

01;03

Энергетический анализ возможных каналов распада заряженной капли на две части

© С.И. Щукин, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 14 октября 1998 г.)

На основе численного анализа математического выражения для потенциальной энергии изолированной заряженной сферической капли и двух близко расположенных сферических дочерних капель исследованы закономерности деления на две части сравнимых размеров сильно заряженной капли при учете электростатического взаимодействия дочерних капель. Показано, что с увеличением расстояния между дочерними каплями в момент разрыва соединяющей их перетяжки возрастает не только вероятность самопроизвольного деления сильно заряженной капли на две дочерние, но и степень симметричности деления.

Введение

Исследование закономерностей реализации неустойчивости сильно заряженных капель и кластеров представляет интерес в связи с многочисленными приложениями феномена в геофизике, жидкостной масс-спектрометрии, жидкометаллической эпитаксии и литографии, при получении порошков тугоплавких металлов и т.п. [1–3]. Распад капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду, может идти по различным каналам в зависимости от величины начальной деформации капли, ее заряда, размера, вязкости и электропроводности [1,3–9].

Наиболее детально изученным является распад сильно заряженной капли маловязкой хорошо проводящей жидкости [1,3,10–13]. При таком распаде капля, несущая заряд, равный (или больший) предельному по Рэлею, распадается, эмиттируя примерно две сотни на два порядка более мелких дочерних капелек и теряя при таком распаде всего лишь 0.05 своей исходной массы и 0.23 исходного заряда. Вместе с тем в целом ряде экспериментов (см., например, [4–7,14,15]) отмечалось деление заряженных капель на небольшое количество частей сравнимых размеров. В экспериментах [6] деление капли на части сравнимых размеров обусловлено влиянием значительной вязкости среды, демпфирующей неустойчивость высоких мод капиллярных колебаний неустойчивой капли. В экспериментах [4] деление капли на части сравнимых размеров при докритическом заряде обусловлено значительными механическими деформациями изначально сферической капли, в [5] то же явление обусловлено торможением в резко неоднородном внешнем электрическом поле.

Теоретические исследования распада сильно заряженной капли или кластера на две части сравнимых размеров проводились неоднократно [2,8,16–18]. В последнем переиздании книги [19] такая задача включена в качестве примера. Однако во всех подобных исследованиях, проводившихся на основе сравнения полной потенциальной энергии исходной капли с потенциальной энергией двух дочерних капелек, использовались достаточно грубые модели для оценки энергии электростатического взаи-

модействия дочерних капель, что приводило в конечном итоге к некорректности проведенных рассуждений и неверности количественных критериев. Следует отметить, что сама идея использованного в [2,16–19] энергетического подхода заимствована из работ Френкеля [20] и Бора [21] по капельной модели ядра. Но если в задаче о делении ядра можно было обосновать пренебрежение электростатическим взаимодействием дочерних ядер, то в случае заряженных кластеров и капель этого сделать уже нельзя.

В связи со сказанным ниже будет проведен энергетический анализ возможности распада сильно заряженной капли на две части сравнимых размеров со строгим учетом энергии электростатического взаимодействия дочерних капель на основе приведенных в [22] выражений для коэффициента взаимной емкости двух близко расположенных сфер.

1. Считая капли, образовавшиеся на заключительном этапе деления, соприкасающимися сферами, определим возможность реализации различных каналов деления капли при различных величинах заряда исходной капли на основе анализа полной потенциальной энергии системы. Под потенциальной энергией системы двух капель будем понимать сумму энергии сил их поверхностного натяжения и их полной электростатической энергии

$$U = U_s + U_e, \quad (1)$$

где энергия сил поверхностного натяжения

$$U_s = 4\pi\alpha(R_1^2 + R_2^2), \quad (2)$$

а электростатическая энергия системы, состоящей из двух проводников, запишется в виде

$$U_e = \frac{1}{2}C_{11}V_1^2 + C_{12}V_1V_2 + \frac{1}{2}C_{22}V_2^2,$$

где C_{11} и C_{22} — коэффициенты емкости первого и второго проводников; C_{12} — коэффициент взаимной емкости; V_1 и V_2 — потенциалы проводников, связанные с их зарядами и емкостями следующим образом:

$$V_1 = \frac{Q_2C_{12} - Q_1C_{22}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, \quad V_2 = \frac{Q_1C_{12} - Q_2C_{11}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}.$$

Обозначив через x отношение зарядов капель

$$Q_2 = xQ_1, \quad (3)$$

на основании закона сохранения заряда можно записать

$$Q_1 = \frac{Q}{(1+x)}, \quad (4)$$

где Q — суммарный заряд.

