

Нелинейный отклик суперпарамагнитных частиц на мгновенное изменение сильного постоянного магнитного поля

© Ю.П. Калмыков, С.В. Титов

Институт радиотехники и электроники Российской академии наук,
141120 Фрязино, Московская обл., Россия

E-mail: kalmykov@univ-perp.fr

E-mail: svt245@ire216.msk.su

(Поступила в Редакцию 20 октября 1999 г.)

Предложен метод расчета нелинейного отклика системы суперпарамагнитных частиц при мгновенном изменении как величины, так и направления сильного внешнего постоянного магнитного поля. Суть метода состоит в выводе моментной системы уравнений для усредненных сферических гармоник, характеризующей нелинейный отклик системы, из уравнения Фоккера–Планка для функции распределения W намагниченности \mathbf{M} по ориентациям. В качестве примера исследованы характеристики нелинейного отклика системы частиц с анизотропией типа легкая ось. Для этого случая решение моментной системы уравнений получено с помощью матричных непрерывных дробей. Рассчитаны время релаксации намагниченности и спектр релаксационной функции для типичных значений параметров анизотропии, диссипации и нелинейности. Показано, что кинетика намагниченности существенным образом определяется значениями этих параметров.

Данная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 96-02-16762-а) и ИНТАС (проект № 96-0663).

1. Однодоменные ферромагнитные частицы характеризуются внутренним потенциалом анизотропии, который может иметь несколько локальных положений равновесия с потенциальными барьерами между ними. Если частицы малы (~ 10 nm) и, следовательно, потенциальные барьеры низки, вектор намагниченности $\mathbf{M}(t)$ из-за тепловых флуктуаций может переориентироваться через барьеры из одного положения равновесия в другое [1]. Тепловая неустойчивость намагниченности приводит к так называемому суперпарамагнетизму [2], потому что каждая частица ведет себя как парамагнитный атом с магнитным моментом $\sim 10^4$ – 10^5 магнетонов Бора. Исследование тепловых флуктуаций и релаксации намагниченности однодоменных частиц в настоящее время привлекает внимание в контексте улучшения характеристик магнитных носителей записи [3].

Кинетика намагниченности суперпарамагнитных частиц описывается уравнением Фоккера–Планка для плотности вероятности распределения W намагниченности \mathbf{M} . Это уравнение впервые получил Браун [4], используя уравнение Гильберта с флуктуирующим полем [5], которое учитывает тепловые флуктуации намагниченности индивидуальной частицы. На основе уравнений Гильберта и Фоккера–Планка, строится теория магнитной релаксации в системах суперпарамагнитных частиц (см., например, [6–8]). Аналогичные уравнения Фоккера–Планка, описывающие броуновское вращение частиц, часто используются при изучении диэлектрической релаксации в молекулярных и жидких кристаллах [9,10], кинетики двулучепреломления в жидкостях [11] и т. п.

Ввиду большой величины магнитного дипольного момента частицы ее энергия в умеренном внешнем магнитном поле \mathbf{H}_0 становится сопоставимой с kT (k — посто-

янная Больцмана, T — температура). Принимая во внимание то обстоятельство, что времена релаксации намагниченности существенным образом зависят от напряженности внешнего поля [12–14], необходимо учитывать нелинейные эффекты при анализе кинетики намагниченности, вызванной изменениями внешнего поля как по величине, так и по направлению (например, при изменении направления \mathbf{H}_0 на противоположное). Если изменения поля происходят много быстрее характерных времен релаксации, то они могут считаться мгновенными. Таким образом, задача может рассматриваться в обычной постановке, как расчет функции нелинейного отклика на мгновенное изменение внешнего поля. Однако до настоящего времени удовлетворительная теория была разработана только для случая линейного отклика суперпарамагнитных частиц, т. е. когда изменение энергии частицы при изменении внешнего магнитного поля много меньше kT . Теория отклика в сильных полях развита существенно слабее. Вычисление отклика на сильное внешнее воздействие — весьма трудная задача, так как отклик зависит от характера воздействия и не существует универсальной функции отклика, позволяющей описать все виды воздействия, как в случае линейного отклика. В основном результаты при рассмотрении нелинейных проблем были получены с помощью теории возмущений (см., например, [15–17]), что ограничивает их применимость только областью слабых полей.

Основная цель данной работы — исследовать кинетику намагниченности суперпарамагнитных частиц при мгновенном изменении как напряженности, так и направления сильного постоянного магнитного поля. Результаты исследования нелинейного отклика суперпарамагнетиков на сильное переменное поле предполагается изложить в другой статье.

