01;09

Об уравнении Эйлера в задачах синтеза излучающих систем

© С.И. Эминов

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

Поступило в Редакцию 11 января 2000 г.

Рассмотрена проблема, возникающая при использовании уравнения Эйлера в теории синтеза антенн. Поведение решения этого уравнения на концах интервала противоречит условиям Мейкснера, согласно которым оно должно обращаться в ноль по корневому закону. Автором показано, что отмеченное противоречие имеет место при поиске решений в пространстве L_2. При выборе в качестве пространства решений подпространства L_2 с ограниченной энергетической нормой оно исчезает. Уравнение Эйлера при этом возникает из вариационной задачи на минимизацию функционала, включающего норму тока в энергетическом пространстве.

1. Постановка задачи. Связь между током $I(\tau)$ линейного излучателя с электрической длиной $2l$ и диаграммой направленности $F(\chi)$ описывается следующим уравнением [1–3]:

$$F = PI \equiv \int_{-1}^{1} \exp(il\chi t) I(t) dt, \qquad -1 \leqslant \chi \leqslant 1. \tag{1}$$

Оператор P является вполне непрерывным, например в пространстве квадратично суммируемых функций L_2. Обращение такого оператора представляется проблемным. Поэтому уравнение (1) заменяется уравнением Эйлера

$$\alpha I + P^* PI = P^* F, \tag{2}$$

где α — малый параметр,

$$P^* PI = \int_{-1}^{1} I(t) \int_{-1}^{1} \exp(-il\chi(\tau - t)) d\chi dt, \quad P^* F = \int_{-1}^{1} \exp(-il\chi\tau) F(\chi) d\chi.$$

Уравнение (2), как уравнение Фредгольма второго рода, является весьма привлекательным. Но это уравнение обладает серьезным недостатком: решение уравнения не обращается в нуль на концах интервала $[-1, 1]$. В то же время ток на концах линейного излучателя, например вибратора, должен обращаться в нуль, согласно условиям Мейкснера [4], по корневому закону

$$I(\tau) \sim (1-\tau^2)^{1/2}, \qquad \tau \to \pm 1. \tag{3}$$

Целью данной работы является выяснение причин указанного дефекта уравнения (2): связан ли этот дефект с методом вывода уравнения или же причина дефекта заключена в использовании неточных предпосылок? Кроме того, ставится задача вывода уравнения, решение которого удовлетворяет (3).

2. Энергетический интеграл. В работах [1–3] полагается, что ток $I(\tau)$ принадлежит пространству L_2, т. е.

$$\int\limits_{-1}^{1} |I(t)|^2 dt < +\infty \tag{4}$$

или же с учетом равенства Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(\chi)|^2 d\chi < +\infty. \tag{5}$$

Следует отметить, что в цитированных работах, а также в известной нам литературе, выбор пространства L_2 не обосновывается. Вместе с тем выбор пространства токов является центральным, так как уравнение Эйлера выводится из условия ограниченности соответствующей пространству нормы тока.

На наш взгляд, пространство токов нужно выбрать, исходя из физических условий, а именно: необходима ограниченность не только мощности поля в дальней зоне, но и мощности поля в ближней зоне. Именно это условие обеспечивает единственность решения уравнений Максвелла [4].

Найдем мощность поля в ближней зоне, рассматривая вибратор с электрическим радиусом a, при осесимметричном возбуждении. Для этого проинтегрируем вектор Пойнтинга по поверхности вибратора [5, с. 74]:

$$P = \frac{1}{2}\iint\limits_S [\mathbf{E},\mathbf{H}]\mathbf{n}dS = -\frac{1}{2}\iint\limits_S E_z H_\varphi dS = -\frac{\tilde{l}}{2}\int\limits_{-1}^{1} E_z(\tau)I^*(\tau)d\tau, \tag{6}$$

где $2\tilde{l}$ — длина вибратора, * — знак комплексного сопряжения.

Далее выразим электрическое поле E_z через ток I, используя представление функции Грина интегралом Фурье в цилиндрической системе координат [6]:

$$\tilde{l}E_z(\tau) = i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{l^2}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\chi^2-1)I_0(\sqrt{\chi^2-1}\,a)K_0(\sqrt{\chi^2-1}\,a)$$
$$\times\int\limits_{-1}^{1}\exp(-il\chi(\tau-t))I(t)dtd\chi, \tag{7}$$

где I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя.

