Предел больших N в статистической физике и одночастичное уравнение Шредингера

 Б.Н. Шалаев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия
Университет г. Эссен, D-45117 Эссен, Германия
E-mail: shalaev@izing.ioffe.rssi.ru

(Поступила в Редакцию 12 мая 2000 г.)

Рассматриваются d-мерные нелинейные векторные σ-модели, такие как $O(N)$, $SU(N)$ и CP^N, в пределе бесконечного числа компонент N. Показано, что уравнение для двухточечной корреляционной функции указанных систем совпадает с уравнением Шредингера для квантовой частицы, двигающейся в δ-образной потенциальной яме $(-T)\delta(\mathbf{x})$, где T — температура. Это уравнение правильно описывает изучаемые системы как выше, так и ниже точки Кюри. В рамках данного подхода рассмотрено точное критическое поведение $SU(N)$-инвариантной модели Гинзбурга–Ландау во внешнем однородном магнитном поле в окрестности верхнего критического магнитного поля. Критические индексы этой системы совпадают с индексами сферической модели в случайном магнитном поле. Найдено точное уравнение линии непрерывных фазовых переходов $H_{c2}(T)$, позволяющее определить ее асимптотики в областях сильных и слабых полей. Обсуждаются связь между одночастичным уравнением Шредингера и критическими явлениями, а также приложения этого метода к различным моделям физики твердого тела и статистической механики.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 98-02-18299.

В современной статистической механике и квантовой теории поля весьма популярным является подход, основанный на разложении по степеням малого параметра $1/N$, где N — число компонент параметра порядка. Хорошо известно, что статистические модели в пределе бесконечного N являются идеальной теоретической лабораторией для исследователей, позволяющей изучить все существенные особенности поведения систем с непрерывной группой симметрии [1–8].

Стандартным методом исследования теоретико-полевых моделей и многочастичных систем является решение бесконечной нелинейной системы уравнений Швингера–Дайсона [1–3,6]. Легко показать, что предел $N \to \infty$ эквиавалентен приближению Хартри–Фока, поэтому нахождение решений соответствующих уравнений не представляет труда. В настоящей работе показано, что в этом пределе двухточечные корреляционные функции $\langle S_a^*(\mathbf{x})S_b(0)\rangle$ нелинейных сигма-моделей являются решением одночастичного уравнения Шредингера (УШ) для частицы, которая движется в потенциале $(-T)\delta(\mathbf{x})$, где T — температура. Следует отметить, что это справедливо для целого ряда векторных нелинейных сигма-моделей, например, для CP^N, $O(N)$ и $SU(N)$.

Интересно, что возникающее УШ появилось много лет назад в контексте квантовой теории поля в качестве "игрушечной" нерелятивистской модели для таких полевых эффектов, как размерная трансмутация и динамическая генерация массы [9]. Отметим, что некоторые аспекты этой проблемы совсем недавно рассматривались в работе [10], где обсуждалось поведение энергии и радиуса связанного состояния квантовой частицы вблизи порогового значения глубины потенциальной ямы. Было замечено, что критическое поведение этих величин описывается критическими индексами сферической модели, т.е. N-компонентного гайзенберговского ферромагнетика в пределе $N \to \infty$ [10].

Замечательно, что аналогичные ренормгрупповые уравнения возникают при исследовании свойств разреженного Бозе-газа с короткодействующими силами [11,12], а также при рассмотрении фазовых переходов в системах, содержащих протяженные линейные объекты (струны), такие, как абрикосовские вихри, полимеры, дислокации, доменные стенки (в двумерном случае) и т.д. [13], которые, казалось бы, не имеют ничего общего с нелинейными сигма-моделями при больших N.

Одна из целей настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что фактически мы имеем дело с отдельными частными проявлениями универсального критического поведения векторных нелинейных сигма-моделей, в пределе больших N. Оказывается, что все эти модели эквивалентны обычному УШ в δ-образным потенциалом. Таким образом, одночастичная квантовая механика позволяет дать очень простую и, возможно, полезную интерпретацию критических явлений в статистической физике.

Основным и весьма мощным инструментом исследования критических явлений является метод ренормализационной группы (РГ) [2,3]. Среди специалистов широко распространено убеждение, что этот метод работает только для систем с бесконечным числом степеней свободы, для которых характерно наличие ультрафиолетовых расходимостей в диаграммах теории возмущений. Поскольку в квантовой механике таких расходимостей нет, то и метод РГ неприменим. Однако при этом часто забывают, что данное рассуждение неверно для сингулярных квантово-механических потенциалов, нуждающихся в ультрафиолетовой регуляризации, например, для δ-функции. В квантовой механике преобразование РГ представляет собой так называемую изоспектральную деформацию, т.е. преобразование потенциальной энергии, не меняющее спектра. Теория таких преобразований тесно связана с теорией солитонов и с настоящее время представляет собой хорошо разработанную область математической физики, которой посвящено огромное число книг, обзоров и статей (см., например, [14,15]).

В данной статье метод уравнения Шредингера применяется также для исследования $SU(N)$-инвариантной модели Гинзбурга–Ландау (ГЛ) во внешнем однородном магнитном поле. История этой модели, описывающей сверхпроводник II рода в окрестности верхнего критического поля $H_{c2}(T)$ и имеющей огромное значение для физики твердого тела и технических приложений, восходит к началу 50-х годов и детально описана в мировой литературе (см. обзоры [16,17]).