2. Пусть система невзаимодействующих суперпарамагнитных частиц находится в однородном внешнем магнитном поле \mathbf{H}_I , которое в момент времени $t = 0$ мгновенно изменяется как по величине, так и по направлению на \mathbf{H}_{II} . До момента переключения поля система находилась в равновесии с функцией распределения

$$W_I = Z_I^{-1} e^{-\beta[U - (\mathbf{M}\mathbf{H}_I)]}. \quad (1)$$

После переключения поля система будет релаксировать в новое равновесное состояние II с функцией распределения

$$W_{II} = Z_{II}^{-1} e^{-\beta[U - (\mathbf{M}\mathbf{H}_{II})]}. \quad (2)$$

В (1) и (2) U — плотность свободной энергии частицы в отсутствие внешних полей, $\beta = \nu/kT$, ν — объем частицы, Z_N ($N = I, II$) — нормировочная константа. Эта проблема сугубо нелинейная, поскольку предполагается, что изменения поля — как по величине, так и по направлению — могут быть значительными. Кинетика нелинейного отклика намагниченности характеризуется нормированной релаксационной функцией

$$f(t) = \frac{\langle M_r \rangle(t) - \langle M_r \rangle_{II}}{\langle M_r \rangle_I - \langle M_r \rangle_{II}} = \frac{\langle \mathbf{r}\mathbf{u} \rangle(t) - \langle \mathbf{r}\mathbf{u} \rangle_{II}}{\langle \mathbf{r}\mathbf{u} \rangle_I - \langle \mathbf{r}\mathbf{u} \rangle_{II}}, \quad (3)$$

где M_r — проекция намагниченности на направление, задаваемое единичным вектором $\mathbf{r} = i\nu'_x + j\nu'_y + k\nu'_z$,

$$\mathbf{M} = M_S \mathbf{u} = M_S (i u_x + j u_y + k u_z), \quad (4)$$

M_S — спонтанная намагниченность, $u_x = \sin \theta \cos \varphi$, $u_y = \sin \theta \sin \varphi$, $u_z = \cos \theta$, θ и φ — полярный и азимутальный углы соответственно, угловые скобки означают усреднение по функции W_N

$$\langle \mathbf{r}\mathbf{u} \rangle_N = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \langle \mathbf{r}\mathbf{u} \rangle W_N. \quad (5)$$

Для диффузионной модели кинетика вектора намагниченности $\mathbf{M}(t)$ одномоленной частицы аналогична броуновскому вращению макромолекулы в жидкости и описывается уравнением Фоккера–Планка для функции распределения $W(\vartheta, \varphi, t)$ [6,8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W &= b[\alpha^{-1} \mathbf{u}(\text{grad } V_{II} \times \text{grad } W) \\ &+ \text{div}(W \text{ grad } V_{II}) + \beta^{-1} \Delta W], \quad (t > 0) \end{aligned} \quad (6)$$

с начальным условием $W(\vartheta, \varphi, 0) = W_I$. Здесь Δ — угловая часть оператора Лапласа, $V_{II} = U - (\mathbf{M}\mathbf{H}_{II})$ — плотность свободной энергии частицы в состоянии II, $\alpha = \eta\gamma M_S$ — безразмерный коэффициент диссипации, γ — гиромангнитное отношение, η — коэффициент трения, $b = \beta/2\tau_N$,

$$\tau_N = \beta M_S (1 + \alpha^2) / 2\gamma\alpha \quad (7)$$

— характерное время тепловых флуктуаций намагниченности. Вывод (6) основывается на предположении о том,

что случайное поле, вызывающее флуктуации намагниченности, имеет свойства белого шума. Таким образом, в (6) не учитываются возможные эффекты "памяти". Кроме того, здесь не рассматриваются поверхностные эффекты и предполагается, что намагниченность внутри частицы однородна. Детально указанные допущения обоснуются, например, в [18].