Тогда выражения для потенциалов и энергии переписываются в виде

$$V_1 = \frac{Q(C_{22} - xC_{12})}{(1+x)(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)},$$

$$V_2 = \frac{Q(xC_{11} - C_{12})}{(1+x)(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)},$$

$$U_e = \frac{(x^2C_{11} + C_{22} - 2xC_{12})Q^2}{(2C_{11}C_{22} - 2C_{12}^2)(1+x)^2}.$$

Если предположить, что капли имеют одинаковые потенциалы ($V_1 = V_2$), то отношение величин зарядов капель x выражается через коэффициенты емкости простым соотношением

$$x = \frac{C_{22} + C_{12}}{C_{12} + C_{11}}, \quad (5)$$

и выражение для электростатической энергии упрощается

$$U_e = \frac{Q^2}{2(C_{11} + C_{22} + 2C_{12})}. \quad (6)$$

Следует отметить, что в соответствии с известной в электростатике теоремой Томпсона, решение уравнения $\partial U_e / \partial x = 0$ относительно x также приводит к выражениям (5), (6). Т.е. условие равенства потенциалов двух заряженных сфер является одновременно условием минимальности электростатической энергии системы при условии сохранения суммарного заряда.

Выражения для коэффициентов емкости двух проводящих сфер имеют вид [22]

$$C_{11} = R_1 R_2 \sinh(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_2 \sinh(nt) + R_1 \sinh((n-1)t) \right)^{-1},$$

$$C_{22} = R_1 R_2 \sinh(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_1 \sinh(nt) + R_2 \sinh((n-1)t) \right)^{-1},$$

$$C_{12} = -\frac{R_1 R_2 \sinh(t)}{R_{12}} \sum_{n=1}^{\infty} (\sinh(nt))^{-1},$$

где t определяется выражением

$$\cosh(t) = \frac{R_{12}^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2},$$

R_1, R_2 — радиусы капель; R_{12} — расстояние между их центрами.

Обозначим через y отношение радиусов капель

$$R_2 = yR_1 \quad (7)$$

и запишем на основании закона сохранения массы

$$R_1 = \frac{R}{(1+y^3)^{1/3}}. \quad (8)$$

Тогда, принимая

$$R_{12} = (1+y+z)R_1, \quad (9)$$

представим выражение для электростатической энергии (6) в виде

$$U_e = Q^2 \sqrt[3]{1+y^3} \left\{ 2Ry \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1nt} + C_{2nt} + C_{12nt}) \right\}^{-1}, \quad (10)$$

где

$$C_{1nt} \equiv \frac{\sinh(t)}{y \sinh(nt) + \sinh((n-1)t)},$$

$$C_{2nt} \equiv \frac{\sinh(t)}{\sinh(nt) + y \sinh((n-1)t)},$$

$$C_{12nt} \equiv -2 \frac{\sinh(t)}{\sinh(nt)(1+y+z)},$$

$$t \equiv \operatorname{arccosh} \left(\frac{2y + 2z + 2yz + z^2}{2y} \right).$$

Для соприкасающихся сфер $z = 0$. В этом случае (5) записывается как

$$x = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(y \sinh(nt) + \sinh((n-1)t) \right)^{-1} - \frac{1}{\sinh(nt)(1+y)} \right\} \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sinh(nt) + y \sinh((n-1)t) \right)^{-1} - \frac{1}{\sinh(nt)(1+y)} \right\}^{-1}$$

и предельным переходом при $t = 0$ может быть приведено к виду

$$x = \frac{\Psi\left(\frac{1}{1+y}\right) + \gamma}{\Psi\left(\frac{y}{1+y}\right) + \gamma}. \quad (11)$$

При этом (10) переходит в

$$U_e = \frac{-Q^2 \sqrt[3]{1+y^3} (1+y)}{2Ry \left\{ \Psi((1+y)^{-1}) + \Psi(y(1+y)^{-1}) + 2\gamma \right\}}, \quad (12)$$

