэровских ядер через электромагнитное поле вакуума.

Вопрос о том, какие степени свободы оказываются здесь связаны косвенным взаимодействием не является тривиальным. Он решается введением псевдоспина $S = 1/2$, который всегда можно сопоставить любым двум уровням энергии, хорошо отделенным от других состояний. Подобный формализм широко используется в оптике и имеет устоявшуюся аббревиатуру ДУС — двухуровневая система [4,5].

Для вывода оператора косвенного взаимодействия используется метод, который хорошо зарекомендовал себя в теории сверхпроводимости со времени вывода Фрелихом [6,7] оператора взаимодействия электронов для теории БКШ.

1. Общая схема вывода оператора парного взаимодействия

В общем виде структуру гамильтониана двух взаимодействующих подсистем можно представить в форме

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_f + V_{af}, \tag{1}$$

где $\mathcal{H}_s$ — есть гамильтониан динамической подсистемы, состоящей из невзаимодействующих частиц, $\mathcal{H}_f$ — гамильтониан поля-переносчика взаимодействия, V_{sf} — оператор взаимодействия между частицами двух подсистем.

Метод расчета косвенных взаимодействий [7] состоит из двух этапов и строится на предположении, что для матричных элементов операторов выполняется неравенство

$$|V_{sf}| \ll |\mathcal{H}_s| + |\mathcal{H}_f|.$$

Первый этап — это переход к новому представлению с помощью унитарного преобразования $U = \exp\{-L\}$, где L — антиэрмитов оператор, удовлетворяющий условию

$$V_{sf} + [\mathcal{H}_s + \mathcal{H}_f, L] = 0. \tag{2}$$

В результате этого в новом представлении гамильтониан $\mathcal{H}$ приобретает форму

$$\mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_f + \frac{1}{2}[V_{sf}, L] + O\left(V_{sf}^3\right), \tag{3}$$

т.е. теряет линейные по V_{sf} слагаемые, так как предполагается, что генератор унитарного преобразования $L \sim |V_{sf}|/(|\mathcal{H}_s| + |\mathcal{H}_f|)$. Решением операторного уравнения (2) будет

$$L = \frac{1}{i\hbar} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{0} dt\, e^{\varepsilon t} V_{sf}(t),$$

$$V_{sf}(t) = \exp\{i(\mathcal{H}_s + \mathcal{H}_f)t/\hbar\} V_{sf} \times \exp\{-i(\mathcal{H}_s + \mathcal{H}_f)t/\hbar\}. \quad (4)$$

Второй этап заключается в усреднении выражения (3) для $\tilde{\mathcal{H}}$ по состояниям поля-переносчика взаимодействия, так что член второго порядка

$$W = \frac{1}{2} \langle [V_{sf}, L] \rangle \quad (5)$$

теории возмущений в разложении (3) перестает зависеть от переменных электромагнитного поля, но сохраняет зависимость от псевдоспиновых операторов различных частиц и вследствие этого приобретает смысл оператора их косвенного взаимодействия. Забегая вперед, можно отметить, что в целом ряде случаев, в том числе и в рассматриваемом здесь, это усреднение проводить не приходится, так как члены второго порядка в разложении (3) операторов поля не содержат.

2. Переход к эффективному двухуровневому гамильтониану

Как правило, мессбауэровские переходы осуществляются между состояниями ядра с различными значениями спинов. При этом каждое из этих состояний обычно бывает вырождено по величине проекции спина. Взаимодействие с внутренними локальными электрическими и магнитными полями может снять это вырождение. При этом возникает сверхтонкая структура ядерных уровней.

Будем вычислять взаимодействие одинаковых мессбауэровских ядер, спроектированное на определенную пару состояний $|I_g m_g\rangle$ и $|L_e m_e\rangle$ сверхтонкой структуры, на которой наблюдается мессбауэровский переход. Первое из них соответствует основному уровню энергии со спином I_g и его проекцией m_g, а второе — возбужденному состоянию со спином I_e и проекцией m_e. Тогда в качестве основного гамильтониана динамической подсистемы можно выбрать оператор

$$\mathcal{H}_s = \hbar\omega_0 \sum_j S_j^z, \quad (6)$$

где ω_0 — частота рассматриваемого перехода, S_j^z — оператор псевдоспина одного ядра, определенный на указанных уровнях [4].

