

# Нелокальная джозефсоновская электродинамика тонкой пленки магнитного (двумерного и трехмерного) сверхпроводника

© А.И. Ломтев

Донецкий физико-технический институт Академии наук Украины,  
340114 Донецк, Украина

E-mail: medvedev@host.dipt.donetsk.ua

(Поступила в окончательном виде 22 июня 1999 г.)

Для джозефсоновского перехода в тонкой пленке двумерного и трехмерного магнитного сверхпроводников выведено интегродифференциальное уравнение динамики разности фаз с временной и пространственной нелокальностью. Показано, что магнитная подсистема существенно перенормирует спектр малоамплитудных электромагнитных возбуждений и приводит к их затуханию.

К настоящему моменту уравнения нелокальной джозефсоновской электродинамики получены и исследовались в пяти случаях: 1) туннельный переход на стыке двух сверхпроводящих ультратонких пленок, толщины которых много меньше лондоновской длины; 2) туннельный переход между массивными сверхпроводниками, толщины которых значительно превышают лондоновскую длину; 3) туннельный переход между сверхпроводящими слоями конечной толщины в направлении, ортогональном магнитному полю; 4) туннельный переход "встык" между сверхпроводящими пластинами конечной вдоль магнитного поля толщины; 5) наклонный (скошенный) джозефсоновский переход между сверхпроводящими пластинами конечной толщины вдоль магнитного поля.

Так, в работах [1–8] показано, что эффекты нелокальности могут быть существенными даже в контактах с большой толщиной  $d$  ( $d \gg \lambda$ ,  $\lambda$  — лондоновская глубина проникновения) вдоль магнитного поля (по направлению вихрей), т.е. в ситуациях, до того рассматривавшихся в локальном приближении. В противоположном предельном случае контактов в тонких пленках, когда  $d \ll \lambda$ , нелокальность очень существенна и становится определяющим фактором. Соответствующие уравнения получены и изучались в работах [9–12]. Джозефсоновский переход между двумя сверхпроводящими слоями конечной толщины в направлении, ортогональном магнитному полю вихрей, изучался в работе [13]. В недавних работах [14,15] осуществлено рассмотрение контакта "встык" и наклонного (скошенного) перехода соответственно конечной толщины вдоль магнитного поля вихрей при произвольном отношении  $d/\lambda$ .

В настоящее время известно большое число магнитных сверхпроводников, проявляющих новые уникальные свойства [16–18]. Кроме тройных соединений [19] сосуществование сверхпроводимости и магнетизма установлено в ВТСП соединениях типа REBaCuO, RECuO и других, где RE — редкоземельный ион. Сильная антиферромагнитная корреляция спинов меди в CuO<sub>2</sub>-плоскостях в сверхпроводящем состоянии является одной из важнейших черт ВТСП материалов [20].

Тем более актуальным становится исследование нелокальной электродинамики джозефсоновских переходов в ультратонких пленках магнитных сверхпроводников, для которых  $d \ll \lambda$ . В этом случае такую задачу можно свести к задаче о бесконечно тонкой двумерной сверхпроводящей плоскости, когда можно пренебречь зависимостью сверхпроводящих физических характеристик контакта от перпендикулярной плоскости пленки координаты и считать, что ток и магнитное поле слабо меняются по толщине пластины [21].

Рассматриваемая система — тонкая пленка магнитного сверхпроводника — по своим магнитным свойствам может быть двумерной либо трехмерной, когда магнитная проницаемость пленки  $\hat{\mu}$  зависит от двух (в плоскости пленки) или трех координат и времени.

Геометрия задачи такова: плоскость пленки совпадает с плоскостью XOY, ток распространяется вдоль оси OY, а линия слабых связей расположена по оси OX.