Впервые решение модели ГЛ вблизи $H_{c2}(T)$ при бесконечном N было дано в работе Аффлека и Брезэна [18] в 1985 г. и с тех пор многократно рассматривалось в литературе (к сожалению, иногда без ссылок на [18], см. [19–21] и дискуссию в [22,23]). В отличие от обычной сферической модели решение модели ГЛ в указанном пределе нетривиально, поэтому не случайно, что различные группы исследователей получали противоречащие друг другу результаты. Тем неожиданней оказался правильный ответ, впервые полученный в работе [24]. Оказалось, что истинное основное рассматриваемой модели при $N = \infty$ существенно отличается от абрикосовского, которое является неустойчивым (см. далее), поэтому некоторые прежние результаты неправильны [24]. Далее показано, что метод УШ дает результаты, совпадающие с аналогичными результатами [24].

Статья построена следующим образом. В разделе 1 приводится вывод уравнения Шредингера для двухточечной корреляционной функции d-мерной $SU(N)$-симметричной нелинейной сигма-модели в пределе бесконечного N. В разделе 2 метод ренормгруппы применяется для исследования полученного уравнения и обсуждаются содержательные аналогии между квантовой механикой и теорией фазовых переходов. Исследование критических свойств модели ГЛ в окрестности верхнего критического магнитного поля содержится в разделе 3. Применение развитого метода к другим статистическим моделям и обсуждение результатов дано в заключительном разделе.

В настоящей работе использовались некоторые результаты, полученные автором в [25].

1. Уравнение Шредингера для двухточечной корреляционной функции

Рассмотрим $SU(N)$-симметричную спиновую модель, заданную на d-мерной гиперкубической решетке. Ее гамильтониан имет обычный вид

$$H = -J \sum_{\langle i,j\rangle} (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^* + \text{h.c.}), \tag{1}$$

где переменная $\mathbf{S} = (S_i, \dots, S_N)$ представляет собой N-компонентный комплексный единичный вектор

$$S_a(\mathbf{x}) S_a^*(\mathbf{x}) = 1. \tag{2}$$

Угловые скобки $\langle i, j\rangle$ обозначают суммирование по ближайшим соседям, J — обменный интеграл.

Нелинейная сигма-модель представляет собой континуальный предел решеточной модели (1)

$$H = \frac{J}{2} \int d^d x |\partial_\mu S_a|^2. \tag{3}$$

Подразумевается, что по дважды встречающимся индексам $\mu = 1, \dots, d$, $a = 1, \dots, N$ производится суммирование. В статистической сумме системы (3)

$$Z = \int \prod_{a=1}^{N} DS_a DS_a^* \exp\Big(-\frac{H}{T}\Big) \delta(|\mathbf{S}|^2 - 1) \tag{4}$$

константа спинового взаимодействия J для удобства включена в температуру T.

Выведем теперь уравнение для двухточечного коррелятора в неупорядоченной фазе $T > T_c$, в которой симметрия $SU(N)$ является ненарушенной

$$G_{ab}(\mathbf{x}) = \langle S_a(\mathbf{x}) S_b(0)\rangle. \tag{5}$$

Следуя [5], воспользуемся представлением величины (5) в виде континуального интеграла

$$G_{ab}(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \int \prod_{a=1}^{N} DS_a DS_a^* D\lambda S_a(\mathbf{x}) S_b^*(0) \times \exp\big[-A_1\big(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{x})\big)\big],$$

$$Z = \int \prod_{a=1}^{N} DS_a DS_a^* D\lambda \exp\big[-A_1\big(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{x})\big)\big],$$

$$A_1\big(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{x})\big) \equiv \frac{1}{2T} \int d^d x \big[|\partial_\mu S_a|^2 + \lambda(|\mathbf{S}|^2 - 1)\big], \tag{6}$$

в котором $A_1\big(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{x})\big)$ — эффективное действие, а $\lambda(\mathbf{x})$ — множитель Лагранжа, обеспечивающий выполнение условия (2). Интегрируя по полям $S_a(\mathbf{x})$, получаем [5]

$$G_{ab}(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \int D\lambda G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \lambda) \exp\big[-A_2\big(\lambda(\mathbf{x})\big)\big],$$

$$Z = \int D\lambda \exp\big[-A_2\big(\lambda(\mathbf{x})\big)\big],$$

$$A_2\big(\lambda(\mathbf{x})\big) = \frac{1}{2T} \int d^d x \Big[\lambda(\mathbf{x}) - \frac{N}{2} \mathrm{Tr}\log\big(-\Delta + \lambda(\mathbf{x})\big)\Big], \tag{7}$$

где Δ — оператор Лапласа и

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \lambda) = \Big\langle y \Big| \frac{1}{-\Delta + \lambda} \Big| \mathbf{x} \Big\rangle. \tag{8}$$

Подчеркнем, что в пределе $N \to \infty$ величина TN остается постоянной, поэтому континуальный интеграл (7) можно вычислить методом перевала [2,3,5]

$$\langle S_a(\mathbf{x}) S_b^*(0)\rangle = T\delta_{ab} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \lambda_0), \tag{9}$$

где λ_0 — седловая точка. Уравнение для искомой функции Грина имеет элементарный вид [2–5]

$$[-\Delta + m^2] G_{ab}(\mathbf{x}) = T\delta_{ab}\delta(\mathbf{x}). \tag{10}$$