Используя результаты работ [19,20], можно вывести из (6) систему уравнений для релаксационных функций $c_{l,m}(t) = \langle Y_{l,m} \rangle(t) - \langle Y_{l,m} \rangle_{II}$

$$\tau_N \frac{d}{dt} c_{l,m}(t) = \sum_{l'} \sum_s d_{l',m\pm s,l,m} c_{l',m\pm s}(t) \quad (8)$$

с начальными условиями

$$c_{l,m}(0) = \langle Y_{l,m} \rangle_I - \langle Y_{l,m} \rangle_{II}, \quad (9)$$

где $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ — сферические гармоники [21]. Соотношения для $d_{l',m\pm s,l,m}$, выраженные через коэффициенты Клебша–Гордана, и коэффициенты разложения свободной энергии V по сферическим гармоникам приведены в [19,20]. Таким образом, функцию нелинейного отклика $f(t)$ из (3) можно выразить через $c_{l,m}(t)$ как

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}\nu'_z c_{1,0}(t) + (\nu'_x + i\nu'_y) c_{1,-1}(t) - (\nu'_x - i\nu'_y) c_{1,1}(t)}{\sqrt{2}\nu'_z c_{1,0}(0) + (\nu'_x + i\nu'_y) c_{1,-1}(0) - (\nu'_x - i\nu'_y) c_{1,1}(0)}. \quad (10)$$

3. Уравнения (8)–(10) применимы для частиц с произвольной анизотропией: типа легкая ось, кубической и т.п. В данной работе для простоты ограничимся рассмотрением частиц с одноосной анизотропией, для которых свободная энергия имеет вид [8]

$$\begin{aligned} V &= -K \cos^2 \theta - (\mathbf{M}\mathbf{H}_N) \\ &= -H_N M_S \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left[(\nu'_x + i\nu'_y) Y_{1,-1} + \sqrt{2}\nu'_z Y_{1,0} \right. \\ &\quad \left. - (\nu'_x - i\nu'_y) Y_{1,1} \right] - \frac{4K}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{2,0} - \frac{K}{3}, \end{aligned} \quad (11)$$

где K — константа анизотропии, ν'_x, ν'_y, ν'_z — направляющие косинусы векторов \mathbf{H}_N . В этом случае уравнение (8) для $c_{l,m}(t)$ запишется в виде рекуррентного уравнения

$$\tau_N \frac{d}{dt} c_{l,m}(t) = \sum_{l'=-2}^2 \sum_{s=-1}^1 d_{l',m\pm s,l,m} c_{l',m\pm s}(t) \quad (t > 0), \quad (12)$$

где $d_{n\pm 2, m\pm 1, n, m} \equiv 0$; выражения для 11 отличных от нуля коэффициентов $d_{l',m',l,m}$ приведены в явном виде в Приложении.

С математической точки зрения решение уравнения (12) сводится к решению бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений. В [22–24] было показано, что решение задачи существенно упрощается при использовании матричных непрерывных дробей [25,26].

Для этого уравнение (12) нужно преобразовать в матричное уравнение вида

$$\tau_N \frac{d}{dt} C_n(t) = Q_n^- C_{n-1}(t) + Q_n C_n(t) + Q_n^+ C_{n+1}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Здесь для векторов $C_n(t)$ можно использовать то же представление, что и в [23]; матрицы Q_n , Q_n^+ , Q_n^- приведены в Приложении. Точное решение (13) для спектра $\tilde{C}_1(\omega)$ имеет вид [25,26]

$$\tilde{C}_1(\omega) = \tau_N \Delta_1(\omega) \left\{ C_1(0) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\prod_{k=2}^n Q_{k-1}^+ \Delta_k(\omega) \right) C_n(0) \right\}, \quad (14)$$

где

$$\Delta_n(\omega) = \frac{I}{i\omega\tau_N I - Q_n - Q_n^+ \frac{I}{i\omega\tau_N I - Q_{n+1} - Q_{n+1}^+ \frac{I}{i\omega\tau_N I - \dots - Q_{n+2}^-}} Q_{n+1}^-} \quad (15)$$

— матричная непрерывная дробь, а тильда означает одностороннее преобразование Фурье

$$\tilde{F}(\omega) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (16)$$

Вектора начальных условий $C_n(0)$ в (14) также рассчитываются с помощью матричных непрерывных дробей (см. Приложение). Определив $\tilde{C}_1(\omega)$ из (14), можно рассчитать из (10) спектр релаксационной функции $f(t)$, а также время релаксации

$$\tau = \int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{\sqrt{2}\nu_Z^r \tilde{c}_{1,0}(0) + (\nu_X^r + i\nu_Y^r) \tilde{c}_{1,-1}(0) - (\nu_X^r - i\nu_Y^r) \tilde{c}_{1,1}(0)}{\sqrt{2}\nu_Z^r c_{1,0}(0) + (\nu_X^r + i\nu_Y^r) c_{1,-1}(0) - (\nu_X^r - i\nu_Y^r) c_{1,1}(0)}. \quad (17)$$

Полученные выше результаты справедливы для системы частиц, легкие оси которых ориентированы вдоль оси OZ. Если легкие оси частиц распределены хаотично в пространстве, то для расчета спектра и времени релаксации необходимо произвести соответствующее усреднение. Кроме того, предполагалось, что все частицы являются идентичными. Для того чтобы учесть полидисперсность частиц, нужно провести усреднение по соответствующим функциям распределения (например, по объемам частиц).