где Ψ обозначает дигамма-функцию, а γ — константа Эйлера

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (i)^{-1} - \ln(n) \right\} \approx 0.5772156649.$$

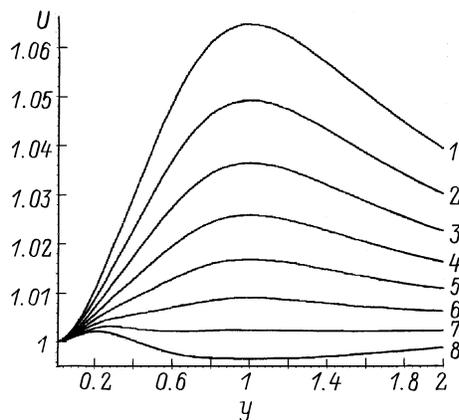


Рис. 1. Зависимость безразмерной полной энергии двух заряженных соприкасающихся сферических капель от отношения их радиусов при $W = 2.5$ (1), 3.0 (2), 3.5 (3), 4.0 (4), 4.5 (5), 5.0 (6), 5.5 (7), 6.0 (8).

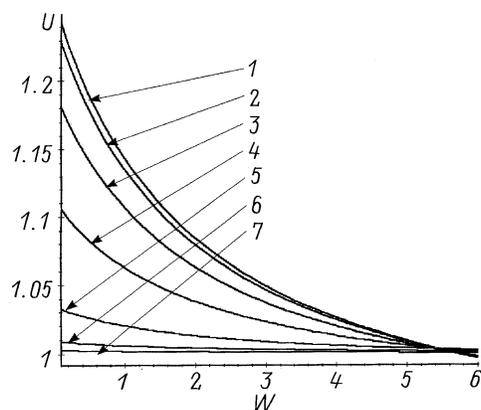


Рис. 2. То же, что на рис. 1, в зависимости от параметра Рэлея при $y = 1.0$ (1), 0.8 (2), 0.6 (3), 0.4 (4), 0.2 (5), 0.1 (6), 0.05 (7).

Следует отметить, что условие (11), полученное из условия равенства потенциалов соприкасающихся заряженных сфер, существенно отличается от часто используемого соотношения

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

получающегося из условия равенства относительно бесконечности потенциалов уединенных (бесконечно удаленных) заряженных сфер.

Анализ зависимости электростатической энергии системы двух сфер, определяемой выражением (12), показывает, что минимум электростатической энергии наблюдается при $y = 1$ и равен

$$U_{\min} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2 \ln(2)} \approx 0.90884.$$

С учетом (1), (2) и (12) можно записать выражение для полной потенциальной энергии системы двух соприкасающихся заряженных сферических капель, имеющих

одинаковые потенциалы, обезразмеренной на полную потенциальную энергию сферической капли, имеющей такие же заряд и массу,

$$U = \left\{ \frac{1 + y^2}{(1 + y^3)^{2/3}} - \frac{W \sqrt[3]{1 + y^3} (1 + y)}{2y \left(\Psi((1 + y)^{-1}) + \Psi\left(\frac{y}{1+y}\right) + 2\gamma \right)} \right\} \times \left(1 + \frac{W}{2} \right)^{-1}, \quad (13)$$

$W \equiv Q^2 / (4\pi\alpha R^3)$ — параметр Рэлея.

Графики зависимости обезразмеренной полной энергии двух заряженных соприкасающихся сферических капель от отношения их радиусов, полученных по (13) при различных значениях параметра Рэлея W , приведенных на рис. 1, показывают, что по мере изменения параметра W эта зависимость претерпевает не только количественные, но и качественные изменения. При малых значениях параметра Рэлея энергия монотонно возрастает от единицы до некоторого максимального значения при увеличении отношения радиусов дочерних капель от близких к нулю (одна очень маленькая капелька, а другая почти равна по объему родительской) до единицы (две дочерние капли одинакового размера). При увеличении значения параметра Рэлея на зависимости $U = U(y)$ появляется сначала локальный, а затем и глобальный минимум, причем положение минимума смещается от малых значений y к $y = 1$.