Здесь $m^2 \equiv \lambda_0$. С помощью уравнения (2), играющего роль граничного условия при совпадающих аргументах $G_{cc}(0) = 1$, неоднородное уравнение (10) легко превратить в однородное. Вставив единицу в правую часть уравнения (10), а именно $T\delta_{ab}\delta(\mathbf{x}) = T\delta_{ab}\delta(\mathbf{x}) G_{cc}(\mathbf{x})$, получим

$$[-\Delta + m^2] G_{ab}(\mathbf{x}) = T\delta_{ab}\delta(\mathbf{x}) G_{cc}(\mathbf{x}). \tag{11}$$

В симметричной фазе при $T > T_c$ удобно ввести "волновую функцию" $G_{ab}(\mathbf{x}) \equiv \delta_{ab}\Psi(\mathbf{x})$. Подставляя ее в (11), получаем следующее уравнение для собственных функций и собственных значений:

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{x}) = -|E|\Psi(\mathbf{x}), \tag{12}$$

в котором гамильтониан $\hat{H}$ равен

$$\hat{H} = -\Delta - TN\delta(\mathbf{x}), \quad |E| = m^2. \tag{13}$$

Уравнение (12) есть не что иное, как стационарное уравнение Шредингера для квантовой частицы, движущейся в δ-образном потенциале, причем одночастичная функция Грина соответствует низшему собственному значению в спектре гамильтониана (13). Заметим, что полученное уравнение возникло в результате двойного предельного перехода в решеточной модели (12): континуального и $N \to \infty$. Знак константы связи T соответствует притяжению, т. е. частица двигается в потенциальной яме, имеющей единственный дискретный уровень. С геометрической точки зрения это результат того, что спиновая переменная принадлежит компактному многообразию — сфере S^{2N-1}.

Как уже отмечалось, граничным условием для "волновой" функции является уравнение (2). Поскольку мы имеем дело с одночастичным уравнением Шредингера, то энергия дискретного уровня не равна энергии связанного состояния двух частиц, принадлежащих фундаментальному N-плету рассматриваемой модели.

2. Квантовая механика одной частицы и критические явления

В этом разделе мы опишем метод РГ применительно к УШ с δ-образным потенциалом и детально обсудим соответствия между теорией фазовых переходов и пороговыми явлениями в квантовой механике в духе работ [9,10].

Найдем собственные функции и собственные значения дискретного спектра d-мерного УШ (12). Это элементарно и легко выполняется с помощью преобразования Фурье

$$(k^2 + m^2)\psi(\mathbf{k}) = TN\Psi(0), \tag{14}$$

где

$$\psi(\mathbf{k}) = \int d^d x \Psi(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{kx}),$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \psi(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{kx}). \tag{15}$$

Из (14) следует, что

$$\Psi(0) = TN\Psi(0) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d (k^2 + m^2)},$$

$$1 = TN \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d (k^2 + m^2)}. \tag{16}$$

Последнее соотношение связывает энергию связанного состояния и константу связи (температуру) T [9]. Интеграл в правой части (16) расходится, поскольку $\delta(\mathbf{x})$ является "сингулярным" потенциалом в размерности $d \geqslant 2$, требующим введения обрезания $\Lambda = a^{-1}$ на малых расстояниях (a — ширина ямы).

Энергия связанного состояния является физической наблюдаемой величиной, не зависящей от выбора обрезания. Для этого необходимо потребовать, чтобы константа связи $T(\Lambda)$ зависела от Λ таким образом, чтобы энергия E не зависела от Λ. Фактически мы имеем дело с простейшим случаем изоспектральной деформации, т. е. преобразованием потенциальной энергии, не меняющей спектра задачи. Как известно, в одномерном случае имеется бесконечная группа таких деформаций, изоморфная группе симметрии уравнения Кортевега–де-Вриза (КдВ) [14,15]. В отличие от одномерного уравнения КдВ здесь речь идет об изоспектральных преобразованиях для d-мерного уравнения Шредингера (12).

После элементарного вычисления уравнение (16) принимает вид

$$1 = TN\left(\frac{S_d \Lambda^{d-2}}{(2\pi)^d d - 2} - K_d m^{d-2}\right),$$

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad K_d = \frac{1}{2^d \sin(\pi d/2)\Gamma(d/2)\pi^{(d-2)/2}}, \tag{17}$$

где S_d есть площадь единичной d-мерной сферы. В духе теории критических явлений удобно ввести безразмерную константу связи $t = T\Lambda^{2-d}$, уравнение для которой имеет вид

$$\Lambda \frac{dt}{d\Lambda} = (d-2)t - t^2. \tag{18}$$

Из этого уравнения следует существование критического значения константы связи или температуры Кюри (фиксированной точки)

$$T_c = \frac{(d-2)(2\pi)^d}{NS_d} \Lambda^{2-d}. \tag{19}$$

Обсуждение полученных уравнений можно вести, используя либо терминологию элементарной квантовой механики, либо язык современной теории фазовых переходов и критических явлений.

Итак, с одной стороны, мы рассматриваем движение квантовой частицы в сингулярной потенциальной яме.

В двумерном случае гамильтониан содержит только безразмерные параметры и является масштабно-инвариантным. Тем не менее в спектре имеется единственный дискретный уровень $|E_{bs}| \equiv m^2$, появление которого означает динамическую генерацию массы. В такой яме независимо от ее глубины всегда есть связанное состояние. Если размерность пространства больше двух, то имеется пороговое значение глубины ямы, выше которого имеется единственный дискретный уровень. В мелкой яме, т. е. ниже порога, щель в спектре отсутствует и имеется только непрерывный спектр, начинающийся с нуля. Существенное различие между двумя измерениями и более высокими размерностями состоит именно в наличии порога.

