01;10

Малоугловое приближение для ионного пучка во внешнем электромагнитном поле

© Н.Д. Наумов

(Поступило в Редакцию 14 декабря 1999 г.)

Сформулирован метод малоуглового приближения для криволинейного ионного пучка во внешнем электромагнитом поле. Рассмотрено влияние разброса скоростей частиц и многократного упругого рассеяния на распространение пучка в магнитном поле, электрическом поле цилиндрического конденсатора и ортогональных электрическом и магнитном полях. Построена аналитическая модель компрессии мощности пучка.

Введение

Необходимость разработки методов расчета движения потоков ионов во внешних электромагнитных полях обусловлена практическими задачами ионной оптики, масс-спектрографии и т. д. [1–3]. Одним из методов теоретического анализа динамики пучков заряженных частиц является параксиальная теория, которая позволяет решать задачу определения внешних формирующих электродов для реализации потока требуемой конфигурации [2], а также рассматривать прямую постановку задачи, когда заданы характеристики внешнего электромагнитного поля, в котором распространяется пучок [4].

Другой метод теоретического анализа динамики пучков заключается в решении кинетического уравнения. В рамках этого подхода можно учесть влияние таких факторов, как наличие разброса скоростей и рассеяние ионов на молекулах газа. Однако с математической точки зрения задача усложняется, так как здесь приходится решать уравнение в частных производных. Применительно к задаче о распространении пучка заряженных частиц во внешнем поле подобные решения известны для случая однородного магнитного поля [5–7]. В данной работе рассматривается более общая задача для криволинейного пучка во внешнем электромагнитном поле. Аналитическое решение подобной задачи можно получить для тонкого пучка, когда отношение поперечных размеров пучка к радиусу его кривизны является малой величиной.

Постановка задачи

Предполагается, что пучок распространяется перпендикулярно оси z, т. е. ось пучка является плоской кривой. Подобная конфигурация пучка может быть реализована, в частности, в ортогональных неоднородном электрическом поле $\mathbf{E} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y$ и однородном магнитном поле $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$. Переход к более общей задаче, когда ось пучка представляет собой пространственную кривую, связан только с более громоздкими выражениями. Также из соображений краткости в основном речь идет о распространении криволинейного ленточного пучка; только в последнем разделе рассматривается пучок, ограниченный в направлении оси z.

Движение пучка удобно рассматривать относительно системы криволинейных координат s, q, ζ.

$$\mathbf{x} = \mathbf{Y}(s) + q\mathbf{n} + \zeta\mathbf{b}.$$

Кривая $\mathbf{Y}(s)$ представляет собой ось сечения пучка в плоскости $z = 0$; координата s — длина траектории осевых частиц от места инжекции пучка; $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} = \pm\mathbf{e}_z$ — векторы трехгранника Френе, связанного с кривой $\mathbf{Y}(s)$. Направление вектора $\mathbf{b}$ зависит от направления внешнего электрического поля. Положение оси сечения пучка, задаваемое траекторией осевых частиц, определяется решением уравнения движения одиночной частицы в рассматриваемом внешнем поле. Здесь предполагается, что такое решение известно.

Если подставить выражение для скорости $\mathbf{v} = u\mathbf{t}$ в уравнение движения осевой частицы, то для кривизны ее траектории получается следующее выражение: $k = \kappa - e\mathbf{bB}/mcu$, где $\kappa = eE_{02}/mu^2$. Изменение скорости осевой частицы при распространении пучка определяется величиной E_{01}: $muu' = eE_{01}$. Здесь E_{0i} — составляющие внешнего электрического поля на оси пучка $\mathbf{E}(\mathbf{Y}(s)) = E_{01}\mathbf{t} + E_{02}\mathbf{n}$, штрихом обозначается дифференцирование по s.

Прежде чем перейти к решению задачи, проанализируем структуру внешнего электрического поля вблизи оси пучка. Для краткости ограничимся случаем, когда электрическое поле не зависит от z. Тогда в используемых криволинейных координатах условия $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ принимают следующий вид:

$$kE_1 + E_2' = \rho\frac{\partial E_1}{\partial q}, \quad kE_2 - E_1' = \rho\frac{\partial E_2}{\partial q}, \tag{1}$$

где $\rho = 1 - kq$, $E_1 = \mathbf{tE}$, $E_2 = \mathbf{nE}$.

