

# Влияние корреляционных свойств одно- и трехмерных неоднородностей на высокочастотную магнитную восприимчивость синусоидальных сверхрешеток

© В.А. Игнатченко, Ю.И. Маньков

Институт физики им. Л.В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук,  
660036 Красноярск, Россия

E-mail: vignatch@iph.krasn.ru

(Поступила в Редакцию 30 июня 2004 г.)

Изучается влияние одномерных (1D) и трехмерных (3D) неоднородностей на высокочастотную магнитную восприимчивость на границе первой зоны Бриллюэна ферромагнитной сверхрешетки. Исследование проводится развитым ранее методом случайной пространственной модуляции (RSM) периода сверхрешетки, в котором структурные неоднородности описываются в модели случайной фазы, зависящей в общем случае от трех координат. Рассчитана зависимость расстояния  $\Delta\nu_m$  между двумя пиками мнимой части усредненной функции Грина, которое характеризует ширину щели в спектре на границе зоны Бриллюэна, от среднеквадратичных флуктуаций  $\gamma_i$  и корреляционных волновых чисел  $\eta_i$  неоднородностей фазы ( $i = 1, 3$  для 1D- и 3D-неоднородностей соответственно). Показано, что функция  $\Delta\nu_m(\gamma_1, \eta_1)$  для 1D-неоднородностей симметрична относительно взаимной замены величин  $\eta_1$  и  $\gamma_1^2$ , тогда как функция  $\Delta\nu_m(\gamma_3, \eta_3)$  для 3D-неоднородностей имеет резкую асимметрию относительно взаимной замены  $\eta_3$  и  $\gamma_3^2$ . Этот эффект обусловлен различием форм корреляционных функций 1D- и 3D-неоднородностей и может быть использован для определения размерности неоднородностей на основе результатов спектральных исследований сверхрешеток.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-02-16174) и Красноярского краевого фонда науки (грант № 12F0013C).

## 1. Введение

Одномерные периодические структуры (сверхрешетки) интенсивно используются в последние годы в различных устройствах. Несмотря на достигнутые успехи в изготовлении этих структур, их характеристики во многих случаях еще далеки от идеальных. Это связано с тем, что на свойства реальных сверхрешеток влияют такие технологические факторы, как случайный разброс толщин слоев (одномерные неоднородности структуры) и случайные деформации поверхностей границ между слоями (двух- и трехмерные неоднородности). Поэтому актуально теоретическое исследование влияния случайных неоднородностей структуры на физические свойства сверхрешеток и, в частности, на характеристики волн, распространяющихся в таких материалах. Помимо прикладных аспектов таких исследований следует отметить, что частично рандомизированные сверхрешетки являются удобными объектами для развития новых методов теоретической физики для сред с отсутствием трансляционной симметрии. В настоящее время для развития теории рандомизированных сверхрешеток используются различные модели и методы. В первоначально синусоидальных сверхрешетках одномерная рандомизация учитывается введением случайной фазы [1,2]; в сверхрешетках с прямоугольным профилем координатной зависимости материального параметра вдоль оси сверхрешетки рандомизация моделируется нарушением порядка расположения в последовательности слоев двух различных материалов [3–9] или случайными отклонениями границ между слоями от их первоначального расположе-

ния [10–12]. Развиваются также методы, основанные на постулировании формы корреляционной функции сверхрешетки [13,14], приложениях приближения геометрической оптики [15] и развитии динамической теории композитных упругих сред [16].

Еще один метод исследования влияния неоднородностей сверхрешетки на волновой спектр был предложен в нашей работе [17] и назван нами методом случайной пространственной модуляции (RSM) периода сверхрешетки. Напомним кратко его суть. Как известно, наиболее последовательным описанием спектральных свойств любых неоднородных сред является метод усредненных функций Грина. Единственной характеристикой, описывающей случайную среду, которая входит в выражение для усредненной функции Грина, является корреляционная функция  $K(\mathbf{r})$ , зависящая от расстояния  $\mathbf{r}$  между двумя точками среды:  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . Поэтому первая часть задачи сводится к нахождению функции  $K(\mathbf{r})$  для сверхрешетки, содержащей те или иные структурные неоднородности. Вторая часть задачи состоит в извлечении стандартными приближенными методами спектральных характеристик из выражения для функции Грина, содержащей эту корреляционную функцию. Для описания неоднородностей структуры синусоидальной сверхрешетки использовалась модель случайной фазы, которая считалась случайной функцией всех трех координат с произвольным радиусом корреляции (в работах [1,2] рассматривалась только одномерная  $\delta$ -коррелированная случайная функция). Для нахождения корреляционной функции сверхрешетки  $K(\mathbf{r})$  нами был развит метод, который является обобщением хорошо известного метода