Энергия связанного состояния E_{bs} непрерывно зависит от константы связи и по мере приближения к порогу сверху убывает по закону $|E_{bs}| \sim |T - T_c|^{1/(d-2)}$. В то же время характерный размер волновой функции связанного состояния $\xi \sim E_{bs}^{1}$ растет как $\xi \sim \tau^{-\nu}$, $\tau = (T - T_c)/T_c$. Асимптотика волновой функции дискретного спектра на больших расстояниях $\xi \ll x$ имеет вид

$$\Psi(x) \sim \frac{\exp(-x/\xi)}{x^{(d-1)/2}}. \qquad (20)$$

Ниже порога $T \leqslant T_c$, когда щель исчезает, $E_{bs} = 0$, волновая функция приобретает степенной вид

$$\Psi(x) \sim x^{2-d}. \qquad (21)$$

С другой стороны, на языке статистической механики в рассматриваемой спиновой модели (допустим для простоты, что это d-мерный гайзенберговский ферромагнетик при $N \to \infty$) при $d \geqslant 2$ происходит фазовый переход II рода в точке Кюри (19). В симметричной фазе парная спиновая функция Грина описывается формулой (20). В упорядоченной фазе щель в спектре исчезает и в системе возникают безмассовые голдстоуновские возбуждения (спиновые волны) со степенным коррелятором (21). Бета-функция (18) — это хорошо известная функция Гелл–Манна–Лоу сферической модели, критические индексы которой находятся из формул квантовой механики

$$\nu = \frac{1}{d-2}, \quad \eta = 0.$$

В двумерном случае непрерывная симметрия не может быть спонтанно нарушена (теорема Мермина–Вагнера), поэтому температура Кюри (нетривиальная фиксированном точка (19)) обращается в нуль, а критический индекс корреляционного радиуса ν — в бесконечность. В системе имеет место динамическая генерация массы

Таблица 1. Соответствие между квантовой механикой и статистической физикой

Квантовая механика	Статистическая физика
Волновая функция $\psi(\mathbf{x})$	Коррелятор $G(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{S}^*(0)\rangle$
Квантовая яма $-T\delta(\mathbf{x})$	Константа связи T
Связанное состояние	Динамическая генерация массы
Энергетическая щель E_{bs}	Обратный корреляционный радиус ξ^{-1}
Генератор изоспектральных деформаций	Бета-функция $\beta(T)$
Порог T_c	Температура Кюри T_c
$E_{bs} \sim (T - T_c)^{\nu}$;	$\xi \sim (T - T_c)^{-\nu}$;
$\nu = 1/(d-2)$	$\nu = 1/(d-2)$
$T > T_c$;	$T > T_c$;
$\psi(\mathbf{x}) \sim x^{(1-d)/2} \exp(-x/\xi)$	$G(\mathbf{x}) \sim x^{(1-d)/2} \exp(-x/\xi)$
$T \leqslant T_c$; $\psi(\mathbf{x}) \sim x^{2-d}$	$T \leqslant T_c$; спиновые волны $G(\mathbf{x}) \sim x^{2-d}$
Нет аналога	Локальный параметр порядка $\langle \mathbf{S}(\mathbf{x})\rangle$

Таблица 2. Критические индексы d-мерной сферической модели (СМ) при $d = 3$ и 8/3, а также моделей Изинга (МИ) и трехкомпонентной модели Поттса (МП) на динамических планарных решетках (ДПЛ)

Критический индекс	СМ d измерений	СМ ($d = 3$) и МИ на ДПЛ	СМ ($d = 8/3$) и МИ на ДПЛ
α	$(d-4)/(d-2)$	-1	-2
β	1/2	1/2	1/2
γ	$2/(d-2)$	2	3
δ	$(d+2)/(d-2)$	5	7
$d\nu$	$d/(d-2)$	3	4

(асимптотическая свобода), другими словами, все возбуждения являются массивными. Замечательно, что на языке квантовой механики эта теорема означает отсутствие пороговой глубины для двумерной ямы.

Аналогия между квантовой механикой и критическими явлениями, разумеется, не является полной, потому что в квантовой механике конечного числа частиц не бывает спонтанного нарушения симметрии. Иначе говоря, симметрия волновой функции основного состояния всегда совпадает с симметрией гамильтониана. Это означает, что в квантовой механике невозможно ввести аналог параметра порядка. В квантовой механике фазовый переход проявляет себя в форме различного поведения корреляционной функции выше и ниже порога, другими словами, экспоненциальная асимптотика функции Грина меняется на степенную, аналогично тому, как это имеет место при переходе Березинского–Костерлитца–Таулесса [2,4,8], а также в форме степенного поведения щели в спектре вблизи порога.

Результаты этого раздела суммированы в табл. 1.

Перед тем как перейти к другому разделу, сделаем замечание, касающееся критических индексов сферической модели. Наблюдение заключается в том, что в трехмерном случае эти индексы и их некоторые комбинации совпадают с соответствующими величинами для двумерной модели Изинга на динамической планарной решетке (ДПЛ) [1,26]. Больше того, в размерности $d = 8/3$ мы получаем критические индексы трехкомпонентной модели Поттса на ДПЛ. Эти критические индексы представлены в табл. 2. Во избежание недоразумений подчеркнем, что речь не идет о совпадении всех критических индексов, что, разумеется, невозможно, когда рассматриваются системы, имеющие разную пространственную размерность d. В самом деле, в некоторые скейлинговые соотношения d входит явно, например, $d\nu - 2 = -\alpha$; $\delta = (d + 2 - \eta)(d - 2 + \eta)$. В частности, сферическая модель и указанные выше системы на ДПЛ имеют различные индексы ν и η. Таким образом, имеется не до конца понятая интересная связь между обычным уравнением Шредингера и статистическими моделями на динамических планарных решетках.