В качестве переносчика взаимодействия будем рассматривать электромагнитное поле, гамильтониан которого имеет стандартную форму

$$\mathcal{H}_f = \hbar \sum_{\mathbf{k}\sigma} \omega_k \left(a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right), \quad (7)$$

где $a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ и $a_{\mathbf{k}\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения фотона с волновым вектором $\mathbf{k}$, частотой ω_k и поляризацией σ.

Гамильтониан взаимодействия ядер и электромагнитного поля имеет вид

$$V_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \sum_j \mathbf{j}_j \mathbf{A}(\mathbf{R}_j), \quad (8)$$

где $\mathbf{j}_j$ — ток j-го нуклона, а потенциал электромагнитного поля представлен в виде разложения по операторам рождения и уничтожения фотонов

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_j) = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(\frac{2\pi\hbar c}{Vk} \right)^{1/2} \left(a_{\mathbf{k}\sigma} \mathbf{e}_\sigma e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_j} + a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \mathbf{e}_\sigma^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_j} \right), \quad (9)$$

где $\mathbf{e}_{\pm 1}$ — векторы правой и левой круговой поляризации, $\mathbf{R}_j = \mathbf{r}_j + \mathbf{x}_j$ и $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{x}_j$ являются соответственно радиус-векторами ядра в лабораторной системе координат и нуклона в системе координат ядра, а V — объем, в котором квантуется электромагнитное поле. Суммирование, вообще говоря, должно вестись по всем нуклонам ядра. Однако поскольку в первом приближении можно считать, что свойства ядра определяются последним неспаренным нуклоном, можно считать, что индекс j пробегает по ядрам.

Осуществим переход от гамильтониана (8) к эффективному двухуровневому гамильтониану. Для этого необходимо найти матричные элементы гамильтониана (8) на векторах состояния $|I_g m_g\rangle$ и $|I_e m_e\rangle$. Матричные элементы для операторов, относящихся к ядрам и электромагнитному полю вычисляются отдельно. Процедура перехода к псевдоспинам становится более наглядной, если использовать приближение вращающейся волны [2,4]. В этом случае в эффективном гамильтониане исключаются слагаемые $S^+ a^\dagger$ и $S^- a$, которые осциллируют с частотами, равными сумме частоты перехода ω_0 и частоты фотона $\omega_k = ck$. В гамильтониане остаются члены, которые соответствуют процессам излучения фотона при переходе $|I_e m_e\rangle \to |I_g m_g\rangle$ и поглощения фотона при переходе $|I_g m_g\rangle \to |I_e m_e\rangle$. Таким образом, остается вычислить только матричные элементы $\langle I_g m_g, \mathbf{k}\sigma | V_{\text{int}} | I_e m_e \rangle$ и $\langle I_e m_e | V_{\text{int}} | I_g m_g, \mathbf{k}\sigma \rangle$, которые должны совпадать с матричными элементами двухуровневого гамильтониана

$$\langle g|V_{ge}|e\rangle \equiv \langle I_g m_g, \mathbf{k}\sigma | V_{\text{int}} | I_e m_e \rangle = \left(\frac{2\pi\hbar c}{Vk} \right)^{1/2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \langle I_g m_g | - \frac{1}{c} \mathbf{j}_j \mathbf{e}_\sigma^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_j} | I_e m_e \rangle \equiv g_{k\sigma}^* \langle g|S_j^-|e\rangle,$$

$$\langle e|V_{ge}|g\rangle \equiv \langle I_e m_e | V_{\text{int}} | I_g m_g, \mathbf{k}\sigma \rangle = \left(\frac{2\pi\hbar c}{Vk} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \langle I_e m_e | - \frac{1}{c} \mathbf{j}_j \mathbf{e}_\sigma e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_j} | I_g m_g \rangle \equiv g_{k\sigma} \langle e|S_j^+|g\rangle.$$

При вычислениях матричных элементов гамильтониана (8) полагалось, что имеет место магнитодипольный переход $M1$ ($I_g = 1/2$, $m_g = 1/2 \to I_e = 3/2$, $m_e = 3/2$) [1].