Подстановка разложений составляющих электрического поля E_i в ряд Тейлора вблизи кривой $\mathbf{Y}(s)$ $E_i = E_{0i} + g_iq + h_iq^2$ в условия (1) позволяет найти необходимые для решения рассматриваемой задачи функции $g_i(s)$ в общем случае

$$g_1 = E_{02}' + kE_{01}, \quad g_2 = kE_{02} - E_{01}'.$$

Уравнение траектории

Уравнение траектории заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле можно получить на основе принципа Мопертюи

$$\delta \int \left(m\Lambda dl + \frac{e}{c}\mathbf{A}d\mathbf{x} \right) = 0.$$

Здесь $\Lambda(\mathbf{x}) = \sqrt{2(W - e\Phi)/m}$; Φ, $\mathbf{A}$ — потенциалы внешнего поля; l — длина дуги траектории. Вычисления, аналогичные случаю частицы в потенциальном поле [8], позволяют найти уравнение траектории при наличии магнитного поля

$$m\Lambda \frac{d}{dl}\left(\Lambda \frac{d\mathbf{x}}{dl}\right) = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\Lambda \left[\frac{d\mathbf{x}}{dl}\mathbf{B}\right]. \qquad (2)$$

Нетрудно видеть, что $\Lambda(\mathbf{x}(l))$ представляет собой модуль скорости частицы; в частности, для траектории частиц на оси пучка $\Lambda(\mathbf{Y}(s)) = u$. Чтобы получить приближенное уравнение траектории вблизи кривой $\mathbf{Y}(s)$, следует представить вектор скорости частицы в следующем виде:

$$\Lambda \frac{d\mathbf{x}}{dl} = u\big[(1+\alpha)\mathbf{t} + q'\mathbf{n}\big]. \qquad (3)$$

Для траектории, расположенной вблизи оси пучка, значения kq, α будут малыми. Подставляя выражение (3) в уравнение (2) и опуская члены второго порядка малости, найдем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$q'' + \frac{u'}{u}q' + k^2 q + (k+\kappa)\alpha = \frac{eg_2}{mu^2}q, \qquad (4)$$

$$\alpha' + (kq + 2\alpha)\frac{u'}{u} = kq' + \frac{eg_1}{mu^2}q. \qquad (5)$$

Так как уравнение (5) можно формально проинтегрировать в общем виде, то для траектории частицы, движущейся вблизи оси пучка, можно записать одно интегро-дифференциальное уравнение. Однако для практических расчетов проще исходить из системы уравнений (4), (5). В ряде задач удобно в качестве продольной переменной использовать вместо s время движения осевой частицы

$$\tau = \int_0^s \frac{dx}{u(x)},$$

т. е. перейти к параметрическому представлению ее траектории. В этом случае уравнения (4), (5) запишутся в следующем виде (точкой обозначается дифференцирование по τ)

$$\ddot{q} + k^2u^2 q + \alpha(k+\kappa)u^2 = \frac{e}{m}g_2 q, \qquad (6)$$

$$\dot{\alpha} + (kq + 2\alpha)\frac{\dot{u}}{u} = \kappa\dot{q} + \frac{eg_1}{mu}q. \qquad (7)$$

Рассмотрим ряд конкретных примеров. Ось сечения ленточного пучка ионов в секторе однородного магнитного поля представляет собой отрезок окружности, кривизна которой не зависит от s: $k = eB_0/mcu_0$. В этом случае не изменяются по величине как скорость осевых частиц, так и степень немоноэнергетичности пучка — из уравнения (4) следует, что $\alpha = \alpha_0$. Поэтому уравнение (5) заметно упрощается

$$q'' + k^2 q + k\alpha_0 = 0.$$

Отсюда для траектории частицы найдем

$$q = \left(q_0 + \frac{\alpha_0}{k}\right)\cos\psi + \frac{q_0'}{k}\sin\psi - \frac{\alpha_0}{k},$$

где используется обозначение $\psi = ks$.

Отметим, что q_0' характеризует начальную расходимость пучка. Как нетрудно видеть, при $\alpha_0 = -kq_0$ изменение поперечных размеров пучка обусловлено только его начальной расходимостью $q = q_0 + (q_0'/k)\sin\psi$.