4. Для одноосных частиц имеется определенная геометрия задачи, когда время релаксации τ может быть рассчитано в квадратурах. Это соответствует ситуации, когда в состояниях I и II постоянное магнитное поле направлено вдоль легкой оси частицы. В этом случае в

силу симметрии задачи уравнение Фоккера–Планка (6) становится одномерным и поэтому применимы результаты работы [27], где в общем виде решена задача о времени релаксации при нелинейном отклике одномерных систем, динамика которых описывается одномерным уравнением Фоккера–Планка. Применяя результаты работы [27] к рассматриваемой задаче, можно показать, что время релаксации τ определяется квадратурой

$$\tau = \frac{2\tau_N}{\langle \cos \theta \rangle_{II} - \langle \cos \theta \rangle_{I-1}} \times \int_{-1}^1 \frac{\Phi(z) \Psi(z) e^{-\sigma(z^2 + 2h_{II}z)} dz}{1 - z^2}, \quad n = 1, 2, \quad (18)$$

где

$$\Phi(z) = \int_{-1}^z [W_{II}(z') - W_I(z')] dz', \quad (19)$$

$$\Psi_1(z) = \int_{-1}^z [z' - \langle \cos \theta \rangle_{II}] e^{\sigma(z'^2 + 2h_{II}z')} dz', \quad \sigma = \beta K, \quad h_N = H_N M_S / 2K. \quad (20)$$

В (18)–(20) $h_{II} > 0$ и $h_{II} < 0$ когда \mathbf{H}_I и \mathbf{H}_{II} параллельны и антипараллельны соответственно.

5. При расчетах мы для простоты ограничились случаем, когда поле \mathbf{H}_I направлено вдоль легкой оси частицы, а отклик рассчитывается в направлении поля \mathbf{H}_{II} . В этом случае для направляющих косинусов вектора \mathbf{H}_{II} без ограничения общности можно положить $\nu_X^{II} = \sin \Theta$, $\nu_Y^{II} = 0$, $\nu_Z^{II} = \cos \Theta$, так как в силу симметрии задачи отклик не зависит от азимутального угла. При $\Theta \neq 0$ нелинейный отклик зависит от параметра диссипации α , что обусловлено взаимодействием продольных и поперечных мод. Однако качественно эта зависимость аналогична случаю линейного отклика, который детально исследовался в [23,28]. Методы экспериментальных и теоретических оценок α обсуждались, например, в [7,19,29] и дают значения $\sim 0.01-0.1$. В данной работе для определенности расчеты были проведены при $\alpha = 0.1$.

На рис. 1 показано поведение времени релаксации τ как функции параметров анизотропии σ и поля $h = |h_I| = |h_{II}|$ при мгновенном изменении направления поля на противоположное ($\mathbf{H}_I = -\mathbf{H}_{II}$). Рис. 2 иллюстрирует поведение τ при мгновенном изменении напряженности внешнего поля вдвое, т.е. при $h_{II} = 2h_I$. В этих случаях τ не зависит от α и определяется уравнениями (18)–(20). При слабом внешнем поле τ определяется, главным образом, самой низкочастотной продольной релаксационной модой, характеризующей переходы вектора намагниченности через потенциальный барьер двухъямного потенциала (11) — из одной потенциальной ямы в другую. При этом зависимость τ от параметра

анизотропии σ имеет активационный характер, т.е. экспоненциально возрастает при увеличении σ . Однако с ростом напряженности \mathbf{H}_{II} время τ начинает уменьшаться при увеличении σ (см. рис. 2). Этот эффект, впервые обнаруженный в [14] при анализе линейного отклика системы одноосных частиц в низкотемпературном пределе, обусловлен истощением населенности верхней ямы [30]. Последнее обстоятельство, в частности, приводит к тому, что при значениях параметра h , превышающих определенное критическое значение h_c (для потенциала (14) $h_c \approx 0.17$ при $\Theta = 0$ [30]), поведение времени релаксации τ перестает носить активационный характер: время релаксации τ не возрастает, а уменьшается при возрастании σ . Абсолютная величина времени нелинейного отклика τ может весьма существенно отличаться (см. рис. 3) от значений времен релаксации намагни-