## 1. Основные уравнения электродинамики тонкой пленки магнитного сверхпроводника

Исходим, следуя [22], из уравнений Максвелла для магнитной индукции  $\mathbf{B}(r, t) = \text{rot}\mathbf{A}(r, t)$  ( $\mathbf{A}(r, t)$  — векторный потенциал), определяемой суммой магнитного поля  $\mathbf{H}(r, t)$ , создаваемого незатухающим током  $\mathbf{j}(r, t)$ , и намагниченности  $\mathbf{M}(r, t)$

$$\text{rot}\mathbf{B}(r, t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(r, t) + 4\pi\text{rot}\mathbf{M}(r, t). \quad (1)$$

Связь между током, потенциалом и фазой параметра порядка  $\Theta(r, t)$  (в лондоновской калибровке потенциала  $\text{div}\mathbf{A}(r, t) = 0$ ) определяется выражением

$$\mathbf{j}(r, t) = (c/4\pi\lambda^2)[\mathbf{S}(\rho, t) - \mathbf{A}(r, t)], \quad (2)$$

где  $r = (x, y, z)$ ,  $\rho = (x, y)$ , а вектор  $\mathbf{S}(\rho, t)$  определяется градиентом фазы

$$\mathbf{S}(\rho, t) = \frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\Theta(\rho, t), \quad (3)$$

здесь  $\Phi_0$  — квант магнитного потока.

Фаза параметра порядка удовлетворяет условию

$$\text{rot } \mathbf{S}(\rho, t) = -z \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \delta(y), \quad (4)$$

где  $z$  — единичный орт вдоль оси  $OZ$ ,  $\delta(y)$  — дельта-функция Дирака, а  $\varphi(x, t)$  определяется разностью фаз параметра порядка на переходе

$$\varphi(x, t) = \Theta(x, +0, t) - \Theta(x, -0, t). \quad (5)$$

Система уравнений (1), (2) приводит к соотношению

$$\text{rot } \mathbf{H}(r, t) = \frac{c}{4\pi\lambda^2} [\mathbf{S}(\rho, t) - \mathbf{A}(r, t)], \quad (6)$$

которое для ультратонкой пленки при  $d \ll \lambda$  может быть представлено в виде

$$\text{rot } \mathbf{H}(r, t) = \lambda_{\text{eff}}^{-1} [\mathbf{S}(\rho, t) - \mathbf{A}(r, t)] \delta(z), \quad (7)$$

где  $\lambda_{\text{eff}} = \lambda^2/d$  — пирловская глубина проникновения.

## 2. Пленка двумерного магнитного сверхпроводника

Будем вначале предполагать, что рассматриваемая система двумерна не только по своим сверхпроводящим, но и магнитным свойствам, когда магнитная проницаемость пленки представима в виде

$$\hat{\mu} = \mu(r - r', t - t') = \mu(\rho - \rho', t - t') \delta(z - z'). \quad (8)$$

Поэтому в случае двумерного магнитного сверхпроводника магнитное поле  $\mathbf{H}(r, t)$  связано с магнитной индукцией  $\mathbf{B}(r, t)$  интегральным материальным соотношением

$$\mathbf{H}(r, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\rho' \mu^{-1}(\rho - \rho', t - t') \mathbf{B}(\rho', z, t'), \quad (9)$$

где  $\mu(\rho - \rho', t - t')$  — магнитная проницаемость двумерной сверхпроводящей пленки.

Из системы соотношений (7), (9) получаем уравнение для векторного потенциала

$$\begin{aligned} \text{rot} \left\{ \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\rho' \mu^{-1}(\rho - \rho', t - t') \text{rot} \mathbf{A}(\rho', z, t') \right\} \\ = \lambda_{\text{eff}}^{-1} [\mathbf{S}(\rho, t) - \mathbf{A}(\rho, z, t)] \delta(z), \end{aligned} \quad (10)$$

выражающее его через поле источника  $\mathbf{S}(\rho, t)$ .