При определенных условиях ось пучка в электрическом поле цилиндрического конденсатора представляет собой отрезок окружности; подобное устройство используется в электростатическом анализаторе, применяемом в масс-спектроскопии [3]. Учитывая, что в данном случае $k = eE_{02}/mu_0^2$, $E_{01} = 0$, $g_2 = kE_{02}$, из уравнений (4), (5) для траектории получим

$$q = q_0 + \frac{\alpha_0}{k}(\cos\psi - 1) + \frac{q_0'}{\sqrt{2}k}\sin\psi, \quad \psi = \sqrt{2}ks.$$

В качестве последнего примера рассмотрим пучок в ортогональных однородных полях $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_y$, $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$. Для простоты ограничимся следующим выбором начальных условий для частиц на оси пучка: $x_0 = 0$, $y_0 = (u_0/\Omega)\sin\phi$, $\dot{x}_0 = u_0\sin\phi$, $\dot{y}_0 = u_0\cos\phi$, где $\Omega = eB_0/mc$ — циклотронная частота, ϕ — угол между вектором электрического поля и направлением инжекции частиц с начальной скоростью u_0. В этом случае кривая $\mathbf{Y}(s)$ представляет собой часть циклоиды

$$Y_x = \frac{v_0}{\Omega}(\Omega\tau + \sin 2\phi - \sin 2\psi), \quad Y_y = \frac{v_0}{\Omega}(1 - \cos 2\psi).$$

Здесь введены обозначения $v_0 = cE_0/B_0$, $\psi = \omega\tau + \phi$, $\omega = \Omega/2$, а также используется параметрическое представление продольной координаты $s = 2v_0 \times (\cos\phi - \cos\psi)/\omega$ (при условии $\phi \le \psi \le \pi/2$). Такой выбор начальных условий приходит к сравнительно простым выражениям для кривизны оси пучка $k = \omega/2v_0 \sin\psi$ и векторов трехгранника Френе

$$\mathbf{t} = (\sin\psi, \cos\psi), \quad \mathbf{n} = (\cos\psi, -\sin\psi), \quad \mathbf{b} = -\mathbf{e}_z.$$

Кроме этого, достаточно простой вид принимает и уравнение (6) $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, решение которого не составляет труда.

Влияние разброса скоростей

Вначале рассмотрим влияние разброса скоростей частиц в стационарной постановке задачи. Для этой цели можно использовать кинетическое уравнение в бесстолкновительном приближении

$$L_0 f = S_0, \quad L_0 = \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \qquad (8)$$

где S_0 — плотность источников.

Записывая уравнение (8) в рассматриваемых криволинейных координатах, для оператора L_0 найдем следующее выражение:

$$L_0 = \frac{v_1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s} + \left[v_1 v_2 \frac{k}{\rho} + \frac{e}{m}\left(E_1 + \frac{v_2}{c}B_3\right)\right]\frac{\partial}{\partial v_1}$$
$$+ v_2\frac{\partial}{\partial q} + \left[\frac{e}{m}\left(E_2 - \frac{v_1}{c}B_3\right) - v_1^2\frac{k}{\rho}\right]\frac{\partial}{\partial v_2},$$

где $v_1 = \mathbf{vt}$, $v_2 = \mathbf{vn}$, $B_3 = \mathbf{bB}$.

Полагая $v_1 = u(1+\alpha)$, $v_2 = u\beta$ и удерживая только члены первого порядка малости, в итоге для функции распределения тонкого пучка получим следующее уравнение:

$$Lf(X) = Q(X), \quad Q = \frac{S_0}{u},$$
$$L = \frac{\partial}{\partial s} + \left[\kappa\beta - (2\alpha + kq)\frac{u'}{u} + \frac{eq_1}{mu^2}q\right]\frac{\partial}{\partial \alpha}$$
$$+ \beta\frac{\partial}{\partial q} + \left[\frac{eg_2}{mu^2}q - k^2 q - (k+\kappa)\alpha - \beta\frac{u'}{u}\right]\frac{\partial}{\partial \beta}, \qquad (9)$$

где для краткости через X обозначена совокупность переменных s, q, α, β.

Для решения этого уравнения можно использвать метод функции Грина

$$f(X) = \int G(X, X_0)Q(X_0)dX_0,$$
$$LG(X, X_0) = \delta(X - X_0). \qquad (10)$$

Функия Грина имеет вид

$$G(X, X_0) = \vartheta(s - s_0)\delta\big(q - q(s, X_0)\big)$$
$$\times \delta\big(\alpha - \alpha(s, X_0)\big)\delta\big(\beta - \beta(s, X_0)\big).$$

Здесь $\vartheta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда; $q(s, X_0)$, $\alpha(s, X_0)$, $\beta(s, X_0)$ — решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$q' = \beta, \quad \alpha' = \kappa\beta - (k + 2\alpha)\frac{u'}{u} - \frac{eg_1}{mu^2}q, \qquad (11)$$

$$\beta' = k^2 q - (k+\kappa)\alpha - \beta\frac{u'}{u} + \frac{eg_2}{mu^2}q, \qquad (12)$$

удовлетворяющие следующим условиям: $q(s_0, X_0) = q_0$, $\alpha(s_0, X_0) = \alpha_0$, $\beta(s_0, X_0) = \beta_0$.