Эффективный гамильтониан взаимодействия псевдоспинов с электромагнитным полем в этих обозначениях имеет вид

$$V_{ge} = \sum_j \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(g_{k\sigma} S_j^+ a_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} + g_{k\sigma}^* S_j^- a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \right),$$

$$g_{k\sigma} = i \left(\frac{12\pi^2 \hbar c}{Vk} \right)^{1/2} \sigma \mathcal{D}_{1\sigma}^1 (\hat{\mathbf{z}} \to \hat{\mathbf{k}}) \left\langle \frac{1}{2} \middle| |M1| \middle| \frac{3}{2} \right\rangle^*, \quad (10)$$

где $\mathcal{D}_{1\sigma}^1(\hat{\mathbf{z}} \to \hat{\mathbf{k}})$ — матрица вращения собственных функций углового момента при переходе из лабораторной системы координат в систему координат, где ось z совпадает с вектором $\mathbf{k}$ [1], $\langle 1/2||M1||3/2\rangle$ — приведенный матричный элемент рассматриваемого перехода.

3. Взаимодействие мессбауэровских ядер

Оператор унитарного преобразования в псевдоспиновом представлении, соответстующий операторам (6), (7), (10), найдем по формуле (4)

$$L = \frac{1}{\hbar} \sum_j \sum_{\mathbf{k}\sigma} \Bigg(g_{k\sigma} S_j^+ a_{\mathbf{k}\sigma} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}}{\omega_k - \omega_0 + i\varepsilon} + g_{k\sigma}^* S_j^- a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}}{\omega_k - \omega_0 - i\varepsilon} \Bigg). \quad (11)$$

Тогда оператор косвенного взаимодействия мессбауэровских ядер примет вид

$$W = \frac{1}{2} \langle [\mathcal{H}', L] \rangle = -\frac{1}{\hbar} \sum_{ij} \sum_{\mathbf{k}\sigma} |g_{k\sigma}|^2 \left(S_i^+ S_j^- \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_{ij}}}{\omega_k - \omega_0 + i\varepsilon} + S_i^- S_j^+ \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{ij}}}{\omega_k - \omega_0 - i\varepsilon} \right). \quad (12)$$

Поскольку $\sigma^2 = 1$, а

$$\sum_\sigma \left| \mathcal{D}_{1\sigma}^1 (\hat{\mathbf{z}} \to \hat{\mathbf{k}}) \right|^2 = \left(\frac{1 + \cos\theta}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 - \cos\theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta),$$

то

$$\sum_\sigma |g_{k\sigma}|^2 = \frac{6\pi^2 \hbar c}{Vk} (1 + \cos^2\theta) \left| \left\langle \frac{1}{2} \middle| |M1| \middle| \frac{3}{2} \right\rangle \right|^2, \quad (13)$$

где θ — угол между осью z и вектором $\mathbf{k}$.

Перейдем от суммирования по k к интегрированию

$$\sum_{\mathbf{k}} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}.$$

Экспоненту разложим по сферическим функциям [8] и проинтегрируем по углам

$$\int d\Omega (1 + \cos^2\theta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{4\pi}{3} [4 j_0(kr) - (3\cos^2\vartheta - 1) j_2(kr)], \quad (14)$$

где ϑ — угол между осью z и радиус-вектором $\mathbf{r}$, а $j_l(x)$ — сферические функции Бесселя. В результате этих операций преобразованный гамильтониан взаимодействия приобретает следующую форму:

$$W = -\frac{1}{2} \sum_{ij} (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) \int_0^\infty \frac{k}{k - k_0} [4 j_0(kr_{ij}) - (3\cos^2\vartheta_{ij} - 1) j_2(kr_{ij})] \left| \left\langle \frac{1}{2} \middle| |M1| \middle| \frac{3}{2} \right\rangle \right|^2 dk, \quad (15)$$

где $k_0 = \omega_0/c$.