3. $SU(N)$-инвариантная модель Гинзбурга–Ландау во внешнем однородном магнитном поле

В этом разделе мы рассмотрим критическое поведение векторной $SU(N)$-симметричной нелинейной сигма-модели ГЛ во внешнем магнитном поле, описывающей свойства сверхпроводников II рода в окрестности линии фазовых переходов $H_{c2}(T)$ в рамках уравнения Шредингера. Нас будут интересовать свойства этой модели в пределе больших N. Вначале сделаем несколько замечаний общего характера.

Хорошо известно, что внешнее магнитное поле радикально меняет критические свойства сверхпроводников [16,17]. Прежде всего оно препятствует росту критических флуктуаций в плоскости, перпендикулярной H. Характерным масштабом в плоскости является магнитная длина $l_H = \sqrt{hc/eH}$, которая в области сильных полей много меньше корреляционного радиуса ξ. Таким образом, критические флуктуации в плоскости заморожены и в игре не участвуют, поэтому эффективная пространственная размерность понижается на 2: $d_{\text{eff}} = d - 2$ (размерная редукция). В частности, нижняя критическая размерность становится равной 4.

Важным является вопрос о роде фазового перехода. Если пренебречь критическими флуктуациями и изучать переход в рамках теории среднего поля, то мы приходим к непрерывному фазовому переходу в смешанное состояние, состоящее из решетки абрикосовских вихрей. Лобовая атака этой задачи методом ренормгруппы (РГ), к сожалению, не приводит к успеху по крайней мере по двум причинам.

Во-первых, уравнения РГ пишутся вблизи верхней критической размерности, т. е. в $6-\varepsilon$-мерном пространстве [27,28], поэтому применимость полученных (однопетлевых) решений при $d = 3$, т. е. ниже нижней критической размерности, вызывает большие сомнения.

Во-вторых, применение метода РГ к стандартной модели ψ^4 во внешнем магнитном поле приводит к уравнениям РГ с бесконечным числом инвариантных зарядов, т. е. фактически к неперенормируемой теории, исследование которой представляет огромные трудности [27,28].

Одним из способов борьбы с неперенормируемостью является метод $1/N$-разложения [2,3]. Характерной особенностью этого приближения является то, что в диаграммном разложении нарушена симметрия между каналами частица–дырка и частица–частица в пользу первого. Другими словами, второй канал подавлен по параметру $1/N$, благодаря чему абрикосовское решение является неустойчивым, а нижняя критическая размерность равна 4 [29].

Остроумное решение было найдено в работе [29], где указанная проблема решается модификацией четверного взаимодействия. $SU(N)$-симметричное слагаемое $(\phi_a^*\phi_a)^2$ следует заменить на $2(\phi_a^*\phi_a)^2 - \phi_a^*\phi_b\phi_a^*\phi_b$, обладающее симметрией $O(N) \times U(1)$. В результате изменения симметрии исходной системы восстанавливается устойчивость вихревой решетки, возникающей в результате фазового перехода I рода.

В упоминавшейся в начале статьи работе [18] в рамках $1/N$-разложения было установлено, что в $SU(N)$-симметричной модели ГЛ происходит фазовый переход I рода при $d \geqslant 4$. В более поздних работах [19–21] утверждалось, что в системе имеет место непрерывный фазовый переход. Хотя вопрос явно носит академический характер, поскольку речь идет о нефизических размерностях $d \geqslant 4$, тем не менее исключительно интересен правильный ответ, полученный недавно в [24].

Применяя метод $1/N$-разложения, обычно используют удобный метод, предложенный в [2,4]. Он состоит в том, что предполагается, что ниже T_c конденсируется только одна, любая из N компонент параметра порядка, так как модель обладает непрерывной симметрией, скажем, $SU(N)$. По остальным $N - 1$ голдстоуновским модам производится интегрирование, в результате которого получается эффективное действие для оставшейся компоненты и вспомогательного поля $\lambda(\mathbf{x})$, являющегося множителем Лагранжа. Этот подход является стандартным и прекрасно работает, например, в случае гайзенберговского ферромагнетика. Однако при этом молчаливо подразумевается, что упорядоченная фаза является пространственно однородной. Однородность конденсата позволяет производить вращения в "спиновом" пространстве. Однако в абрикосовской фазе параметр порядка является пространственно неоднородным. Можно показать, что истинный минимум свободной энергии достигается конденсацией всех N компонент параметра порядка, образующих сложную структуру из взаимно перекрывающихся абрикосовских решеток [24]. Существенно, что в пределе $N \to \infty$ результирующая плотность конденсата является постоянной.