Зависимость обезразмеренной полной энергии от параметра Рэлея (рис. 2) имеет монотонно убывающий характер и не претерпевает качественных изменений при изменении отношения радиусов. Приравняем нулю производную $\partial U / \partial y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} = & \left\{ \frac{2y}{(1 + y^3)^{2/3}} - 2 \frac{(y^2 + 1)y^2}{(1 + y^3)^{5/3}} - \frac{W(y + 1)y}{2(1 + y^3)^{2/3}A} \right. \\ & \left. + \frac{W \sqrt[3]{1 + y^3}}{2yA} \left[\frac{1}{y} + \frac{\Psi\left(1, \frac{y}{y+1}\right)}{y + 1} - \frac{\Psi\left(1, (y + 1)^{-1}\right)}{(y + 1)A} \right] \right\} \\ & \times \left(1 + \frac{W}{2} \right)^{-1} = 0, \\ & A = 2\gamma + \Psi\left(\frac{y}{y + 1}\right) + \Psi\left(\frac{1}{y + 1}\right) \quad (14) \end{aligned}$$

и найдем зависимость $W = W(y)$, соответствующую экстремальным значениям полной потенциальной энергии,

$$\begin{aligned} W = & \frac{4yA}{(1 + y)^{2/3}} \left[1 - \frac{(y^2 + 1)y}{1 + y^3} \right] \left\{ \frac{(y + 1)y}{(1 + y^3)^{2/3}A} - \frac{\sqrt[3]{1 + y^3}}{y} \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{y} + \frac{\Psi\left(1, \frac{y}{y+1}\right)}{y + 1} - \frac{\Psi\left(1, (y + 1)^{-1}\right)}{(y + 1)A} \right] \right\}^{-1}, \quad (15) \end{aligned}$$

$\Psi(1, x)$ — тригамма-функция.

При $y = 1$ и $y = 0$ решение (15) вырождается. Подстановка $y = 1$ в (14) дает тождественно нуль, равно как и предел,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial y} \equiv 0.$$

Следовательно, этим значениям всегда соответствуют по крайней мере локальные экстремумы зависимости полной потенциальной энергии двух соприкасающихся сферических капель от отношения их радиусов. График зависимости (15), приведенный на рис. 3, показывает, что при значениях параметра Рэлея W , меньших некоторой величины W_{z0} , другие экстремумы, кроме $y = 1$ и $y = 0$, отсутствуют. Численный расчет дает для координат минимума (точка B на рис. 3) значения $W_{z0} \approx 5.279$, $y_{z0} \approx 0.4124$.

Выяснить, в каких случаях экстремум будет максимумом, а в каких — минимумом, можно путем анализа знака выражения, полученного подстановкой решения (15) во вторую производную, имеющую вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = & \left\{ -\frac{W \sqrt[3]{1+y^3} \left(\Psi \left(1, \frac{y}{y+1} \right) \right)^2}{(y+1)^3 y A^3} + \left[\frac{y(y+1)}{(1+y^3)A^2} \right. \right. \\ & + 2 \frac{\Psi(1, (y+1)^{-1})}{(y+1)yA^3} - \frac{(y+1)}{y^2 A^2} + \left. \frac{2}{yA^2} \right] \\ & \times \frac{W \sqrt[3]{1+y^3}}{(y+1)^2} \Psi \left(1, \frac{y}{y+1} \right) \\ & - \frac{W \sqrt[3]{1+y^3} \left(\Psi \left(1, (y+1)^{-1} \right) \right)^2}{(y+1)^3 y A^3} \\ & + \left(-\frac{y}{(1+y^3)^{2/3} A^2} + \frac{\sqrt[3]{1+y^3}}{y^2 A^2} \right) \\ & \times \frac{W \Psi(1, (y+1)^{-1})}{(y+1)} + \frac{2}{(1+y^3)^{2/3}} - 8 \frac{y^3}{(1+y^3)^{5/3}} \\ & + 10 \frac{(y^2+1)y^4}{(1+y^3)^{8/3}} - 4 \frac{(y^2+1)y}{(1+y^3)^{5/3}} + \frac{W(y+1)y^3}{(1+y^3)^{5/3} A} \\ & - \frac{Wy}{(1+y^3)^{2/3} A} - \frac{W \sqrt[3]{1+y^3} (y+1)}{y^3 A} \\ & + \frac{W \sqrt[3]{1+y^3}}{y^2 A} + \frac{W \sqrt[3]{1+y^3}}{2y(y+1)^3 A^2} \\ & \left. \times \left[\Psi \left(2, \frac{y}{y+1} \right) + \Psi \left(2, (y+1)^{-1} \right) \right] \right\} \left(1 + \frac{W}{2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

$\Psi(2, x)$ — тетрагамма-функция.