Для вычисления интеграла (15) необходимо знать функциональную зависимость приведенного матричного элемента от k. Если принять, что потенциал ядра имеет вид осцилляторной ямы, то для магнитодипольного перехода в первом приближении можно считать, что

$$\left\langle \frac{1}{2} \middle| |M1| \middle| \frac{3}{2} \right\rangle = Aka e^{-(k\rho)^2/4}, \quad (16)$$

где A — константа, не зависящая от k, а ρ — радиус ядра. Парциальная ширина γ-излучения на частоте перехода

$$\Gamma_\gamma(k_0) \equiv \Gamma_\gamma = \frac{8\pi k_0}{2I_e + 1} \left| \left\langle \frac{1}{2} \middle| |M1(k_0)| \middle| \frac{3}{2} \right\rangle \right|^2 \simeq 2\pi A^2 k_0^3 \rho^2, \quad (17)$$

поскольку $k_0 \rho \ll 1$. Таким образом, можно записать

$$\left| \left\langle \frac{1}{2} \middle| |M1| \middle| \frac{3}{2} \right\rangle \right|^2 = \frac{\Gamma_\gamma k^2}{2\pi k_0^3} e^{-(k\rho)^2/2}. \quad (18)$$

Подставив (18) в (15), получим

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} \left(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+ \right). \quad (19)$$

Потенциалы A_{ij} определяются выражением

$$A_{ij} = -\frac{\Gamma_\gamma}{4\pi} [4\Phi_0(\beta_{ij}, p) - (3\cos^2\vartheta_{ij} - 1)\Phi_2(\beta_{ij}, p)], \quad (20)$$

$$\Phi_l(\beta, p) \equiv \int_0^\infty \frac{q^3 e^{-p^2q^2}}{q-1} j_l(\beta q) dq, \quad l = 0, 2, \tag{21}$$

где $p = k_0\rho/\sqrt{2}$, $\beta = k_0 r$. Получить точный аналитический вид функциональной зависимости для Φ_l не удается. В приложении показано, как можно приближенно проинтегрировать выражения (21), имея в виду малость параметра p. В этом случае функция Φ_l практически не зависит от p,

$$\Phi_0(\beta) = \pi\frac{\cos\beta}{\beta} - 3\frac{\cos 2\beta}{\beta^2} + \frac{\sin 2\beta}{\beta^3} - \frac{f(\beta)}{\beta}, \tag{22}$$

$$\Phi_2(\beta) = -\pi\frac{\cos\beta}{\beta} + 3\pi\frac{\sin\beta}{\beta^2} + 3\frac{\cos 2\beta}{\beta^2} + 3\pi\frac{\cos\beta}{\beta^3}$$
$$- 4\frac{\sin 2\beta}{\beta^3} + \frac{f(\beta)}{\beta} - 3\frac{g(\beta)}{\beta^2} - 3\frac{f(\beta)}{\beta^3}, \tag{23}$$

$$f(\beta) = \sin\beta\,\mathrm{Ci}\,(\beta) - \cos\beta\left(\mathrm{Si}\,(\beta) - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$g(\beta) = -\cos\beta\,\mathrm{Ci}\,(\beta) - \sin\beta\left(\mathrm{Si}\,(\beta) - \frac{\pi}{2}\right),$$

где $\mathrm{Si}(\beta)$ и $\mathrm{Ci}(\beta)$ — интегральные синус и косинус. Функции $f(\beta)$ и $g(\beta)$ монотонно убывают с ростом β. Для больших значений аргумента эти функции могут быть аппроксимированы более простыми зависимостями $f(\beta) \sim 1/\beta$, $g(\beta) \sim 1/\beta^2$.