Перейдем к рассмотрению нелинейной сигма-модели ГЛ, гамильтониан которой имеет хорошо известный вид

$$H = \frac{1}{2}\int d^d x \left| \left(\partial_\mu + i\frac{2\pi}{\Phi_0}A_\mu\right) S_a \right|^2, \tag{22}$$

где $\Phi_0 = hc/2e$ — квант магнитного потока; векторный потенциал A_μ выбран для удобства в симметричной калибровке,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}, \tag{23}$$

а магнитное поле $\mathbf{B}$ направлено вдоль оси z. Статистическая сумма равна

$$Z = \int \prod_{a=1}^{N} DS_a DS_a^* \exp\left(-\frac{H}{T}\right)\delta(|S|^2 - 1). \tag{24}$$

Основным объектом нашего рассмотрения является калибровочно-неинвариантная корреляционная функция

$$G_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle S_a(\mathbf{r}) S_b^*(\mathbf{r}')\rangle, \tag{25}$$

где $G_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ есть функция Грина d-мерного оператора Гамильтона,

$$\left[\left(-i\partial_\mu - \frac{2\pi}{\Phi_0}A_\mu\right)^2 + m_0^2\right] G_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = T\delta_{ab}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{26}$$

для которой имеется явное выражение в произвольной калибровке [30]

$$G_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = T\delta_{ab}\exp\left(-i\frac{2\pi}{\Phi_0}\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} dx_\mu A_\mu\right)(4\pi)^{(2-d)/2}$$
$$\times \int_0^\infty du \frac{\omega u^{(2-d)/2}}{2\,\mathrm{sh}(u\omega/2)} \exp\left\{-m_0^2 u - \frac{(z-z')^2}{4u}\right.$$
$$\left. - \frac{\omega}{8}\mathrm{cth}\left(\frac{1}{2}u\omega\right)\left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]\right\}, \tag{27}$$

где $\omega = 2eB/c$ — циклотронная частота (здесь мы используем систему единиц, в которой $\hbar = 1$, $2m = 1$); z и z' — $(d-2)$-мерные продольные координаты. Интеграл в (27) вычисляется вдоль прямой, соединяющей точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$.

Принимая во внимание ограничение на комплексные поля (2), мы приходим к уравнению Шредингера для эффективной волновой функции

$$\left[\left(-i\partial_\mu - \frac{2\pi}{\Phi_0}A_\mu\right)^2 + m_0^2\right]\Psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$
$$= TN\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{28}$$

описывающее движение квантовой частицы во внешнем однородном магнитном поле и в δ-образной яме. Здесь $\delta_{ab}\Psi(\mathbf{r},\mathbf{r}') \equiv G_{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$.

Полученное простое уравнение полностью эквивалентно исходной $SU(N)$-симметричной нелинейной сигма-модели ГЛ. Следует подчеркнуть, что δ-образный потенциал в этом уравнении играет принципиальную роль, так как без него получается тривиальное уравнение для гауссовских флуктуаций.

Из квантовой механики известно, что в однородном магнитном поле в трехмерной потенциальной яме возникает всегда связанное состояние [31] независимо от ее глубины. В нашем случае это означает отсутствие фазового перехода при $d = 3$.

Решение уравнения (28) элементарно и описано в [25]. Далее мы получим точную формулу для верхнего критического поля $H_{c2}(T)$. Из граничного условия на волновую функцию при совпадающих аргументах вытекает уравнение, связывающее температуру и "физическую" массу m (обратный радиус корреляции ξ)

$$\Psi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \frac{TN\omega}{(4\pi)^{d/2}}\int_{a^2}^{\infty} du \frac{\exp(u\omega/2 - m^2 u)}{2u^{(d-2)/2}\,\mathrm{sh}(u\omega/2)} = 1. \tag{29}$$

При выводе этого соотношения использовалась перенормировка массы $m_0^2 + \omega/2 = m^2$. Поскольку на линии фазового перехода $m = 0$, то в результате элементарных алгебраических преобразований получаем

$$\frac{T(0)}{T(H)} = \frac{d-2}{2}\left(\frac{H}{H_0}\right)^{(d-2)/2}\int_{H/H_0}^{\infty} dt \frac{t^{(2-d)/2}\exp t}{\mathrm{sh}\, t}, \tag{30}$$

где

$$T(0) = \frac{2(4\pi)^{d/2}a^{d-2}}{N}, \quad H_0 = \frac{\Phi_0}{a^2}. \tag{31}$$

Здесь $T(0)$ — температура сверхпроводящего перехода в отсутствие поля, $H_0 \sim 10^5$ T — масштаб магнитного поля в данной модели. Интеграл в правой части (30) существует в $d \geqslant 4$ измерениях и расходится при $d \leqslant 4$, т.е. ниже четырех измерений фазового перехода не существует вообще ("размерная редукция"). Весьма существенно, что при выводе точного уравнения (30) не использовалось стандартное приближение низшего уровня Ландау (LLL approximation) [18,27].

Это приближение, иногда называемое ультраквантовым пределом, работает в области экстремально сильных полей, в которой $l_H \ll a \ll \xi$.

Точное решение позволяет исследовать асимптотики данного решения как в области слабого поля, для которого LLL-приближение неприменимо, так и для сильных полей, вычислив поправки к LLL-приближению.

1) В слабых полях при $s \equiv H/H_0 \ll 1$ находим

$$\frac{T(0)}{T(H)} = 1 + \frac{d-2}{d-4}s + A_d s^{(d-2)/2} - \frac{d-2}{3(d-6)}s^2$$
$$+ \frac{d-2}{45(d-10)}s^4 + O(s^6), \tag{32}$$

где константа A_d равна

$$A_d = -2\frac{d-3}{(d-4)} + \frac{d-2}{2}\int\limits_1^\infty dt\, t^{(d-2)/2}\frac{e^t}{\operatorname{sh} t} + \frac{d-2}{2}\int\limits_0^1 dt\, t^{(d-2)/2}\frac{t\exp t - \operatorname{sh} t - t\operatorname{sh} t}{t\operatorname{sh} t}. \quad (33)$$

Уравнение (32) описывает окрестность концевой критической точки $T = T_c$, $H = 0$ (the critical end point), в которой сосуществуют несколько фаз. Для нее характерно, что вторая производная функции $T(H)$ по H расходится как $T''(H) \sim H^{(d-6)/2}$, $H \to 0$.