определения временной корреляционной функции для случайной частотной (фазовой) модуляции радиосигнала [18,19] на случай пространственной (в общем случае трехмерной) модуляции периода (фазы) сверхрешетки. Достоинством этого метода является то, что форма корреляционной функции сверхрешетки в нем не постулируется, а выводится на основании наиболее общих допущений о характере случайной пространственной модуляции периода сверхрешетки. Было показано, что в общем случае эта функция имеет сложный вид, который зависит от размерности неоднородностей, структуры границы между слоями и т.д. Знание корреляционных функций, соответствующих различным типам и размерностям неоднородностей, позволило нам использовать методы исследования усредненных функций Грина для нахождения собственных частот, затухания и других характеристик волн в сверхрешетках [17,20–28]. Метод RSM позволил нам рассмотреть неоднородности различных размерностей в рамках одной модели. Влияние одномерных (1D) и трехмерных (3D) неоднородностей на волновой спектр было изучено для синусоидальных сверхрешеток, сверхрешеток с нулевой и произвольной толщиной границ между слоями. Изучалось также влияние смеси 1D- и 3D-неоднородностей [26,27] и влияние анизотропии корреляционной функции [28]. Однако некоторые принципиальные вопросы еще не исследованы. Например, в работах [25–28] было показано, как проявляются различия в форме корреляционных функций для 1D- и 3D-неоднородностей в характеристиках волнового спектра сверхрешетки при изменении величины среднеквадратичной модуляции фазы. В данной работе исследуются зависимости характеристик волнового спектра как от среднеквадратичных флуктуаций фазы, так и от корреляционных радиусов неоднородностей и демонстрируются резкие различия характера этих зависимостей для 1D- и 3D-неоднородностей. В данной работе исследование выполнено с использованием точных корреляционных функций, полученных нами ранее [17]. Это позволило определить границы применимости приближенных аналитических выражений для корреляционных функций трехмерных неоднородностей, которые использовались ранее [25–28] для упрощения вычислений.

## 2. Метод расчета

Напомним вкратце основные особенности метода RSM, который был развит в работе [17] для нахождения корреляционных функций сверхрешетки с 1D-, 2D- и 3D-неоднородностями ее периода. Зависимость величины магнитной одноосной анизотропии от координат в ферромагнитной сверхрешетке представлялась в виде

$$\beta(\mathbf{x}) = \beta_0 + \Delta\beta \rho(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где  $\beta_0$  — средняя величина анизотропии,  $\Delta\beta$  — ее среднеквадратичное отклонение,  $\rho(\mathbf{x})$  — центрирован-

ная ( $\langle \rho \rangle = 0$ ) и нормированная ( $\langle \rho^2 \rangle = 1$ ) функция. Функция  $\rho(\mathbf{x})$  описывает как периодическую зависимость параметра магнитной анизотропии вдоль оси  $z$ , так и случайные пространственные модуляции этого параметра. Угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю случайных реализаций. В [17] эта функция представлялась в виде

$$\rho(\mathbf{x}) = \sqrt{2} \cos[q(z - u(\mathbf{x}) + \psi)], \quad (2)$$

где  $q = 2\pi/l$  — волновое число сверхрешетки,  $l$  — ее период. Неоднородности описываются введением случайной пространственной модуляции фазы  $u(\mathbf{x})$ , которая в общем случае является функцией всех трех координат:  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ . Вводя функцию  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = q[u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x})]$  и усредняя произведение  $\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})$  по  $\chi$  с гауссовским распределением и по случайной, не зависящей от координат фазе  $\psi$  с однородным распределением (см. подробнее в [17]), получим выражение для корреляционной функции сверхрешетки в форме

$$K_i(\mathbf{r}) = \cos qr_z \exp\left[-\frac{Q_i(\mathbf{r})}{2}\right], \quad (3)$$

где структурная функция  $Q_i(\mathbf{r})$  для 1D- и 3D-неоднородностей соответственно имеет вид

$$Q_1(r_z) = 2\gamma_1^2 [\exp(-k_{\parallel} r_z) + k_{\parallel} r_z - 1], \quad (4)$$

$$Q_3(r) = 6\gamma_3^2 \left[1 - \frac{2}{k_0 r} + \left(1 + \frac{2}{k_0 r}\right) \exp(-k_0 r)\right]. \quad (5)$$

Здесь  $k_{\parallel}$  и  $k_0$  — корреляционные волновые числа 1D- и 3D-неоднородностей соответственно ( $r_{\parallel} = k_{\parallel}^{-1}$  и  $r_0 = k_0^{-1}$  — корреляционные радиусы неоднородностей),

$$\gamma_1 = \sigma_1 q / k_{\parallel}, \quad \gamma_3 = \sigma_3 q / k_0, \quad (6)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  — среднеквадратичные флуктуации градиентов функций  $u_1(z)$  и  $u_3(\mathbf{x})$ .

Рассмотрим ситуацию, когда направления внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ , постоянной составляющей намагниченности  $\mathbf{M}_0$  и оси магнитной анизотропии совпадают с направлением оси сверхрешетки  $z$ . Проводя обычную линеаризацию уравнения Ландау–Лифшица для намагниченности ( $M_x, M_y \ll M_0$ ,  $M_z \approx M_0$ ) и вводя циркулярные проекции для резонансных (положительных) составляющих намагниченности и внешнего магнитного поля, запишем уравнение для спиновых волн в виде [20]

$$\nabla^2 m - \left[ \nu - \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \rho(\mathbf{x}) \right] m = -\frac{h}{\alpha}. \quad (7)$$

Здесь  $m = M_x + iM_y$ ,  $h = H_x + iH_y$ ,  $\Lambda = \sqrt{2}\Delta\beta/\alpha$ , а частота  $\nu$ , измеряемая в единицах волнового вектора, равна

$$\nu = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha g M_0}, \quad (8)$$

где  $\omega_0$  — частота однородного ферромагнитного резонанса,  $g$  — гиромагнитное отношение,  $\alpha$  — постоянная обмена.