4. Обсуждение результатов

Для экспериментальных проявлений взаимодействия (19) наиболее удобным представляется измерение его вклада в сдвиг и ширину линии поглощения сигнала. В низкотемпературном приближении ($\hbar\omega_0 \ll kT$, $\langle S_i^z \rangle = -1/2$) первый и второй моменты линии поглощения для системы частиц, взаимодействие которых описывается оператором (19), имеют форму [9]

$$M_1 = \frac{1}{N}\sum_{ij} A_{ij}, \quad M_2 = \frac{1}{N}\sum_i\left(\sum_j A_{ij}\right)^2. \tag{24}$$

Вычисление суммы в формулах (24) для рассматриваемых в этой работе потенциалов (20) является довольно сложной задачей. Это обусловлено тем, что длина волны гамма-излучения меньше межатомного расстояния и из-за наличия осциллирующих функций нельзя совершить обычный в таких ситуациях переход от суммирования к интегрированию. Кроме того, системы с регулярным расположением мессбауэровских ядер требуют иных методов вычислений, нежели вещества, в которых мессбауэровские центры имеют малую концентрацию. Качественная оценка для веществ с небольшой концентрацией n мессбауэровских изотопов (образец сферической формы радиуса R) показывает, что величина моментов определяется только последним слагаемым в (22), а вкладом осциллирующих слагаемых можно пренебречь. Уширение резонансной линии, которое в этих оценках описывается вторым моментом M_2, равно

$$\Gamma_{ss} = \Gamma_\gamma R n k_0^{-2}. \tag{25}$$

Для изотопа Fe^{57}, доля которого в обычных условиях составляет 2%, а $\hbar\omega_0 = 14.4\,\mathrm{keV}$, отношение $\Gamma_{ss}/\Gamma_\gamma \sim 10^{-3}$. Для обогащенных образцов это отношение может достигать 10^{-1}. Эта оценка хорошо согласуется с тем, что для мессбауэровской линии железа работает одночастичная модель, хотя двухчастичное взаимодействие, по-видимому, также вносит вклад в уширение линии.

Согласно (25), взаимодействие (19) наиболее сильно может проявиться в веществах, у которых концентрация мессбауэровских изотопов велика, а величина перехода относительно мала. Этим условиям удовлетворяет Tm^{169}, со стопроцентным содержанием мессбауэровских ядер и $\hbar\omega_0 = 8.4\,\mathrm{keV}$. Для него вклад в ширину линии, оцененный по формуле (25), оказывается порядка естественной ширины линии Γ_γ. В таких случаях эксперименты по изучению зависимости формы линии от концентрации ядер или размеров образца могут послужить средством для обнаружения двухчастичных взаимодействий мессбауэровских ядер.

Выше рассмотрено косвенное взаимодействие только одной пары спиновых подуровней мессбауэровских ядер. Результат (19)–(23) просто обобщается на случай нескольких подуровней

$$W = \frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{m_g m_e} A^{ij}_{m_g m_e}\left(P^i_{m_g m_e} P^j_{m_e m_g} + P^j_{m_g m_e} P^i_{m_e m_g}\right), \tag{26}$$

где $P^i_{m_g m_e}$ — проективные операторы, в которых единственным отличным от нуля является матричный элемент, соответствующий переходу $|I_g m_g\rangle \to |I_e m_e\rangle$, а потенциалы $A^{ij}_{m_g m_e}$ имеют структуру, аналогичную (20) для каждого разрешенного перехода $|I_g m_g\rangle \to |I_e m_e\rangle$. От выражения (20) они отличаются только числовым множителем, связанным с вычислением матричного элемента, и значением частоты перехода, входящей в функции (22) и (23). Отметим, что (26) соответствует так называемой секулярной части двухчастичного взаимодействия, которая наиболее сильно проявляется в резонансной спектроскопии.