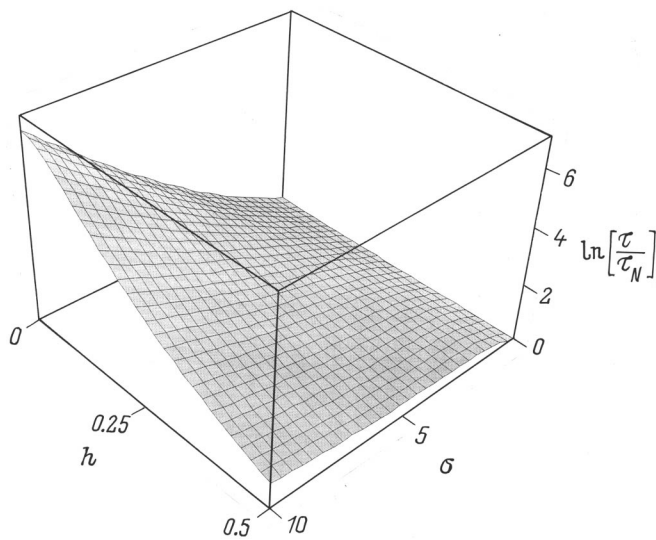


Рис. 1. $\ln(\tau/\tau_N)$ как функция σ и $h = |h_I| = |h_{II}|$ при мгновенном изменении направления поля на противоположное ($\mathbf{H}_I = -\mathbf{H}_{II}$).

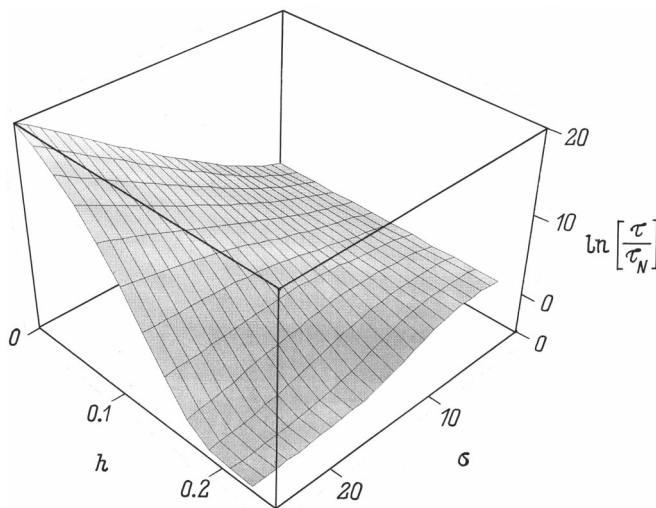


Рис. 2. $\ln(\tau/\tau_N)$ как функция σ и $h = h_{II}/2 = h_I$ при мгновенном увеличении вдвое напряженности внешнего поля.

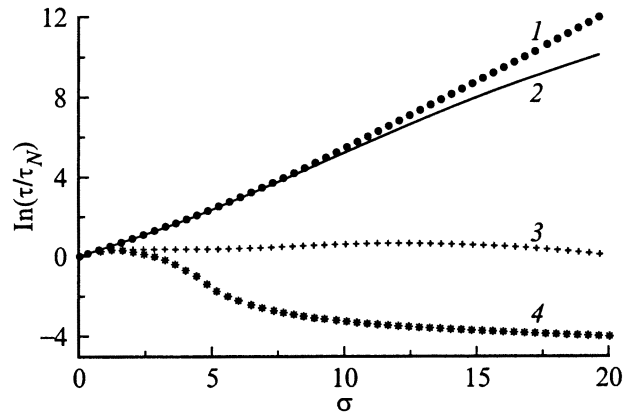


Рис. 3. $\ln(\tau/\tau_N)$ как функция σ : линейный отклик, $h_{II} = h_I - \varepsilon = 0.1$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) (1) и $h_{II} = h_I - \varepsilon = 0.5$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) (4); нелинейный отклик, $h_I = 0.5 \rightarrow h_{II} = 0.1$ (2) и $h_I = 0.1 \rightarrow h_{II} = 0.5$ (3).