Подставив (7) в (6) и учитывая (1), получим окончательное выражение для мощности

$$P = -i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{l^2}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\chi^2-1)I_0(\sqrt{\chi^2-1}\,a)K_0(\sqrt{\chi^2-1}\,a)|F(\chi)|^2d\chi. \tag{8}$$

Из асимптотики модифицированных функций Бесселя

$$I_0(\chi)K_0(\chi) = \frac{1}{2\chi}+\frac{1}{16\chi^3}+\ldots,\ \chi\to+\infty$$

получим, что ограниченность мощности эквивалентна конечности интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\chi\,\|\,F(\chi)|^2d\chi<+\infty. \tag{9}$$

Из сравнения (9) и (5) следует, что принадлежность тока пространству $L_2[-1,1]$ еще не обеспечивает ограниченность мощности. Например, мощность поля, создаваемого током, тождественно равным единице вдоль длины излучателя, бесконечна. Это утверждение легко проверяется.

Таким образом, для того чтобы мощность поля была ограничена, необходимо сузить пространство $L_2[-1,1]$,

3. Энергетическое пространство. Энергетическое пространство, обеспечивающее (9), определяем с помощью оператора

$$(AI)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} x \int\limits_{-1}^{1} \cos[x(\tau - t)]I(t)dtdx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\chi| \int\limits_{-1}^{1} \exp(-i\chi(\tau - t))I(t)dtd\chi. \qquad (10)$$

Оператор A является симметричным, имеем плотную в $L_2[-1,1]$ область определения $D(A)$ и, наконец, является положительно определенным [6]. Энергетическое пространство H_A определяется как пополнение $D(A)$ по норме

$$[I]^2 = (AI, I), \qquad (11)$$

где (I, I) — скалярное произведение в $L_2[-1,1]$, а $[I, G] = (AI, G)$ — в пространстве H_A.

Ортонормированный базис пространства H_A имеет вид [6]

$$\varphi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin[n\arccos(\tau)], \quad n = 1, 2\ldots,$$

$$(A\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \qquad (12)$$

Интересно отметить, что функция, равная единице, пространству H_A не принадлежит. Ее энергетическая норма бесконечна. Гладкая функция принадлежит H_A только тогда, когда она обращается в нуль на концах интервала $[-1,1]$.

4. Вариационная задача. Уравнение Эйлера. Вариационная задача состоит в минимизации функционала

$$M(I) = \| PI - F \|^2 + \alpha [I]^2. \tag{13}$$

Постановка задачи взята из [2]. Отличие состоит в том, что здесь минимизируется норма тока в H_A, а в работе [3] в $L_2[-1, 1]$. Близость диаграмм в обоих работах оценивается в $L_2[-1, 1]$. Функционал достигает экстремума на токе, обеспечивающем нулевую вариацию. А вариация функционала вычисляется по формуле

$$\delta M(I) = \frac{\partial}{\partial \alpha} M(I + \alpha h)\Big|_{\alpha=0}. \tag{14}$$

Найдем вариацию функционала с учетом определения энергетической нормы, симметричности оператора A, а также определения сопряженного оператора P^*:

$$\delta M(I) = (h, \alpha AI + P^*PI - P^*F) + (\alpha AI + P^*PI - P^*F, h). \tag{15}$$

Вариация функционала должна обращаться в нуль при всех вариациях h. Отсюда получаем уравнение Эйлера

$$\alpha AI + P^*PI = P^*F. \tag{16}$$

В этом уравнении вместо единичного оператора появился положительно определенный оператор A. Именно этот оператор определяет поведение тока на концах излучателя. Собственные функции оператора A, согласно (12), удовлетворяют условиям Мейкснера (3). Этому же условию будет удовлетворять и ток, так как в уравнении (16) оператор P^*P имеет гладкое ядро и в силу этого не влияет на поведение тока на концах излучателя.

В заключение отметим еще одно преимущество уравнения (16). Решение этого уравнения ищется в том же пространстве, что и решение интегрального уравнения в задаче анализа [6]. В последнем случае находятся токи, наводимые на поверхности вибратора под действием заданного первичного поля. Таким образом, задачи анализа и синтеза можно объединить в единый вычислительный процесс.

Список литературы

[1] *Минкович Б.М., Яковлев В.П.* Теория синтеза антенн. М.: Сов. радио, 1969. 269 с.
[2] *Бахрах Л.Д., Кременецкий С.Д.* Синтез излучающих систем (теория и методы расчета). М.: Сов. радио, 1974. 232 с.
[3] *Дмитриев В.И., Березина Н.И.* Численные методы решения задач синтеза излучающих систем. М.: МГУ, 1986. 112 с.
[4] *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
[5] *Марков Г.Т., Сазонов Д.М.* Антенны. М.: Энергия, 1975. 528 с.
[6] *Эминов С.И.* // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. В. 12. С. 2160–2168.