Рассмотрим влияние разброса скоростей частиц на распространение ионного пучка в магнитном поле, полагая

$$S_0 = \frac{n_0 u}{2\pi\sigma^2}\delta(s)\delta(q)\exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\sigma^2}\right).$$

В данном случае решения уравнений (11), (12) имеют вид

$$q = \left(q_0 + \frac{\alpha_0}{k}\right)\cos\varphi + \frac{\beta_0}{k}\sin\varphi - \frac{\alpha_0}{k}, \qquad (13)$$

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0\cos\varphi - (\alpha_0 + kq_0)\sin\varphi, \qquad (14)$$

где $\varphi = k(s - s_0)$.

Используя эти выражения, из (10) для функции распределения пучка найдем

$$f = \frac{n_0\vartheta(s)}{2\pi\sigma^2}\delta\big[(q + \frac{\alpha}{k})\cos\psi - \frac{\beta}{k}\sin\psi - \frac{\alpha}{k}\big]$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\big(\alpha^2 + [\beta\cos\psi + (\alpha + kq)\sin\psi]^2\big)\right].$$

Это выражение позволяет определить изменение плотности частиц по мере распространения пучка

$$n = \int f(X)d\alpha d\beta = \frac{n_0\vartheta(s)}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{q^2}{2\varepsilon^2}\right), \qquad (15)$$

где $\varepsilon = (2/k)\sigma\sin(\psi/2)$, $\psi = ks$.

Аналогичный результат получается и для двух других примеров предыдущего раздела: для пучка в неоднородном электрическом поле цилиндрического конденсатора в (15) следует положить

$$\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2k^2}(1 - \cos\sqrt{2}ks)(3 - \cos\sqrt{2}ks),$$

а для пучка в ортогональных полях $\varepsilon = (\sigma u_0/\omega)\sin\omega\tau$. При решении последней задачи удобно использовать параметрическое представление кривой $\mathbf{Y}(s)$, для чего в уравнении (9) следует перейти от s к переменной τ.

Нестационарная инжекция

Для нестационарной задачи исходное уравнение для функции распределения имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L_0\right)f(\xi) = S(\xi), \qquad (16)$$

где ξ обозначает совокупность переменных X, t.

Тогда (9), (10) запишутся в следующем виде:

$$Nf = Q, \quad N = \frac{1}{u}(\rho - \alpha)\frac{\partial}{\partial t} + L, \quad Q = \frac{S}{u},$$

$$f(\xi) = \int \Gamma(\xi, \xi_0)Q(\xi_0)d\xi_0, \quad N\Gamma(\xi, \xi_0) = \delta(\xi - \xi_0).$$

Нестационарная функция Грина имеет вид

$$\Gamma(\xi, \xi_0) = G(X, X_0)\delta\big(t - t(s, \xi_0)\big),$$

где $t(s, \xi_0)$ — решение дифференциального уравнения

$$t' = \frac{1}{u}(1 - kq - \alpha),$$

причем $t(s_0, \xi_0) = t_0$.

В частности, полагая $S = S_0\delta(t)$ и используя полученные выше результаты, для плотности частиц в магнитном поле найдем

$$n = \frac{n_0\vartheta(s)}{2\pi\varepsilon^2}\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}\left[q^2 + u^2\left(t - \frac{s}{u}\right)^2\right]\right).$$

Развитый метод можно использовать для построения аналитической модели компрессии мощности пучка. Речь идет об описании распространения пучка, начальная скорость частиц которого изменяется по определенному закону $u(t) = u_1/\mu$, где $\mu = 1 - u_1 t/R$. В этом случае частица, инжектированная в момент времени $t = 0$, будет находиться при $t = t_1 = R/u_1$ на расстоянии R от места инжекции. Частица, испущенная в более поздний момент времени $t = t_2$ имеет начальную скорость $u_2 = u_1/(1 - t_2/t_1)$ и в момент времени $t = t_1$ будет находиться на таком же расстоянии от места инжекции $u_2(t_1 - t_2) = R$. Таким образом, указанное изменение начальной скорости инжектируемых частиц приводит к пространственно-временнй́ой фокусировке пучка в продольном направлении [1].