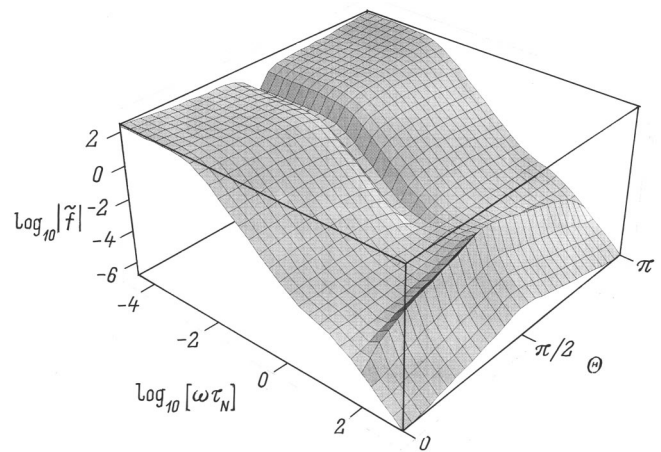


Рис. 4. $\log_{10}|\tilde{f}|$ как функция $\log_{10}(\omega\tau_N)$ и угла Θ при мгновенном включении постоянного магнитного поля — $h_I = 0$, $h_{II} = 0.1$, $\sigma = 10$ и $\alpha = 0.1$.

ченности τ_I и τ_{II} , характеризующих линейный отклик частицы на слабое внешнее пробное поле в состояниях I и II (τ_I , τ_{II} определяются собственными значениями оператора Фоккера–Планка¹ (6) в состояниях I и II соответственно [7,14,28]).

На рис. 4 представлены результаты расчетов модуля спектра релаксационной функции $|\tilde{f}|$ для случая мгновенного включения сильного поля (т.е. при $h_I = 0$, $h_{II} = h$) под произвольным углом Θ к оси частицы. На этих рисунках видны три полосы в спектре $|\tilde{f}|$. Характерная частота и полуширина низкочастотной полосы определяются обратной величиной среднего времени жизни вектора намагниченности в верхней потенциальной яме. Существенно более слабая релаксационная полоса, обусловленная внутриямными (intrawell)

¹ В используемом в данной работе методе матричных непрерывных дробей собственные значения λ оператора Фоккера–Планка находятся из уравнения $\det|\lambda I + Q_1 + Q_2^+ \Delta_2(-\lambda)Q_2^-| = 0$.

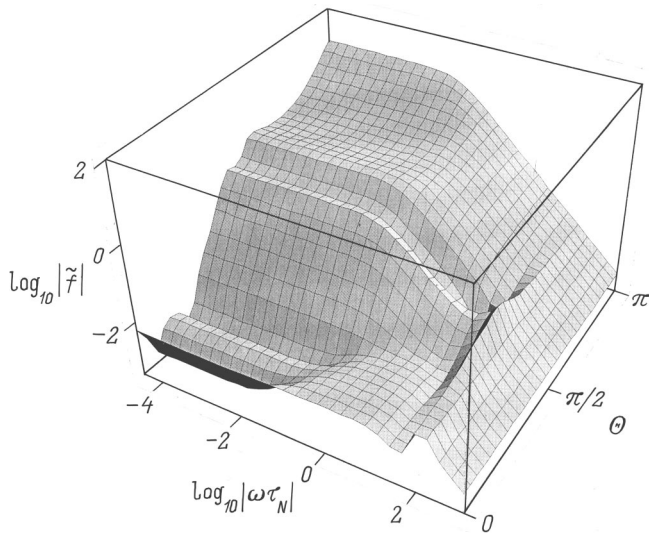


Рис. 5. $\log_{10}|\tilde{f}|$ как функция $\log_{10}(\omega\tau_N)$ и угла Θ при мгновенном вращении направления постоянного магнитного поля $h = |h_1| = |h_{II}| = 0.3$ ($\sigma = 10$ и $\alpha = 0.1$).

модами, проявляется на высоких частотах (при $\Theta = 0$ и $\sigma \gg 1$ характеристическая частота этой полосы $\omega_{well} \approx 2\sigma(1+h)/\tau_N$ [30]). Кроме того, на рис. 3 и 4 также видна резонансная полоса в высокочастотной части спектра, обусловленная вкладом поперечных мод на частотах прецессии вектора намагниченности. При уменьшении α эта высокочастотная полоса сужается и смещается в область высоких частот. При $\Theta = 0$ эта полоса полностью исчезает, так как в этом случае поперечные моды не участвуют в релаксационном процессе. На рис. 5 представлены результаты расчетов $|\tilde{f}|$ для случаев мгновенного изменения направления поля при $|\mathbf{H}_1| = |\mathbf{H}_{II}|$. Как и на рис. 4, здесь также заметны три характерных полосы, обусловленные долгоживущей, внутриямными и поперечными модами. Кроме того, на рис. 5 отчетливо проявляется эффект подавления амплитуды низкочастотной моды постоянным полем при вращении вектора поля на угол $\Theta < \pi/2$.