Высокочастотная спин-волновая восприимчивость  $\chi(v, k)$  пропорциональна усредненной функции Грина  $G(v, k)$  уравнения (7)

$$\chi(v, k) = \langle m(v, k) \rangle / h_0 = a(k)G(v, k), \quad (9)$$

где  $h_0$  — амплитуда высокочастотного поля. Вид коэффициента пропорциональности  $a(k)$  для случая спин-волнового резонанса в тонкой магнитной пленке детально проанализирован в [20]. Усредненная функция Грина для уравнения (7) имеет вид

$$G(v, k) = \frac{1}{v - k^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 M(v, k)}, \quad (10)$$

где  $M(v, k)$  — классический аналог массового оператора. В работе [23] было показано, что в приближении, аналогичном приближению Буре [29], этот член может быть в общем случае представлен в виде

$$M_i(v, \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{K_i(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \sqrt{v}|\mathbf{r}|)] d\mathbf{r}, \quad (11)$$

где корреляционная функция  $K(\mathbf{r})$  для синусоидальной сверхрешетки определяется выражением (3).

Для 1D- и изотропных 3D-неоднородностей интегрирование по углам в этом выражении может быть выполнено точно. В результате было получено [23] для 1D-неоднородностей

$$M_1 = -\frac{1}{2i\sqrt{v}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2} Q_1(r_z) - i\sqrt{v}r_z\right] \times [\cos(k-q)r_z + \cos(k+q)r_z] dr_z, \quad (12)$$

а для 3D-неоднородностей

$$M_3 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2} Q_3(r) - i\sqrt{v}r\right] \times \left[\frac{\sin(k-q)r}{k-q} + \frac{\sin(k+q)r}{k+q}\right] dr \quad (13)$$

(следует отметить, что в работе [23] в выражении, соответствующем (12), допущена опечатка). Дальнейшее интегрирование в этих выражениях с точными функциями  $Q_1(r_z)$  и  $Q_3(r)$ , определяемыми выражениями (4) и (5), в аналитическом виде не может быть проведено. Поэтому исследование законов дисперсии, затухания и восприимчивости в наших предыдущих работах проводилось с использованием следующих аппроксимирующих корреляционных функций: для 1D-неоднородностей

$$K_1(r_z) \approx \cos qr_z \begin{cases} \exp(-\gamma_1^2 k_{\parallel} r_z), & \gamma_1^2 \ll 1, \\ \exp(-\gamma_1^2 k_{\parallel}^2 r_z^2 / 2), & \gamma_1^2 \gg 1, \end{cases} \quad (14)$$

для 3D-неоднородностей

$$K_3(r) = \cos qr_z [(1-L) \exp(-\gamma_3^2 k_0 r) + L], \quad (15)$$

где  $L = \exp(-3\gamma_3^2)$  — асимптота  $K_3(r)$  при  $r \rightarrow \infty$ . Если для  $K_1(r_z)$  вид аппроксимирующих выражений (14) был

обоснован [17], то границы применимости аппроксимации (15) для  $K_3(r)$  определены не были. К этому вопросу мы вернемся позже.

### 3. Спектр спиновых волн и высокочастотная восприимчивость сверхрешетки

Закон дисперсии и затухание спиновых волн определяются трансцендентным уравнением для комплексной частоты  $v = v' + iv''$ , которое следует из равенства нулю знаменателя функции Грина (10)

$$v - k^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 M(v, \mathbf{k}) = 0. \quad (16)$$

Высокочастотная восприимчивость ферромагнетика пропорциональна комплексной функции Грина  $G(v, \mathbf{k}) = G'(v, \mathbf{k}) + iG''(v, \mathbf{k})$ , которая зависит от действительной частоты  $v$  внешнего высокочастотного поля и действительного волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Хорошо известно, что спектр волн в сверхрешетке  $v = v(k)$  имеет зонную структуру. При значениях  $k = nq/2$ , соответствующих краям зон Бриллюэна номера  $n$ , в спектре образуются щели (запрещенные зоны). Для синусоидальных сверхрешеток наибольший интерес представляет край первой зоны Бриллюэна, так как ширины последующих запрещенных зон быстро уменьшаются с ростом номера зоны [22]. Для сверхрешеток с более резкими границами между слоями уменьшение ширины запрещенных зон с ростом  $n$  замедляется (такие ситуации были рассмотрены в работах [22,24,25]). Здесь ограничимся исследованием магнитной восприимчивости синусоидальной сверхрешетки на краю первой зоны Бриллюэна:  $k = k_r \equiv q/2$ . При отсутствии неоднородностей в случае пренебрежения собственным затуханием волн ширина щели в спектре при  $k = k_r$  (соответствующая расстоянию между уровнями расщепленного спектра  $v_+(k_r)$  и  $v_-(k_r)$ ) равна  $\Lambda$ . При этом на зависимости  $G''(v)$  при  $k = k_r$  будут наблюдаться два  $\delta$ -образных пика на расстоянии  $\Lambda$  друг от друга. С ростом среднеквадратичной флуктуации неоднородностей  $\gamma$  расстояние между уровнями спектра  $v'_+ - v'_-$  будет уменьшаться, и при некотором критическом значении  $\gamma$  произойдет закрытие щели в спектре. Одновременно с ростом  $\gamma$  будет возрастать затухание  $v''(k)$ , которое как функция  $k$  имеет максимум при  $k = k_r$ . Пики на зависимости  $G''(v)$  с ростом  $\gamma$  будут уменьшаться и сближаться до тех пор, пока при некотором  $\gamma$  не сольются в один пик. Качественно картина изменения расстояния между максимумами пиков  $\Delta v_m$  соответствует изменению расстояния между собственными частотами  $v'_+ - v'_-$ , но точного количественного соответствия между этими расстояниями при  $\gamma \neq 0$  нет [20]. Это качественное описание изменения ширины щели в спектре и расстояния между максимумами  $G''(v)$  с ростом среднеквадратичных флуктуаций справедливо как для 1D-, так и для 3D-неоднородностей.