Рассмотрим решение уравнения (16) при отсутствии внешнего поля в случае источника, описывающего подобный процесс инжекции в течение промежутка времени $0 \le t \le T$,

$$S = \frac{n_0 u_1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3}\delta(\mathbf{x})\Pi(t)\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu^2 v^2 - 2\mu v_x + u_1^2)\right],$$

где $\Pi(t) = \vartheta(t) - \vartheta(t - T)$.

Здесь предполагается, что относительная величина разброса скоростей частиц остается постоянной в ходе инжекции пучка. В данном случае функция Грина равна

$$\Gamma(t, \mathbf{x}, t_0, \mathbf{x}_0) = \vartheta(t - t_0)\delta\big[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{v}(t - t_0)\big],$$

что приводит к следующему результату для функции распределения:

$$f = \frac{n_0 u_1 \nu^2}{v_x(\sigma\sqrt{2\pi})^3}\Pi\left(t - \frac{x}{v_x}\right)\delta(yv_x - xv_y)\delta(zv_x - xv_z)$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\nu^2\frac{v^2}{v_x^2} + 2\nu u_1 + u_1^2\right)\right],$$

где введено обозначение $\nu = \mu v_x + x/t_1$.

Отсюда для плотности частиц в момент времени $t = t_1$ найдем

$$n(\mathbf{x}, t_1) = N\left(\frac{u_1}{\sigma R\sqrt{2\pi}}\right)^3\exp\left[-\frac{u_1^2}{\sigma^2}\left(\frac{r^2}{R^2} - 2\frac{x}{R} + 1\right)\right],$$

где N — число инжектированных частиц

$$N = n_0\int_0^T u(t)dt = -n_0 R\ln\left(1 - \frac{T}{t_1}\right).$$

Многократное рассеяние

Для учета влияния эффектов многократного упругого рассеяния на параметры пучка, распространяющегося в газообразной среде, используется кинетическое уравнение с интегралом столкновений в малоугловом приближении [9]. Если пренебречь влиянием внешнего поля на процесс столкновений, то для криволинейного тонкого пучка подобное уравнение можно представить в следующем виде:

$$Mf = Q, \quad M = M_1 + M_2,$$

$$M_1 = L - \frac{\chi^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}, \quad M_2 = \gamma\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\chi^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2},$$

где χ^2 — средний квадрат угла рассеяния на единице пути, $\gamma = \mathbf{vb}/u$.

Как нетрудно проверить, функция Грина оператора M имеет следующий вид:

$$G(X_1, x_2, X_{10}, x_{20}) = \vartheta(s - s_0)G_1(X_1, X_{10})G_2(X_2, X_{20}),$$

где функции G_n являются решениями уравнений

$$M_1 G_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial s} + M_2\right)G_2 = 0 \qquad (17)$$

и удовлетворяют условиям $G_n(s_0, x_n, X_{n0}) = \delta(x_n - x_{n0})$. Здесь для краткости используются следующие обозначения совокупностей переменных: $X_n = \{s, x_n\}$, $x_1 = \{q, \alpha, \beta\}$, $x_2 = \{\zeta, \gamma\}$.

Найдем решение первого из уравнений (17) для пучка в однородном магнитном поле. В этом случае следует перейти от q, β к новым переменным η, Θ

$$\eta = (\alpha + kq)\cos\varphi - \beta\sin\varphi - \alpha - kq_0,$$

$$\Theta = \beta\cos\varphi + (\alpha + kq)\sin\varphi - \beta_0,$$

на основе которых получена эта замена переменных, $\varphi = k(s - s_0)$, как и в выражениях (13), (14). В результате, полагая $G_1(X_1, X_{10}) = \delta(\alpha - \alpha_0)F_1(s, \eta, \Theta)$, для F_1 получим следующее уравнение:

$$\left[\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\chi^2}{4}\left(\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \sin 2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\Theta}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\right)\right]F_1 = 0. \qquad (18)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся двойным преобразованием Фурье по переменным η, Θ

$$F_1(s, \eta, \Theta) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\lambda d\omega F(s, \lambda, \omega)\exp(i\lambda\eta + i\omega\Theta). \qquad (19)$$

Подставляя (18) в уравнение (17), для фурье-образа придем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$F' + \frac{\chi^2}{4}(\lambda^2 \sin^2\varphi - \lambda\omega \sin 2\varphi + \omega^2 \cos^2\varphi)F = 0$$

с начальным условием $F(s_0, \lambda, \omega) = k$.