6. Таким образом, в данной работе предложен метод расчета спектра $\tilde{f}(\omega)$ и времени релаксации τ функции нелинейного отклика $f(t)$, характеризующей кинетику намагниченности суперпарамагнитных частиц при мгновенном изменении как напряженности, так и направления сильною постоянного магнитного поля. Для одноосных частиц $\tilde{f}(\omega)$ и τ могут быть рассчитаны из (14) с помощью матричных непрерывных дробей во всех диапазонах изменения параметров нелинейности, анизотропии и диссипации. Таким же образом могут быть рассмотрены частицы с кубической анизотропией, для которых аналогичная методика расчета характеристик линейного отклика была разработана в [24]. Можно надеяться, что предложенный нами подход будет полезен при постановке и интерпретации экспериментов по нелинейному отклику.

Приложение

Матрицы Q_n, Q_n^+, Q_n^- в (13) имеют вид

$$Q_n = \begin{pmatrix} X_{2n} & W_{2n} \\ Y_{2n-1} & X_{2n-1} \end{pmatrix}, \quad Q_n^+ = \begin{pmatrix} Z_{2n} & Y_{2n} \\ 0 & Z_{2n-1} \end{pmatrix},$$

$$Q_n^- = \begin{pmatrix} -\frac{2n+1}{2n-2}Z_{2n-2}^T & 0 \\ W_{2n-1} & -\frac{2n}{2n-3}Z_{2n-3}^T \end{pmatrix}. \quad (\text{П1})$$

Индекс T в (П1) означает транспонирование. Размерности матриц Q_n, Q_n^+, Q_n^- соответственно равны $8n \times 8n, 8n \times 8(n+1), 8n \times 8(n-1)$. Явный вид трехдиагональных подматриц X_l, Y_l, W_l, Z_l в (П1) приведен в [23]. Однако элементы подматриц X_l, Y_l, W_l, Z_l , используемые в данной работе, отличаются от [23] и задаются следующими выражениями:

$$x_{n,m} = d_{n,m,n,m}$$

$$= \frac{\sigma(n(n+1) - 3m^2)}{(2n-1)(2n+3)} - \frac{n(n+1)}{2} - i \frac{m\sigma h_{II}\gamma_Z^{II}}{\alpha},$$

$$x_{n,m}^+ = -(x_{n,-m}^-)^* = d_{n,m+1,n,m}$$

$$= -i \frac{\sigma h_{II}(\gamma_X^{II} - i\gamma_Y^{II})}{2\alpha} \sqrt{(n+m+1)(n-m)},$$

$$y_{n,m} = d_{n+1,m,n,m} = -\sigma \left(h_{II}n + i\frac{m}{\alpha} \right) \sqrt{\frac{(n+1)^2 - m^2}{(2n+1)(2n+3)}},$$

$$y_{n,m}^+ = -(y_{n,-m}^-)^* = d_{n+1,m+1,n,m}$$

$$= \frac{n\sigma h_{II}(\gamma_X^{II} - i\gamma_Y^{II})}{2} \sqrt{\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}},$$

$$w_{l,m} = d_{n-1,m,n,m}$$

$$= \sigma \left(h_{II}\gamma_Z^{II}(n+1) - i\frac{m}{\alpha} \right) \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{(2n+1)(2n-1)}},$$

$$w_{n,m}^+ = -(w_{n,-m}^-)^* = d_{n-1,m+1,n,m}$$

$$= \frac{(n+1)\sigma h_{II}(\gamma_X^{II} - i\gamma_Y^{II})}{2} \sqrt{\frac{(n-m)(n-m-1)}{(2n+1)(2n-1)}},$$

$$z_{n,m} = d_{n+2,m,n,m}$$

$$= -\frac{\sigma n}{2n+3} \sqrt{\frac{[(n+2)^2 - m^2][(n+1)^2 - m^2]}{(2n+1)(2n+5)}}.$$

Расчет векторов начальных условий $C_n(0)$ в (14) проводится следующим образом. Введем вектор

$$R_n^N = \begin{pmatrix} \langle Y_{2n,-2n} \rangle_N \\ \langle Y_{2n,-2n+1} \rangle_N \\ \vdots \\ \langle Y_{2n,2n} \rangle_N \\ \langle Y_{2n-1,-2n+1} \rangle_N \\ \langle Y_{2n-1,-2n+2} \rangle_N \\ \vdots \\ \langle Y_{2n-1,2n-1} \rangle_N \end{pmatrix}. \quad (\text{П2})$$