Однако количественные различия между влиянием 1D- и 3D-неоднородностей очень велики. Так, закрытие щели в спектре (или слияние двух максимумов  $G''(\nu)$  в один) для 1D-неоднородностей произойдет при критических значениях  $\gamma_1$ , много меньших соответствующих критических значений  $\gamma_3$  для 3D-неоднородностей [23].

Как уже упоминалось, в работах [17,20–28] при анализе собственных частот и затуханий и при анализе магнитных восприимчивостей были использованы приближенные корреляционные функции сверхрешетки (14) и (15). При исследовании спектра  $\nu(k)$  использование подобных приближений неизбежно, так как, не проведя интегрирования в выражениях для массового оператора (12) и (13), невозможно даже представить трансцендентное уравнение (16) для  $\nu(k)$  в явном виде. Однако при исследовании восприимчивости использование каких-либо приближений для  $K(\mathbf{r})$  не является неизбежным, так как при построении зависимости  $G(\nu)$  возможно проведение численного интегрирования в выражениях (12) и (13) для каждого значения  $\nu$ . Поэтому в данной работе при вычислении зависимостей  $G''(\nu)$  от  $\gamma_i$  и  $\eta_i$  мы используем в выражениях для массовых операторов (12) и (13) как приближенные, так и точные выражения (4) и (5) для структурных функций 1D- и 3D-неоднородностей соответственно.

1) 1D-неоднородности. При использовании приближенного выражения для  $K_1(r_z)$ , соответствующего условию  $\gamma_1^2 \ll 1$  (см. (14)), интеграл в выражении (12) для  $M_1$  легко вычисляется. При этом на границе первой зоны Бриллюэна сверхрешетки ( $k = k_r$ ) в двухволновом приближении при условии  $\Lambda, k_{\parallel} \ll \nu$  можно получить простое выражение для функции Грина

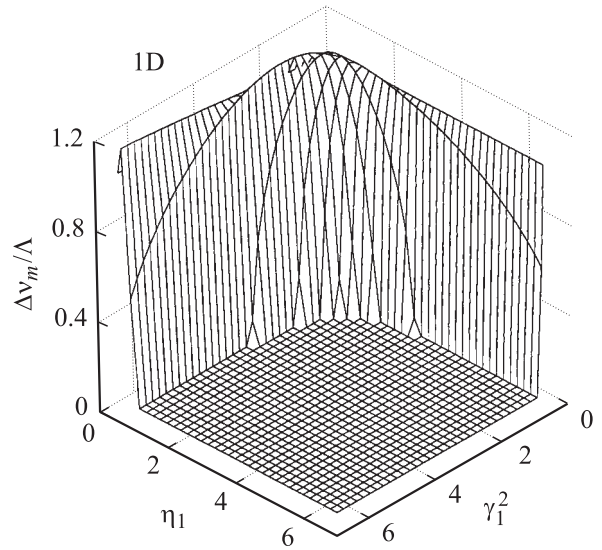
$$G_1(\nu) \approx \frac{1}{\Lambda} \frac{X - i\eta_1\gamma_1^2}{(X - i\eta_1\gamma_1^2) - 1/4}, \quad (17)$$

где  $X = (\nu - k_r^2)/\Lambda$  — безразмерная отстройка частоты от значения  $\nu = k_r^2$ ,  $\eta_1 = k_{\parallel}q/\Lambda$  — безразмерное корреляционное волновое число. Из равенства нулю знаменателя этой функции следует квадратное уравнение для комплексной частоты  $\nu$ , откуда получаем

$$\nu = k_r + \frac{\Lambda}{2} \left[ i\eta_1\gamma_1^2 \pm \sqrt{1 - \eta_1^2\gamma_1^4} \right]. \quad (18)$$

Из этого выражения следует, что щель в спектре  $\Delta\nu = \nu'_+ - \nu'_-$  закрывается при  $\eta_1\gamma_1^2 \geq 1$ . Рассматривая же выражение (17) как функцию действительной частоты  $\nu$ , получаем, что  $G''_1(\nu)$  имеет два пика, расстояние между которыми  $\Delta\nu_m$  уменьшается с ростом  $\gamma_1$  и  $\eta_1$ , и при  $\eta_1\gamma_1^2 \geq 1/\sqrt{2}$  эти пики сливаются в один.

На рис. 1 представлена зависимость  $\Delta\nu_m$  от  $\gamma_1^2$  и  $\eta_1$ , рассчитанная методами численного интегрирования с использованием точной структурной функции (4) в выражении (12) для массового оператора. Из этого рисунка видно, что функция  $\Delta\nu_m$  симметрична относительно взаимной замены переменных  $\gamma_1^2$  и  $\eta_1$  и с достаточной высокой степенью точности является функцией их произведения. Эта симметрия явно видна для приближенных



**Рис. 1.** Зависимость расстояния между пиками мнимой части функции Грина  $G''_1(\nu)$  на краю первой зоны Бриллюэна сверхрешетки с 1D-неоднородностями от  $\gamma_1^2$  и  $\eta_1$ .