Из уравнения непрерывности  $\text{div } \mathbf{j}(r, t) = 0$  и уравнения (2) следует, что  $\text{div } \mathbf{S}(\rho, t) = 0$ . Следовательно, векторное поле  $\mathbf{S}(\rho, t)$  можно представить как ротор векторного поля  $F(\rho, t)$  в виде

$$\mathbf{S}(\rho, t) = \text{rot } \mathbf{F}(\rho, t), \quad (11)$$

где

$$\mathbf{F}(\rho, t) = \hat{z} F(\rho, t). \quad (12)$$

Подставляя выражение (12) в соотношение (4), получаем уравнение, описывающее функцию  $F(\rho, t)$  в виде

$$\Delta F(\rho, t) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \delta(y). \quad (13)$$

С одной стороны, плотность тока сквозь джозефсоновский переход  $f_y(x, 0, t)$  равна сумме, например, трех слагаемых: плотности джозефсоновского сверхтока, нормального (квазичастичного) тока и емкостного тока смещения

$$\begin{aligned} j_y(x, 0, t) = j_c \left[ \sin \varphi(x, t) + \frac{\beta}{\omega_J^2} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} \right] d \delta(z), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\beta$  — диссипативный параметр,  $j_c$  и  $\omega_J$  — критический ток и джозефсоновская частота соответственно.

С другой стороны, из уравнения (2) следует, что та же плотность тока  $j_y(x, 0, t)$  может быть представлена в виде

$$j_y(x, 0, t) = \frac{c}{4\pi\lambda_{\text{eff}}} [S_y(x, 0, t) - A_y(x, 0, 0, t)] \delta(z). \quad (15)$$

Приравнивая выражения для плотности тока (14) и (15), видим, что

$$\begin{aligned} j_c \left[ \sin \varphi(x, t) + \frac{\beta}{\omega_J^2} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} \right] \\ = \frac{c}{4\pi\lambda^2} [S_y(x, 0, t) - A_y(x, 0, 0, t)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Чтобы получить замкнутое уравнение динамики для разности фаз  $\varphi(x, t)$ , необходимо найти функциональное соотношение между

$$\Delta_y(x, t) = S_y(x, 0, t) + A_y(x, 0, 0, t) \quad (17)$$

и

$$\varphi(x, t).$$

С целью решения системы уравнений (10) введем Фурье-трансформанты для векторов  $\mathbf{A}(r, t)$ ,  $\mathbf{S}(\rho, t)$  и скалярной функции  $\mu^{-1}(\rho, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\rho, z, t) = \int \frac{d^2 q d p d \omega}{(2\pi)^4} \\ \times \exp(iq\rho + ipz - i\omega t) A(q, p, \omega), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mathbf{S}(\rho, t) = \int \frac{d^2 q d \omega}{(2\pi)^3} \exp(iq\rho - i\omega t) \mathbf{S}(q, \omega), \quad (19)$$

$$\mu^{-1}(\rho, t) = \int \frac{d^2 q d \omega}{(2\pi)^3} \exp(iq\rho - i\omega t) \mu^{-1}(q, \omega). \quad (20)$$

Используя соотношения (18) и (19), представим величину  $\Delta_y(x, t)$  в виде интеграла

$$\Delta_y(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} q dq \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta [S_y(q, \omega) - A_y(q, \omega)] \exp(iqx \cos \vartheta - i\omega t), \quad (21)$$

где  $q = (q_x^2 + q_y^2)^{1/2}$ ,  $\vartheta$  — полярный угол на плоскости  $(q_x, q_y)$  и

$$\mathbf{A}(q, \omega) = \inf_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \mathbf{A}(q, p, \omega). \quad (22)$$

Решения уравнения (10) можно представить в виде

$$\mathbf{A}(q, p, \omega) = \lambda_{\text{eff}}^{-1} \mu(q, \omega) (q^2 + p^2) \times [\mathbf{S}(q, \omega) - \mathbf{A}(q, \omega)]. \quad (23)$$

Как следует из уравнений (22) и (23), соотношения между  $\mathbf{S}(q, \omega)$  и  $\mathbf{A}(q, \omega)$  запишем следующим образом:

$$\mathbf{A}(q, \omega) = \frac{\mu(q, \omega)}{\mu(q, \omega) + 2q\lambda_{\text{eff}}} \mathbf{S}(q, \omega), \quad (24)$$