Анализ получающейся зависимости, аналитический вид которой здесь не приводится ввиду громоздкости, показывает, что точка B на рис. 3 соответствует переходу от максимумов зависимости $U = U(y)$ к минимумам, т.е. при $0 < y < y_{z0}$ (линия AB на рис. 3) экстремум

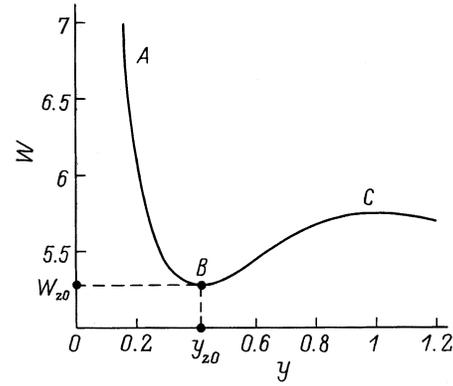


Рис. 3. Экстремумы зависимости $U = U(y)$.

является максимумом, а при $y_{z0} < y < 1$ (линия BC на рис. 3) — минимумом. В точках $y = 0$ и $y = 1$ полученная зависимость принимает нулевое значение. Принимает ли в этих точках полная потенциальная энергия максимальное или минимальное значение, можно узнать из анализа зависимости $U = U(W, y)$.

На рис. 4 в виде трехмерной поверхности приведена зависимость полной энергии двух соприкасающихся заряженных сферических капель от отношения их радиусов и параметра Рэлея $U = U(W, y)$ по (13). Линии pq , cfk и mn соответствуют экстремальным значениям энергии при сохранении общего объема и заряда и изменении отношения радиусов капель. Линии ab , efg и hj соответствуют изменению знака второй производной $\partial^2 U / \partial y^2$: левее линии ab , а также между линиями efg и hj вторая производная положительна, между линиями efg и ab , а также правее линии hj она отрицательна. Линия di соответствует решению уравнения $U = 1$, точки поверхности ниже этой линии соответствуют таким состояниям системы, при которых энергия двух дочерних капель меньше, чем исходной родительской.

Как видно из рисунка, при $y = 0$ (что соответствует одной капле) наблюдается минимум потенциальной энергии

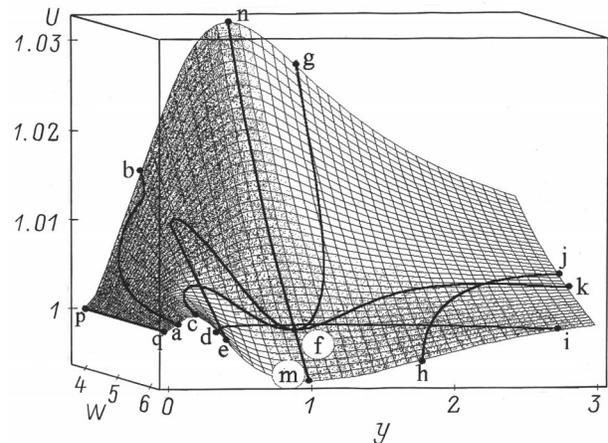


Рис. 4. Зависимость безразмерной полной энергии двух заряженных соприкасающихся сферических капель от параметра Рэлея и отношения радиусов капель.

гии. Значению $y = 1$ (т.е. двум одинаковым дочерним каплям) при W , меньшем некоторого W_1 , соответствует максимум (линия nf), а при $W > W_1$ (линия fm) соответствует минимум полной потенциальной энергии. Значение W_1 определяется подстановкой $y = 1$ в (15)

$$W_1 = -\frac{32(\ln 2)^2}{7\zeta(3) - 16 \ln 2},$$

где $\zeta = \zeta(x)$ — дзета-функция Римана, $W_1 \approx 5.7454$.