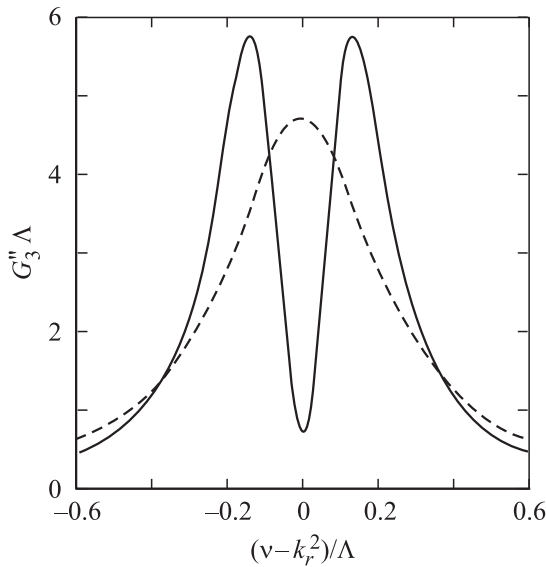
аналитических выражений (17) и (18). Она следовала из того факта, что эффективный корреляционный радиус одномерной синусоидальной сверхрешетки при  $\gamma_1^2 \ll 1$  равен  $(\gamma_1^2 k_{\parallel})^{-1}$ , т.е. обратно пропорционален произведению  $\gamma_1^2 \eta_1$ . Для зависимости  $\Delta\nu_m(\eta_1, \gamma_1^2)$ , рассчитанной с использованием точной корреляционной функции, такая симметрия заранее не была очевидна. Небольшое увеличение расстояния между пиками  $\Delta\nu_m$  по сравнению с  $\Lambda$  при малых значениях произведения  $\gamma_1^2 \eta_1$  согласуется с таким же эффектом, полученным нами ранее для ширины щели в спектре [17]. В указанной работе этот эффект объяснялся влиянием гауссовских корреляций, которым соответствует нижняя строчка в формуле (14).

2) 3D-неоднородности. При использовании приближенного выражения (15) для корреляционной функции 3D-неоднородностей интеграл в выражении (13) для  $M_3$  вычисляется точно. На границе первой зоны Бриллюэна в двухволновом приближении при условии  $\Lambda, k_0^2 \ll \nu$  выражение для функции Грина принимает вид

$$G_3 \approx \frac{1}{\Lambda} \frac{X(X - i\eta_3\gamma_3^2)}{X^2(X - i\eta_3\gamma_3^2) - 1/4(X - i\eta_3\gamma_3^2L)}, \quad (19)$$

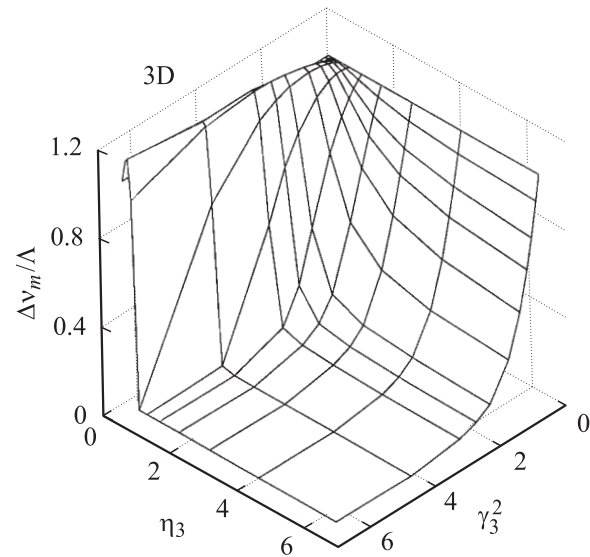
где  $\eta_3 = k_0q/\Lambda$  — безразмерное волновое число 3D-неоднородностей.

Из равенства нулю знаменателя этой функции следует кубическое уравнение для комплексной частоты, зависимость которой от  $\gamma_3^2$  была проанализирована в работе [25] численно. Из вида функции (19) следует, что симметрия относительно параметров  $\gamma_3^2$  и  $\eta_3$  для 3D-неоднородностей не имеет места. Действительно, в отличие от функции (17), которая содержала только произведения  $\gamma_1^2 \eta_1$ , функция (19) помимо произведений  $\gamma_3^2 \eta_3$  содержит величину асимптоты  $L$  корреляционной функции, которая зависит только от  $\gamma_3^2$ .

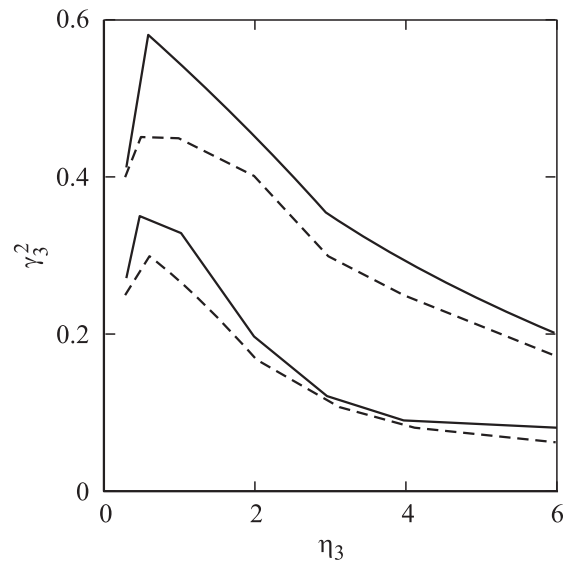


**Рис. 2.** Частотная зависимость мнимой части функции Грина  $G_3''(v)$  на краю первой зоны Бриллюэна сверхрешетки с 3D-неоднородностями для  $\gamma_3^2 = 1$ ,  $\eta_3 = 4$  (сплошная кривая) и  $\gamma_3^2 = 4$ ,  $\eta_3 = 1$  (штриховая кривая).