и поэтому

$$S_y(q, \omega) - A_y(q, \omega) = \frac{2q\lambda_{\text{eff}}}{\mu(q, \omega) + 2q\lambda_{\text{eff}}} S_y(q, \omega). \quad (25)$$

Чтобы вычислить  $S_y(q, \omega)$ , нужно продифференцировать уравнение (13) по координате  $x$ , так как, согласно (11) и (12),  $S_y(\rho, t)$  равно  $-\partial F(\rho, t)/\partial x$ . В результате имеем

$$\Delta S_y(\rho, t) = -\frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} \delta(y). \quad (26)$$

Следствием этого уравнения является соотношение

$$S_y(q, \omega) = \frac{\Phi_0}{2\pi q^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-iq \cos \vartheta x + i\omega t) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}. \quad (27)$$

Комбинируя выражения (27), (25), (21) и (16), получаем интегродифференциальное уравнение динамики разности фаз  $\varphi(x, t)$  на джозефсоновском переходе при любом типе магнитного упорядочения в тонкой двумерной магнитной сверхпроводящей пленке

$$\sin \varphi(x, t) + \frac{\beta}{\omega_J^2} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = l_J \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t-t'\right) \frac{\partial^2 \varphi(x', t')}{\partial x'^2}, \quad (28)$$

где  $l_J = \lambda_J^2/\lambda$ ,  $\lambda_J$  — джозефсоновская глубина проникновения, а нелокальное по пространственной и временной

переменным интегральное ядро  $K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t-t'\right)$  имеет вид

$$K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t-t'\right) = \int_0^{\infty} \frac{dq}{\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2\lambda_{\text{eff}} J_0[q(x-x')] \exp[-i\omega(t-t')]}{\mu(q, \omega) + 2q\lambda_{\text{eff}}}. \quad (29)$$

Здесь  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка. Нелокальность уравнения (28) по времени обусловлена частотной дисперсией магнитной проницаемости  $\mu(q, \omega)$ .

Поскольку  $\lambda \gg a$  ( $a$  — постоянная кристаллической решетки), то естественно использовать гидродинамическое описание магнитной подсистемы. Ограничиваясь парамагнитной областью температур, для магнитной проницаемости имеем выражение

$$\mu(q, \omega) = 1 + i4\pi \frac{\chi_0 D_2 q^2}{\omega + iD_2 q^2}, \quad (30)$$

где  $\chi_0$  — статическая магнитная восприимчивость, а коэффициент спиновой диффузии для двумерных гейзенберговских магнетиков равен  $D_2 = (1/3)(2\pi)^{1/2} \times Ja^2[s(s+1)]^{1/2}$  ( $J$  — параметр внутрислоевого обмена,  $s$  — спин). Строго говоря, сверхпроводящие токи экранируют длинноволновую часть обменного и электромагнитного взаимодействий, перенормируя параметры магнитной подсистемы. Однако, рассматривая парамагнитную область температур и интересуясь далее оценкой по порядку величины, мы не будем учитывать это обстоятельство.

Рассмотрим спектр малоамплитудных электромагнитных возмущений

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 \exp[i(Qx - \Omega t)], \quad |\varphi_0| \ll 1, \quad (31)$$

распространяющихся вдоль перехода Джозефсона с волновым вектором  $Q$  и частотой  $\Omega$ .