2) В области сильных полей $1 \ll s$ получаем

$$\frac{T(0)}{T(H)} = 2\frac{d-2}{d-4}s + \frac{d-2}{2}\exp(-2s) - \frac{(d-2)^2}{8s}\exp(-2s) + 0\big(s^{-2}\exp(-2s)\big). \quad (34)$$

Поправки к приближению низшего уровня Ландау экспоненциально малы, что неудивительно, поскольку уровни, лежащие выше, отделены от него энергетической щелью. В пределе нулевой температуры $T \to 0$ линия $H_{c2}(T)$ уходит на бесконечность.

Таким образом, в рассматриваемой модели происходит фазовый переход II рода в $d \geqslant 4$ измерениях с критическими индексами $\nu = 1/(d-4)$; $\eta = 0$ [21,24,25]). Ниже четырех измерений вследствие размерной редукции перехода нет.

Найденные критические индексы совпадают с критическими индексами сферической модели в случайном магнитном поле. В обеих моделях имеет место размерная редукция, и обе они принадлежат к одному классу универсальности. Случайность это или нет, в настоящее время неясно. В пользу случайности говорит то, что модель ГЛ слишком сильно отличается от сферической, так как в ней нет ни "замороженного" беспорядка, ни скрытой суперсимметрии [2,32].

Главный результат данной работы состоит в доказательстве того, что все d-мерные векторные нелинейные сигма-модели, в частности, $O(N)$, $SU(N)$ и CP^N в пределе больших N эквивалентны уравнению Шредингера для частицы в δ-образной яме. Данное уравнение, как и бета-функция, имеют один и тот же универсальный вид для всех моделей, поскольку хорошо известно, что все системы с непрерывными глобальными симметриями выглядят практически одинаково при больших N [5]. Это, правда, несколько парадоксально с математической точки зрения, так как $SU(\infty) \neq SO(\infty)$.

Эквивалентность уравнению Шредингера не имеет места для более сложных калибровочных и матричных теорий. Дело в том, что в отличие от них векторные модели в сферическом пределе — это системы свободных безмассовых голдстоуновских частиц [2,5].

Решение канонической $SU(N)$-симметричной модели Гинзбурга–Ландау по внешнем магнитном поле в пределе $N \to \infty$, безусловно, интересное само по себе, показывает, что она, к сожалению, наделена целым рядом нефизических черт, которыми реальные сверхпроводники II рода не обладают. К их числу относятся прежде всего отсутствие вихревой решетки ниже линии фазовых переходов $H_{c2}(T)$, непрерывный переход в состояние с однородным конденсатом [20], происходящий выше четырех измерений, астрономический масштаб верхнего критического поля $H_0 \sim 10^5 T$, низкотемпературная асимптотика верхнего критического поля $T \to 0$; $H_{c2}(T) \to \infty$, противоречащая эксперименту и т.д.

Таким образом, модель ГЛ в рассмотренном пределе хотя и является точно решаемой, но явно нереалистична и нуждается в модификации. В настоящее время вряд ли можно указать какой-нибудь один способ, разумный с физической точки зрения и устраняющий все перечисленные выше недостатки (см., например, недавнюю работу [33]). Интересный подход, заключающийся в изменении симметрии исходного действия, был указан в работе [29] и обсуждался выше. Далее хорошо известно, как получить модель ГЛ с фазовым переходом в физических размерностях $d \geqslant 2$. Для этого нужно просто рассмотреть модели сверхпроводников в магнитном поле на решетке [25,34–36].

Развитый в настоящей работе метод позволяет дать несколько неожиданную физическую интерпретацию $SU(N)$-симметричной модели ГЛ на решетке. В данной задаче двухточечный коррелятор удовлетворяет дискретному уравнению Шредингера на решетке во внешнем магнитном поле. На языке физики твердого тела мы имеем дело с блоховским электроном, который перемещается по узлам d-мерной решетки в однородном внешнем магнитном поле. В решетке имеется еще δ-образная яма, созданная примесным атомом. В этой задаче легко узнать знаменитую проблему Азбеля–Харпера–Хофшадтера [37–39]. Электрон может быть захвачен примесью и образовать связанное состояние. Пороговое значение глубины ямы, ниже которого образуется связанное состояние, зависит от магнитного поля, а это как раз линия $T_c(H)$ в сверхпроводниках. Для рациональных значений магнитного потока Φ через плакет $\Phi/\Phi_0 = 2\pi p/q$, где p, q — взаимно простые натуральные числа, зависимость $T_c(q)$ можно определить численно.

Метод уравнения Шредингера может быть применен и к другим моделям статистической физики и квантовой теории поля, например, к суперсимметричной $O(N)$-симметричной нелинейной сигма-модели Виттена [40,41]. Универсальная бета-функция (18) возникает также в двухчастичном секторе модели Кардара–Паризи–Жанга [42]. Применения метода уравнения Шредингера к решеточным системам и моделям с беспорядком будут рассмотрены в другом месте.