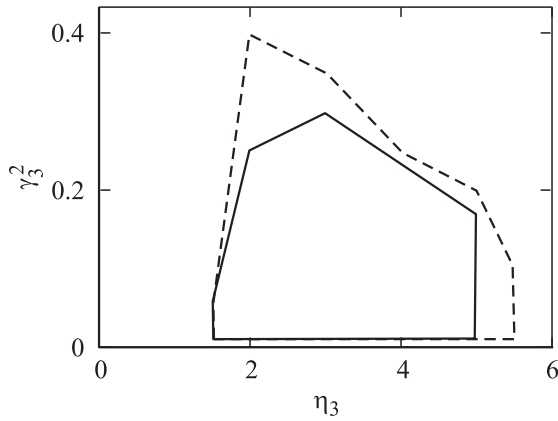
На рис. 2 показана частотная зависимость функции  $G_3''$  на краю первой зоны Бриллюэна сверхрешетки ( $k = k_r$ ), рассчитанная численно с использованием точной структурной функции (5) в выражении для массового оператора (13). Обе кривые на этом рисунке соответствуют одному значению произведения  $\gamma_3^2 \eta_3 = 4$ . Однако сплошной кривой отвечают значения  $\gamma_3^2 = 1$  и  $\eta_3 = 4$ , а штриховой —  $\gamma_3^2 = 4$  и  $\eta_3 = 1$ . Видно, что в первом случае функция  $G_3''(v)$  имеет два хорошо выраженных пика (т.е. имеется щель в спектре волн), а второй случай соответствует ситуации, когда оба пика слились в один широкий пик (щель в спектре закрыта). На рис. 3 показана зависимость расстояния между максимумами  $\Delta v_m$  от  $\gamma_3^2$  и  $\eta_3$ , рассчитанная также с использованием точной структурной функции (5). Эта зависимость резко отличается от зависимости  $\Delta v_m(\gamma_1^2, \eta_1)$  для 1D-неоднородностей, приведенной на рис. 1: для 3D-неоднородностей наблюдается асимметрия функции  $\Delta v_m$  относительно взаимной замены  $\gamma_3^2$  и  $\eta_3$ . Такое расхождение между спектральными характеристиками сверхрешеток с 1D- и 3D-неоднородностями обусловлено принципиальным различием формы корреляционных функций 1D- и 3D-неоднородностей. Это различие хорошо видно на примере приближенных аналитических выражений (14) и (15), асимптотика которых соответствует асимптотике точных функций  $K_1(r_z)$  и  $K_3(r)$ . Если для 1D-неоднородностей корреляционная функция стремится к нулю при  $r_z \rightarrow \infty$ , то спадающая часть  $K_3(r)$  при  $r \rightarrow \infty$  стремится к ненулевой асимптоте  $L$ , величина которой зависит от  $\gamma_3^2$  и не зависит от  $\eta_3$ .



**Рис. 3.** Зависимость расстояния между пиками мнимой части функции Грина  $G_3''(v)$  на краю первой зоны Бриллюэна сверхрешетки с 3D-неоднородностями от  $\gamma_3^2$  и  $\eta_3$ .



**Рис. 4.** Диаграмма области применимости приближенных выражений для корреляционной функции (15) и для функции Грина (19). В области между сплошными кривыми отличия выражения (19) от функции Грина, соответствующей точной корреляционной функции, не превосходят 10%, в области между штриховыми кривыми — 20%.



**Рис. 5.** Диаграмма области применимости приближенных выражений для корреляционной функции (20) и для функции Грина (21). В области, ограниченной сплошными кривыми, отличия выражения (21) от функции Грина, соответствующей точной корреляционной функции, не превосходят 10%, в области, ограниченной штриховыми кривыми, — 20%.

функции (15) и выражения (19) для функции Грина показана на рис. 4. Для построения этой области сравнивались между собой как расстояния между пиками мнимой части функции Грина, так и ширины этих пиков, соответствующие приближенной и точной корреляционным функциям, и на параметрической плоскости  $\gamma_3^2 \eta_3$  очерчивалась область, где различия между этими характеристиками не превосходят 10% (сплошные кривые) или 20% (штриховые кривые). Следует отметить, что критической характеристикой в большинстве случаев оказывается ширина пика. Расстояния между пиками приближенная формула (19) передает с точностью много лучшей, чем их ширины. Из рис. 4 видно, что существует довольно широкая область параметров  $\gamma_3^2$  и  $\eta_3$ , в которой использование приближенного аналитического выражения для функции Грина (19) вполне оправдано. Неожиданной оказалась плохая применимость этого выражения для малых значений  $\gamma_3^2$ .