Участок линии ck между пересечениями с линией ef и hj (содержащий точку f) проходит через минимумы зависимости $U = U(y)$, причем на участке линии ck между пересечениями с линией di минимумы являются глобальными и соответствуют состояниям, при которых энергия системы двух капель меньше энергии одной капли. На участке линии ck между пересечениями с линиями ef и di , равно как и на участке линии dg между пересечениями с линиями ef и di , минимумы зависимости $U = U(y)$ являются локальными и соответствуют состояниям, при которых энергия системы двух капель больше энергии одной капли. Численный расчет дает для точки перехода $W_y = 5.702$, $y_1 = 0.8445$, $y_2 = 1/0.8445$.

Таким образом, анализ зависимости полной энергии от определяющих параметров системы из двух соприкасающихся сферических капель позволяет выделить несколько интервалов значений параметра Рэлея, при которых в рамках сделанных предположений реализуются различные каналы деления капли.

1) $0 < W < 5.279$: существует один минимум зависимости $U = U(y)$ при $y = 0$, что соответствует одной капле.

2) $5.279 < W < 5.702$: существуют два минимума зависимости $U = U(y)$ при $y = 0$ и $0.4124 < y < 0.8445$, причем энергия одной капли меньше, чем системы из двух капель.

3) $5.702 < W < 5.7454$: существуют два минимума зависимости $U = U(y)$ при $y = 0$ и $0.8445 < y < 1$, причем энергия системы из двух капель меньше, чем одной капли.

4) $W > 5.7454$: существуют два минимума зависимости $U = U(y)$ при $y = 0$ и при $y = 1$, причем наименьшей является энергия системы из двух одинаковых капель.

Поскольку неустойчивость одиночных заряженных капель развивается при $W \approx 4$, то на основании проведенного в данном разделе исследования можно, в частности, заключить, что схема деления сильно заряженной капли, при которой образуются две соприкасающиеся капли, форма которых близка к сферической, является нереализуемой в рамках принципа наименьшего действия.

2. Представим форму делящейся капли в виде двух сфер, соединенных тонкой перемычкой, рассмотрим зависимость полной энергии системы из двух капель от отношения их радиусов и расстояния между ними. Для удобства интерпретации результатов расчетов расстояние между центрами сфер представим в виде

$$R_{12} = (1 + y)R_1 + zR. \quad (16)$$

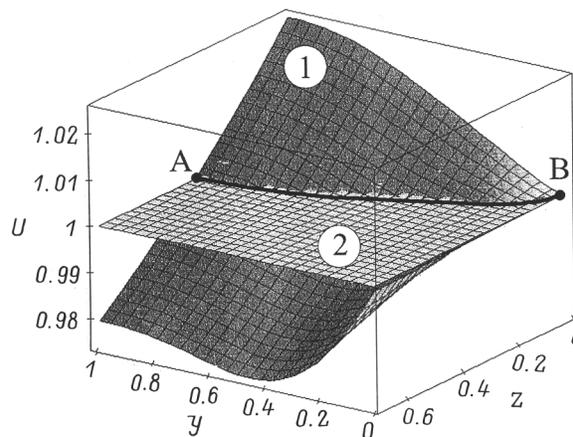


Рис. 5. Зависимость безразмерной полной потенциальной энергии системы из двух заряженных капель (1, 2), соединенных перемычкой, от расстояния между каплями z и отношения их радиусов y при $W = 4$ представлена поверхностью 1. Поверхность 2 определяет энергию исходной капли, т.е. $U = 1$.

В представлении (16) в отличие от выражения (9) z является мерой расстояния между сферами, выраженной в долях радиуса исходной, а не дочерней капли. При этом выражение для электростатической энергии (6) может быть записано следующим образом:

$$U_e = \frac{Q^2 \sqrt[3]{1 + y^3}}{2Ry} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(t)}{y \sinh(nt) + \sinh((n-1)t)} + \frac{\sinh(t)}{\sinh(nt) + y \sinh((n-1)t)} - \frac{2 \sinh(t)}{\sinh(nt) [1 + y + z(1 + y^3)^{1/3}]} \right\}^{-1},$$

где

$$t = \operatorname{arccosh}$$

$$\times \left(\frac{2y + 2z(1 + y^3)^{1/3} + 2yz(1 + y^3)^{1/3} + z^2(1 + y^3)^{2/3}}{2y} \right).$$

Полная энергия системы из двух электростатически взаимодействующих капель, безразмерная на полную энергию исходной сферической капли, в пренебрежении объемом и емкостью перемычки, может быть представлена в виде

$$U = \left[\frac{1 + y^2}{(1 + y^3)^{2/3}} + \frac{W}{2} U_{e0} \right] \cdot \left(1 + \frac{W}{2} \right)^{-1}, \quad (17)$$