Это уравнение несложно проинтегрировать, и в итоге для функции F_1 найдем

$$F_1 = \frac{k}{\pi D_1}\exp\left[-\frac{1}{D_1^2}(\eta^2 A_1 - 2\eta\Theta A_2 + \Theta^2 A_3)\right],$$

$$A_1 = \frac{\chi^2}{2k}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right), \quad A_2 = -\frac{\chi^2}{2k}\sin^2\varphi,$$

$$A_3 = \frac{\chi^2}{2k}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right), \quad D_1^2 = A_3 A_1 - A_2^2. \qquad (20)$$

Решение уравнения для G_2 получено в [10]; оно имеет аналогичный выражению (20) вид

$$G_2 = \frac{1}{\pi D_2}\exp\left(-\frac{1}{D_2^2}\left[p^2 B_1 - 2p(\gamma-\gamma_0)B_2 + (\gamma-\gamma_0)^2 B_3\right]\right),$$

$$p = \zeta - \zeta_0 - \gamma(s - s_0), \; B_n = \frac{\chi^2}{n}(s - s_0)^n, \; D_2^2 = B_3 B_1 - B_2^2.$$

В случае дельта-образного источника $S_0 = n_0 u \times \times \delta(X_1)\delta(x_2)$ для плотности частиц найдем

$$n = \frac{k n_0 \vartheta(s)}{\pi\sqrt{a_3 b_3}}\exp\left(-\frac{k^2 q^2}{a_3} - \frac{z^2}{b^3}\right),$$

где a_3, b_3 — значения коэффициентов A_3, B_3 при $s_0 = 0$.

Эти величины характеризуют расширение пучка вследствие многократного упругого рассеяния ионов на молекулах газа.

Для пучка в поле цилиндрического конденсатора следует использовать следующую замену переменных:

$$\eta = \frac{k}{2}(q - q_0) + \alpha\left(\cos\varphi - \frac{1}{2}\right) - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\sin\varphi - \frac{\alpha_0}{2},$$

$$\xi = k(q - q_0) - \alpha + \alpha_0, \theta = \beta\cos\varphi + \sqrt{2}\alpha\sin\varphi - \beta_0,$$

где $\varphi = \sqrt{2}k(s - s_0)$.

Затем, полагая $G_1 = \delta(\xi)F_1(s, \eta, \Theta)$, таким же способом найдем F_1 в виде выражения (20) с похожими значениями коэффициентов A_n

$$A_1 = \frac{\chi^2}{2\sqrt{2}k}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right), \quad A_2 = -\frac{\chi^2}{4k}\sin^2\varphi,$$

$$A_3 = \frac{\chi^2}{4\sqrt{2}k}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right).$$

Аналогично можно построить функцию Грина и для пучка в ортогональных полях, используя параметрическое представление оси пучка и производя соответствующую замену переменных. Практическая значимость разработанного методического аппарата заключается в возможности оценки параметров криволинейного ионного пучка, распространяющегося во внешнем электромагнитом поле. Эти оценки будут применимы в той области, где еще не происходит заметного утолщения пучка вследствие влияния таких факторов, как разброс скоростей частиц и многократное упругое рассеяние ионов на молекулах газа.

Список литературы

[1] *Быстрицкий В.М., Диденко А.Н.* Мощные ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1984.
[2] *Молоковский С.И., Сушков А.Д.* Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991.
[3] *Джейрам Р.* Масс-спектрография. М.: Мир, 1969.
[4] *Сыровой В.А.* // РЭ. 1993. Т. 37. № 9. С. 1692–1702.
[5] *Андреев С.П., Кошелкин А.В.* // ДАН. 1986. Т. 289. № 3. С. 593–596.
[6] *Наумов Н.Д.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 2. С. 178–180.
[7] *Ковалев С.Д., Кузовлев А.И., Рогозкин Д.Б.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 6. С. 37–46.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.А.* Механика. М.: Наука, 1973.
[9] *Hughes T.P., Godfrey B.B.* // Phys. Fluids. 1984. Vol. 27. N 6. P. 1531–1537.
[10] *Ремизович В.С., Рогозкин Д.Б., Рязанов М.И.* Флуктуации пробегов заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1988. С. 83.