В связи с этим был проведен расчет функции Грина для 3D-неоднородностей с использованием другой аппроксимирующей корреляционной функции

$$K_3(r) = \cos qr_z \left[ (1 - L) \exp\left(-\frac{\gamma_3^2 k_0^2 r^2}{2}\right) + L \right]. \quad (20)$$

Эта функция отличается от функции (15) только тем, что в ней постулирован гауссовский спад корреляций в отличие от экспоненциального спада в (15). При использовании выражения (20) интеграл в формуле для  $M_3$  (13) также может быть вычислен точно. На границе первой зоны Бриллюэна в двухволновом приближении при тех же условиях, которые использовались выше ( $\Lambda, k_0^2 \ll \nu$ ), выражение для функции Грина теперь

принимает вид

$$G_3 \approx \frac{1}{\Lambda} \left\{ X - \frac{1-L}{2\sqrt{2}\eta_3\gamma_3} \left[ D\left(\frac{X}{\sqrt{2}\eta_3\gamma_3}\right) - i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{X^2}{2\eta_3^2\gamma_3^2}\right) \right] - \frac{L}{4X} \right\}^{-1}, \quad (21)$$

где  $D(s) = e^{-s^2} \int_0^s e^{t^2} dt$  — интеграл Досона. Частотные зависимости функции  $G_3''(\nu)$ , описываемой выражением (21), сравнивались с  $G_3''(\nu)$ , соответствующей точной корреляционной функции. Сравнение проводилось по тем же двум характеристикам, которые были использованы выше: расстояние между пиками и ширина пиков. В результате была получена диаграмма области применимости выражения (21) и аппроксимации (20) для корреляционной функции сверхрешетки (рис. 5). Видно, что эта диаграмма только частично перекрывается с диаграммой, приведенной на рис. 4. Сравнение этих диаграмм показывает, что, например, в области малых значений  $\eta_3$  при  $\gamma_3^2 \sim 0.3-0.5$  аппроксимация корреляционной функции выражением (15) более точна, чем выражением (20), а в области малых  $\gamma_3^2$  и  $\eta_3 \sim 2-5$  ситуация обратная и выражение (20) точнее. Таким образом, аппроксимации (15) и (20) являются взаимодополняющими.

## 4. Заключение

В настоящей работе исследовано влияние корреляционных свойств 1D- и 3D-неоднородностей структуры первоначально синусоидальной ферромагнитной сверхрешетки на ее высокочастотную магнитную восприимчивость. Для описания стохастических свойств неоднородностей сверхрешетки использовались корреляционные функции, выведенные ранее методом случайной пространственной модуляции (RSM) периода сверхрешетки [17]. В этом методе неоднородности структуры сверхрешетки описываются моделью случайной фазы, зависящей от координаты  $z$  для 1D-неоднородностей и от всех трех координат  $\mathbf{x}$  для 3D-неоднородностей. Случайная фаза характеризуется монотонно убывающей корреляционной функцией с произвольным значением относительных среднеквадратичных флуктуаций  $\gamma_i$  и нормированных корреляционных волновых чисел  $\eta_i$ , где  $i = 1, 3$  соответственно для 1D- и 3D-неоднородностей. Как было показано ранее [17], форма выведенных на основе этой модели методом RSM корреляционных функций сверхрешетки  $K_i(r)$  слабо зависит от конкретного вида корреляционных функций, моделирующих стохастические свойства случайной фазы. Однако эта форма сильно зависит от размерности неоднородностей: если для 1D-неоднородностей  $K_1(r_z) \rightarrow 0$  при  $r_z \rightarrow \infty$ , то для 3D-неоднородностей при  $r \rightarrow \infty$   $K_3(r)$  стремится к отличной от нуля асимптоте  $L = \exp(-3\gamma_3^2)$ .

Эти корреляционные функции были использованы для вычисления усредненной функции Грина  $G_i(\nu, k)$ , через которую выражается высокочастотная восприимчивость, для 1D- и 3D-неоднородностей. Массовый член функции Грина находился в приближении Буре численным интегрированием выражений, содержащих точные корреляционные функции  $K_1(r_z)$  или  $K_3(r)$  для 1D- и 3D-случаев соответственно. Частотные зависимости мнимых частей функций Грина  $G''(\nu)$  исследовались при фиксированном значении волнового числа  $k$ , соответствующем границе первой зоны Бриллюэна свехрешетки (фиксация волнового числа может быть достигнута с помощью размерного эффекта в экспериментальной ситуации, соответствующей спин-волновому резонансу в такой пленке [20]). При этом на зависимости  $G''_i(\nu)$  должны наблюдаться два пика, расстояние между которыми  $\Delta\nu_m$  приближенно соответствует ширине щели в спектре на границе зоны Бриллюэна. Зависимость  $\Delta\nu_m$  от  $\gamma_i$  была исследована ранее [20,23] с использованием приближенных выражений для  $K_1(r_z)$  и  $K_3(r)$ . В настоящей работе исследована зависимость  $\Delta\nu_m$  как от  $\gamma_i$ , так и от  $\eta_i$  с использованием точных выражений  $K_1(r_z)$  и  $K_3(r)$ . Показано, что для 1D-неоднородностей двумерная функция  $\Delta\nu_m(\gamma_1, \eta_1)$  симметрична относительно взаимной замены величин  $\gamma_1^2$  и  $\eta_1$  (рис. 1), в то время как для 3D-неоднородностей получена резкая асимметрия функции  $\Delta\nu_m(\gamma_3, \eta_3)$  относительно взаимной замены величин  $\gamma_3^2$  и  $\eta_3$  (рис. 3). Этот эффект обусловлен различием формы корреляционных функций для 1D- и 3D-неоднородностей. Корреляционная функция  $K_1(r_z)$  имеет корреляционный радиус, обратно пропорциональный произведению  $\gamma_1^2\eta_1$ . Это и приводит к симметрии функции  $\Delta\nu_m$  относительно взаимной замены величин  $\gamma_1^2$  и  $\eta_1$ . Радиус корреляционной функции  $K_3(r)$  обратно пропорционален аналогичному произведению  $\gamma_3^2\eta_3$ . Но функция  $K_3(r)$  отличается от функции  $K_1(r_z)$  наличием асимптоты  $L$ , которая делит весь корреляционный объем на две части, характеризующиеся конечным радиусом корреляций (над асимптотой  $L$ ) и бесконечным радиусом корреляций (под асимптотой  $L$ ). Положение этой асимптоты зависит от  $\gamma_3^2$  и не зависит от  $\eta_3$ . Это и ведет к асимметрии функции  $\Delta\nu_m(\gamma_3, \eta_3)$  относительно взаимной замены величин  $\gamma_3^2$  и  $\eta_3$ . Этот эффект может быть использован для определения размерности структурных неоднородностей свехрешетки спектральными методами, если имеется технологическая возможность контролировать независимые изменения величин  $\gamma_i^2$  и  $\eta_i$ .