где

$$U_{e0} = \frac{2U_e R}{Q^2}.$$

На рис. 5 приведены общий вид зависимости (17) при $W = 4$ и плоскость $U = 1$, соответствующая полной

энергии сферической родительской капли. Линия АВ соответствует таким состояниям системы из двух капель, в которых энергия системы равна энергии сферической капли. Видно, что при малых расстояниях между каплями их суммарная энергия больше чем сферической капли, а зависимость $U = U(y)$ имеет максимум при некотором $y > 0$. С увеличением расстояния между ними энергия системы уменьшается, а зависимость $U = U(y)$ приобретает явно выраженный минимум.

На рис. 6 приведены зависимости полной безразмерной потенциальной энергии от отношения радиусов капель $U = U(y)$ при $W = 4$ и безразмерных расстояниях между каплями $z = 0.02, 0.08, 0.14, 0.2, 0.26, 0.32, 0.38, 0.44, 0.5, 0.56, 0.62, 0.68$ (кривые 1–12 соответственно). Горизонтальными линиями отмечены значения безразмерной полной потенциальной энергии сфероидальной капли, имеющей такой же заряд и объем с отношением полуосей $a/b = 1.5, 2, 2.5, 3, 4$ (сверху вниз). На рис. 6 виден максимум при $y = 1$. Можно также проследить смещение положения минимума в сторону больших значений y при увеличении расстояния между каплями. Таким образом, рассмотрение полной энергии системы из двух капель, соединенных тонкой перемычкой, показывает, что увеличение длины перемычки не только увеличивает вероятность деления капли, но и ведет к уменьшению асимметрии при делении.

3. Предположив, что перемычка, соединяющая образующиеся при делении капли, имеет форму катеноида, нетрудно получить максимальное безразмерное расстояние между центрами капель, предшествующее разрыву перемычки,

$$R_{12} \approx 1.2 \frac{1+y}{(1+y^3)^{1/3}}.$$

Результаты численного расчета для этого случая, выполненные по вышеприведенным формулам с применением метода Эйлера–Маклорена, приведены на рис. 7 в виде графика зависимости полной потенциальной энергии U системы из двух сферических капель от отношения их объемов $V = (R_1/R_2)^3$ при $W = 4$ (сплошная кривая). Штриховая прямая на рис. 7 соответствует полной

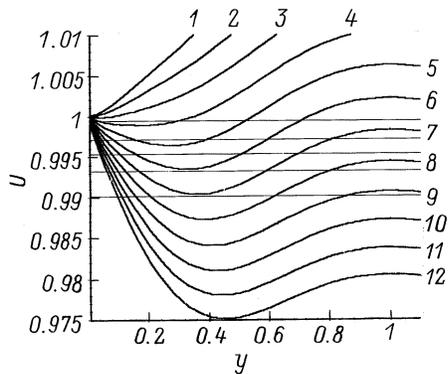


Рис. 6. Зависимости безразмерной полной потенциальной энергии системы из двух заряженных капель от отношения их радиусов.

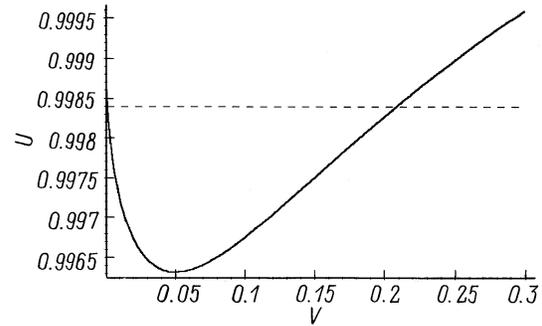


Рис. 7. Зависимость энергии двух капель от отношения их объемов при $W = 4$ и предельном расстоянии между ними, когда соединяющая их перемычка имеет форму катеноида.