Большая часть этой работы была выполнена в университете г. Эссен (Германия). Автор очень благодарен сотрудникам университета H.W. Diehl и K. Wiese за исключительно теплое гостеприимство, поддержку на протяжении всей работы и многочисленные полезные дискуссии. Считаю своим приятным долгом поблагодарить Ю.М. Письмака, А.И. Соколова, С.А. Ктиторова и А.В. Гольцева за интересные обсуждения. Особо хочу поблагодарить М.В. Садовского, обратившего мое внимание на работу [10], а также T. Newman, E.B. Kolomeisky и Z. Tešanovich, приславших мне свои интересные замечания и несколько ключевых ссылок, в частности, [24], по электронной почте. Наконец, я весьма признателен J. Zinn-Justin за полезное обсуждение.

Список литературы

[1] The large N expansion in quantum field theory and statistical physics / Ed. by E. Brezin, S.R. Wadia. World Sientific, Singapore (1993).
[2] J. Zinn-Justin. Quantum field theory and citical phenomena. Clarendon Press, Oxford (1999).
[3] А.Н. Васильев. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. ПИЯФ. СПб. (1998).
[4] E. Brézin, J. Zinn-Justin. Phys. Rev. **B14**, *7*, 3110 (1976).
[5] А.М. Поляков. Калибровочные поля и струны. ИТФ им. Л.Д. Ландау, Черноголовка (1995).
[6] S.R. Wadia. Phys. Rev. **D24**, *3*, 970 (1981).
[7] A.M. Polyakov. Phys. Lett. **B59**, *1*, 79 (1975).
[8] J.B. Kogut. Rev. Mod. Phys. **51**, *3*, 659 (1979).
[9] К. Хуанг. Кварки, лептоны и калибровочные поля. Мир, М. (1985); C. Thorn. Phys. Rev. **D6**, *1*, 39 (1972).
[10] S.M. Apenko. J. Phys. A: Math. Gen. **31**, *7*, 1553 (1998).
[11] E.B. Kolomeisky. Phys. Rev. **B46**, *21*, 13 956 (1992).
[12] E.B. Kolomeisky, J.P. Straley. Phys. Rev. **B46**, *18*, 11 749 (1992); Phys. Rev. **B46**, *21*, 13 942 (1992).
[13] E.B. Kolomeisky, J.P. Straley. Phys. Rev. **B51**, *13*, 8030 (1995); T. Hwa, T. Natterman. Phys. Rev. **B51**, *1*, 455 (1995).
[14] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. Наука, М. (1980).
[15] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. Мир, М. (1987).
[16] M. Rasolt, Z. Tesanovich. Rev. Mod. Phys. **64**, *3*, 709 (1992).
[17] G. Blatter, M.V. Feigel'man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin, V.M. Vinokur. Rev. Mod. Phys. **66**, *4*, 1125 (1994).
[18] I.A. Affleck, E. Brézin. Nucl. Phys. **B257**, *3*, 451 (1985).
[19] S.A. Ktitorov, B.N. Shalaev, L. Jastrabik. Phys. Rev. **B49**, *21*, 15 248 (1994).
[20] L. Radzihovsky. Phys. Rev. Lett. **74**, *23*, 4722 (1995).
[21] G. Jug, B.N. Shalaev. Phys. Rev. **58**, *18*, 12 404 (1998).
[22] I.F. Herbut, Z. Tešanovich. Phys. Rev. Lett. **76**, *23*, 4550 (1996).
[23] L. Radzihovsky. Phys. Rev. Lett. **76**, *22*, 4551 (1996).
[24] M.A. Moore, T.J. Newman, A.J. Bray, S.-K. Chin. Phys. Rev. **B58**, *2*, 936 (1998).
[25] B.N. Shalaev. Cond-mat/9912424.
[26] V.A. Kazakov, A.A. Migdal. Nucl. Phys. **B311**, *1*, 171 (1988).
[27] E. Brézin, D.R. Nelson, A. Thiaville. Phys. Rev. **B31**, *12*, 7124 (1985).
[28] T.J. Newman, M.A. Moore. Phys. Rev. **B54**, *9*, 6661 (1996).
[29] A. Lopatin, G. Kotliar. Phys. Rev. **B59**, *5*, 3879 (1999).
[30] Р. Фейнман, А. Хиббс. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Мир, М. (1968).
[31] Ю.Н. Демков, Г.Ф. Друкарев. ЖЭТФ **49**, *1*, 257 (1965).
[32] G. Parisi, N. Sourlas. Phys. Rev. Lett. **43**, *3*, 744 (1979).
[33] Z. Tešanovich. Phys. Rev. **B59**, *12*, 6449 (1999).
[34] J. Toner. Phys. Rev. Lett. **66**, *19*, 2523 (1991).
[35] S.A. Ktitorov, Yu.V. Petrov, B.N. Shalaev, V.S. Sherstinov. Int. J. Mod. Phys. **B6**, *3*, 1209 (1992).
[36] M.Y. Choi, S. Doniach. Phys. Rev. **B31**, *10*, 4526 (1985).
[37] P.G. Harper. Proc. Phys. Soc. London **A68**, *3*, 874 (1955).
[38] M. Ya. Azbel. Sov. Phys. JETP **19**, *2*, 634 (1964).
[39] D.R. Hofstadter. Phys. Rev. **B14**, *5*, 2239 (1976).
[40] E. Witten. Phys. Rev. **D16**, *7*, 2991 (1977).
[41] А.И. Вайнштейн, В.И. Захаров, В.А. Новиков, М.А. Шифман. Физика элементарных частиц и атомного ядра **17**, *3*, 472 (1986); V.A. Novikov, M.A. Shifman, V.I. Zakharov. Phys. Rev. **116**, *3*, 103 (1984).
[42] K.J. Wiese. J. Stat. Phys. **93**, *2*, 143 (1998).