Приложение. Вычисление интегралов

Для определения аналитического вида зависимости потенциала косвенного взаимодействия (19) от расстояния между ядрами необходимо вычислить интегралы вида (21). Точное интегрирование провести не удается. Однако, приняв во внимание, что параметр $p \sim 10^{-4}$, можно с хорошей степенью точности выполнить приближенное интегрирование.

Рассмотрим в качестве примера функцию $\Phi_0(\beta)$. Интеграл Φ_2 вычисляется аналогичным образом. Прежде всего выполним замену $\xi = q - 1$, после чего разобъем область интегрирования на два интервала

$$\Phi_0 = \left(\int_{-1}^{1} + \int_{1}^{\infty}\right) \frac{(\xi+1)^2 e^{-p^2(\xi+1)^2}}{\xi} \sin(\beta[\xi+1])d\xi. \quad (27)$$

В первом интеграле можно положить $\exp(-p^2[\xi+1]^2) \simeq 1$. Тогда

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\xi+1)^2}{\xi} \sin(\beta[\xi+1])d\xi$$

$$= \frac{1}{\beta} - 3\frac{\cos 2\beta}{\beta} + \frac{\sin 2\beta}{\beta^2} - 2\,\mathrm{Si}\,(\beta)\cos\beta. \quad (28)$$

Второй интеграл разобъем на три слагаемых, два из которых можно вычислить точно,

$$\int_{1}^{\infty} \xi e^{-p^2(\xi+1)^2} \sin(\beta[\xi+1])d\xi$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2p} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{4p^2}\right\} \left(\frac{\beta}{p^2} - \mathrm{erfi}\left(\frac{\beta}{2p}\right)\right), \quad (29)$$

$$2\int_{1}^{\infty} e^{-p^2(\xi+1)^2} \sin(\beta[\xi+1])d\xi$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{4p^2}\right\} \mathrm{erfi}\left(\frac{\beta}{2p}\right). \quad (30)$$

В сумме они дают выражение, которое при $p \ll 1$ ведет себя как $-1/\beta$. Функция $\mathrm{erfi}\,(z)$ является мнимым интегралом ошибок $\mathrm{erfi}\,(z) = -i\,\mathrm{erf}\,(iz)$.

Для оставшегося интеграла были выполнены численные оценки, которые показали, что с точностью порядка 10^{-6}, он может быть аппроксимирован выражением

$$\int_{1}^{\infty} e^{-p^2(\xi+1)^2} \sin(\beta[\xi+1])\frac{d\xi}{\xi} \simeq \int_{1}^{\infty} \sin(\beta[\xi+1])\frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \cos\beta\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}\,(\beta)\right) - \sin\beta\,\mathrm{Ci}\,(\beta). \quad (31)$$

Сложив выражения (28)–(30), мы придем к форме потенциала (22).

Отметим, что при использовании параметров, характерных для данной задачи, сравнение выражений (22) и (23) с результатами численного интегрирования дает разницу порядка 10^{-6}.

Список литературы

[1] М.А. Андреева, Р.Н. Кузьмин. Мессбауэровская гамма-оптика. Изд-во МГУ, М. (1982). 352 с.

[2] P.W. Milonni, P.L. Knight. Phys. Rev. **A10**, *4*, 1096 (1974).

[3] Y. Ben-Aryeh, C.M. Bowden, J.C. Englund. Phys. Rev. **A34**, *5*, 3917 (1986).

[4] Л. Аллен, Дж. Эберли. Оптический резонанс в двухуровневые атомы. Мир. М. (1978). 222 с.

[5] G.S. Agarwal. Quantum Statistic Theories of Spontaneous Emission and Their Relation to Other Approaches. Springer Tracts in Modern Physics. Vol. **70** (1974).

[6] H. Fröhlich. Phys. Rev. **79**, *2*, 845 (1950).

[7] H. Fröhlich, H. Pelzer, S. Zienau. Phil. Mag. **41**, *314*, 221 (1950).

[8] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. Наука, М. (1989). 767 с.

[9] А. Абрагам, М. Гольдман. Ядерный магнетизм: порядок и беспорядок. Т. 2. Мир, М. (1984). 360 с.