потенциальной энергии родительской капли, имеющей форму вытянутого сфероида с соотношением полуосей $a/b = 1.8$. Наличие минимума энергии системы при $V \approx 0.05$ показывает, что при самопроизвольном делении на две части заряженной капли, меньшая из капель имеет объем около 4.7% объема исходной капли. Вычисление по (5) показывает, что меньшая капля несет 18% заряда исходной капли. Полученные величины близки к результатам экспериментального исследования, выполненного в [12]: 5% массы и 23% заряда, однако значительно отличаются от измеренных в [13]: 25% массы и 30% заряда. Значительный разброс экспериментальных данных может быть объяснен тем, что, во-первых, минимум энергии рассматриваемой системы двух капель всего лишь на 0.4% отличается от энергии исходной капли; во-вторых, как видно из рис. 7, энергия образовавшихся капель меньше энергии родительской капли в широком диапазоне соотношений масс образующихся капель $V = 0.01–0.22$. Вследствие этого небольшие флуктуации процесса или внешние воздействия могут значительно повлиять на результат деления.

Таким образом, предположение о том, что перемычка имеет форму катеноида, приводит к тому, что деление капли, характеризующейся параметром Рэлея $W = 4$, должно проходить асимметрично, причем наиболее вероятно отношение масс образовавшихся капель 1 : 20.

Заключение

В заключение отметим, что в вышеприведенном рассмотрении и родительская, и дочерние капли имели сферическую форму, в то время как перед началом процесса деления родительская капля имеет сфероидальную форму. Поскольку полная потенциальная энергия капель сфероидальных форм при не слишком больших значениях эксцентриситета ($a/b \leq 2$) отличается от энергии сферической капли не более чем на 0.3%, то учет сфероидальности не должен дать существенные поправки к полученному в настоящей работе отношению масс результирующих капель, однако может значительно повлиять на результат расчета распределения зарядов в сторону увеличения заряда дочерней капли. Как следует из

вышесказанного, малая дочерняя капля будет характеризоваться параметром Рэлея $W_1 = 4(0.18)^2/0.047 \approx 2.75$. А чтобы образующаяся малая капля оказалась неустойчивой по Рэлею, достаточно, чтобы при данном отношении масс образующихся капель заряд малой капли составлял 22% заряда исходной капли. В этом случае образующаяся дочерняя капля будет разрушаться сразу после или даже в процессе отрыва от большой капли, что и наблюдалось в ряде экспериментов.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [2] Елецкий А.В., Смирнов Б.М. // УФН. 1989. Т. 159. № 1. С. 45–82.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 3. С. 3–22.
- [4] Adam J.R., Lindblad N.R., Hendrics C.D. // J. Appl. Phys. 1968. Vol. 39. N 11. P. 5173–5180.
- [5] Berg T.G.O., Trainor R.J., jr., Vaughan U. // J. Atm. Sci. 1970. Vol. 27. N 11. P. 1173–1181.
- [6] Ryce S.A., Patriarche D.A. // Can. J. Phys. 1965. Vol. 43. P. 2192–2199.
- [7] Красницкий В.И., Анасов А.М., Контун С.М. // ПЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 18. С. 77–80.
- [8] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Григорьева И.Д. и др. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 4. С. 25–31.
- [9] Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 8. С. 31–38.
- [10] Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. // J. Phys. D. 1991. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.
- [11] Doyle A., Moffett D.R., Vonnegut B. // J. Coll. Sci. 1964. Vol. 19. P. 136–143.
- [12] Schweizer J.M., Hanson D.N. // J. Coll. Int. Sci. 1971. Vol. 35. N 3. P. 417–423.
- [13] Abbas M.A., Latham J. // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 30. N 4. P. 663–670.
- [14] Hoareau A., Melinov P., Cabaud D. et al. // Chem. Phys. Sci. 1988. Vol. 143. N 6. P. 602–608.
- [15] Schulze W., Winter B., Urban J., Goldenfeld I. // Z. Phys. D. 1987. Vol. 4. P. 373–381.
- [16] Emelius K.G., Breslin A.C. // Int. J. Electronics. 1983. Vol. 54. N 2. P. 195–199.
- [17] Ryce S.A., Wytan R.R. // Can. J. Phys. 1964. Vol. 42. P. 2185–2194.
- [18] Elghazaly H.M.A., Castle G.S.P. // IEEE Trans. Ind. Appl. 1987. Vol. 1A-23. N 1. P. 108–113.
- [19] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [20] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1939. Т. 9. Вып. 6. С. 641–653.
- [21] Bohr N., Wheeler J.A. // Phys. Rev. 1939. Vol. 56. N 5. P. 426–450.
- [22] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.