Проведено также сравнение функций  $\Delta\nu_m(\gamma_3, \eta_3)$ , найденных с использованием как точной корреляционной функции  $K_3(r)$ , так и приближенных аналитических выражений для этой функции. Это позволило построить диаграммы в плоскости  $\gamma_3^2\eta_3$  (рис. 4 и 5), определяющие границы применимости приближенных аналитических выражений для  $K_3(r)$ : как использованного нами ранее [25–28] выражения (15), так и предложенного здесь выражения (20). Этими же диаграммами определяются границы применимости приближенных аналитических выражений для функций Грина (19) и (21).

## Список литературы

- [1] J.B. Shellan, P. Agmon, P. Yariv. *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 1, 18 (1978).
- [2] Ю.Я. Платонов, Н.И. Полушкин, Н.Н. Салащенко, А.А. Фраерман. *ЖТФ* **57**, 11, 2192 (1987).
- [3] J.M. Luck. *Phys. Rev. B* **39**, 9, 5834 (1989).
- [4] S. Tamura, F. Nori. *Phys. Rev. B* **41**, 11, 7941 (1990).
- [5] N. Nishiguchi, S. Tamura, F. Nori. *Phys. Rev. B* **48**, 4, 2515 (1993).
- [6] G. Pang, F. Pu. *Phys. Rev. B* **38**, 17, 12 649 (1988).
- [7] J. Yang, G. Pang. *J. Magn. Magn. Mater.* **87**, 1–2, 157 (1990).
- [8] D.H.A.L. Anselmo, M.G. Cottam, E.L. Albuquerque. *J. Appl. Phys.* **87**, 8, 5774 (1999).
- [9] L.I. Deych, D. Zaslavsky, A.A. Lisyansky. *Phys. Rev. E* **56**, 4, 4780 (1997).
- [10] B.A. Van Tiggelen, A. Tip. *J. Physique I* **1**, 8, 1145 (1991).
- [11] A.R. McGurn, K.T. Christensen, F.M. Mueller, A.A. Maradudin. *Phys. Rev. B* **47**, 20, 13 120 (1993).
- [12] M.M. Sigalas, C.M. Soukoulis, C.-T. Chan, D. Turner. *Phys. Rev. B* **53**, 13, 8340 (1996).
- [13] V.A. Ignatchenko, R.S. Iskhakov, Yu.I. Mankov. *J. Magn. Magn. Mater.* **140–144**, 1947 (1995).
- [14] А.Г. Фокин, Т.Д. Шермергор. *ЖЭТФ* **107**, 1, 111 (1995).
- [15] А.В. Белинский. *УФН* **165**, 6, 691 (1995).
- [16] B. Kaelin, L.R. Johnson. *J. Appl. Phys.* **84**, 10, Pt I, 5451; Pt II, 5458 (1998).
- [17] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov. *Phys. Rev. B* **56**, 1, 194 (1997).
- [18] А.Н. Малахов. *ЖЭТФ* **30**, 5, 884 (1956).
- [19] С.М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Наука, М. (1976). 494 с.
- [20] В.А. Игнатченко, Ю.И. Маньков, А.В. Поздняков. *ЖЭТФ* **116**, 4, 1335 (1999).
- [21] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin. *Phys. Rev. B* **59**, 1, 42 (1999).
- [22] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin. *J. Phys.: Cond. Mater.* **11**, 13, 2773 (1999).
- [23] V.A. Ignatchenko, A.A. Maradudin, A.V. Pozdnyakov. *Phys. Met. Metallogr.* **91**, Suppl. 1, 69 (2001).
- [24] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin. *Phys. Rev. B* **62**, 3, 2181 (2000).
- [25] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin. *Phys. Rev. B* **65**, 2, 024 207 (2002).
- [26] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin. *Письма в ЖЭТФ* **77**, 6, 335 (2003).
- [27] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin. *Phys. Rev. B* **68**, 2, 024 209 (2003).
- [28] V.A. Ignatchenko, A.A. Maradudin, A.V. Pozdnyakov. *Письма в ЖЭТФ* **78**, 9, 1082 (2003).
- [29] R.C. Bourret. *Nuovo Cimento* **26**, 1, 1 (1962); *Can. J. Phys.* **40**, 6, 782 (1962).