Тогда в соответствии с (12) для R_n^N будет справедливо матричное рекуррентное соотношение

$$Q_n^- R_{n-1}^N + Q_n R_n^N + Q_n^+ R_{n+1}^N = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{П3})$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$R_n^N = \Delta_n^N(0) Q_n^- R_{n-1}^N = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \prod_{k=1}^n [\Delta_k^N(0) Q_k^-]. \quad (\text{П4})$$

Здесь учтено, что $R_0^N = 1/\sqrt{4\pi}$. Таким образом, для $C_n(0)$ имеем

$$C_n(0) = R_n^I - R_n^{II}.$$

Список литературы

- [1] L. Néel. *Ann. Geophys.* **5**, 99 (1949).
- [2] H.V. Braun, H.N. Bertram. *J. Appl. Phys.* **75**, 4609 (1994).
- [3] C.P. Bean, J.D. Livingston. *Suppl. J. Appl. Phys.* **30**, 1205 (1959).
- [4] W.F. Brown jr. *Phys. Rev.* **130**, 1677 (1963).
- [5] T.L. Gilbert. *Phys. Rev.* **100**, 1243 (1956).
- [6] W.F. Brown jr. *IEEE Trans. Mag.* **15**, 1196 (1979).
- [7] Yu.L. Raikher, M.I. Shliomis. *Adv. Chem. Phys.* **87**, 595 (1994).
- [8] L.J. Geoghegan, W.T. Coffey, B. Mulligan. *Adv. Chem. Phys.* **100**, 475 (1997).
- [9] Л.М. Блинов. *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов*. Наука, М. (1982).
- [10] G. Moro, P.L. Nordio. *Z. Phys. B: Condens. Matter.* **64**, 217 (1986).
- [11] J.L. Dejardin. *Dynamic Kerr Effect*. World Scientific, Singapore (1996).
- [12] A. Aharoni. *Phys. Rev.* **177**, 763 (1969).
- [13] Д.А. Гаранин, В.В. Ищенко, Л.В. Панина. *ТМФ* **82**, 242 (1990).
- [14] W.T. Coffey, D.S.F. Crothers, Yu.P. Kalmykov, J.T. Waldron. *Phys. Rev.* **B51**, 15 947 (1995).
- [15] Э.К. Садыков, А.Г. Исавнин. *ФТТ* **38**, 2104 (1996).
- [16] Yu.L. Raikher, V.I. Stepanov. *Phys. Rev.* **B55**, 15 005 (1997).
- [17] Yu.L. Raikher, V.I. Stepanov, A.N. Grigirenko, P.I. Nikitin. *Phys. Rev.* **B56**, 6400 (1997).
- [18] I. Klik, L. Gunther. *J. Stat. Phys.* **60**, 473 (1990).
- [19] Ю.П. Калмыков, С.В. Титов. *ФТТ* **41**, 2020 (1999).
- [20] Yu.P. Kalmykov, S.V. Titov. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2967 (1999).
- [21] Р. Зар. *Теория углового момента. О пространственных эффектах в физике и химии*. Мир, М. (1993).
- [22] Yu.P. Kalmykov, S.V. Titov, W.T. Coffey. *Phys. Rev.* **B58**, 3267 (1998).
- [23] Ю.П. Калмыков, С.В. Титов. *ФТТ* **40**, 1642 (1998).
- [24] Ю.П. Калмыков, С.В. Титов. *ЖЭТФ* **115**, 101 (1999).
- [25] H. Risken. *The Fokker–Planck Equation*. Springer, Berlin (1989).
- [26] W.T. Coffey, Yu.P. Kalmykov, J.T. Waldron. *The Langevin Equation*. World Scientific, Singapore (1996).
- [27] Yu.P. Kalmykov, J.L. Dejardin, W.T. Coffey. *Phys. Rev.* **E55**, 2509 (1997).
- [28] W.T. Coffey, D.S.F. Crothers, J.L. Dormann, L.J. Geoghegan, E.C. Kennedy. *Phys. Rev.* **B58**, 3249 (1998).
- [29] W.T. Coffey, D.S.F. Crothers, J.L. Dormann, Yu.P. Kalmykov, E.C. Kennedy, W. Wernsdorfer. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5655 (1998).
- [30] D.A. Garanin. *Phys. Rev.* **E54**, 3250 (1996).