Из уравнения (28) с учетом (29)–(31) в бездиссипативном пределе (при  $\beta = 0$ ) и в отсутствие транспортного тока и внешнего поля следует дисперсионное уравнение  $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}(\hat{Q})$

$$\hat{\Omega}^2 = 1 + \frac{2}{\pi} l \hat{Q}^2 I(\hat{Q}, \hat{\Omega}), \quad (32)$$

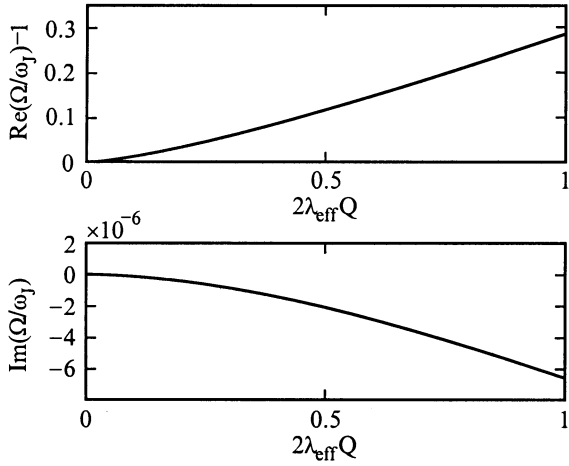
где

$$I(\hat{Q}, \hat{\Omega}) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + \hat{Q} \operatorname{ch} x + \frac{4\pi\chi_0 \hat{Q}^2 \operatorname{ch}^2 x}{b + \hat{Q}^2 \operatorname{ch}^2 x}}, \quad (33)$$

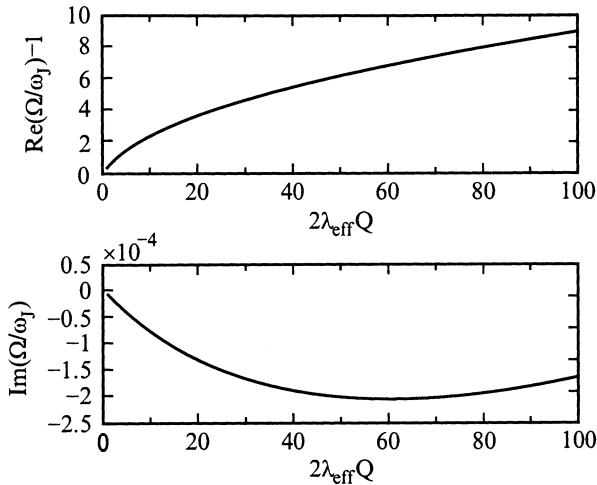
а также введены безразмерные величины  $\hat{Q} = 2\lambda_{\text{eff}} Q$ ,  $\hat{\Omega} = \Omega/\omega_J$  и использованы следующие обозначения

$$l = l_J/2\lambda_{\text{eff}}, \quad b = -i\eta \hat{\Omega}, \quad \eta = \omega_J/\Omega_{\text{eff}},$$

$$\Omega_{\text{eff}} = D_2/(2\lambda_{\text{eff}})^2.$$



**Рис. 1.** Перенормированный магнитной подсистемой спектр и декремент затухания малоамплитудных электромагнитных волн в джозефсоновском переходе в тонкой пленке двумерного магнитного сверхпроводника для значений волнового вектора  $0 \leq \hat{Q} \leq 1$ .



**Рис. 2.** Перенормированный магнитной подсистемой спектр и декремент затухания малоамплитудных электромагнитных возбуждений в джозефсоновском контакте в тонкой пленке двумерного магнитного сверхпроводника для волновых векторов в интервале  $1 \leq \hat{Q} \leq 100$ .

При  $\chi_0 = 0$  (для немагнитного сверхпроводника) уравнение (32) с учетом (33) приводит к известному спектру малоамплитудных электромагнитных волн в длинноволновой и коротковолновой областях, рассчитанному в работе [12]. При этом частота  $\hat{\Omega}$  является вещественной функцией волнового вектора  $\hat{\Omega}$  и затухание мод в бездиссипативном пределе отсутствует. Иная ситуация наблюдается для магнитного сверхпроводника при  $\chi_0 \neq 0$ . Типичное для антиферромагнетиков значение  $\chi_0 \propto 10^{-3} - 10^{-5}$ . Численный анализ показал, что при величине  $\chi_0 = 10^{-3}$ , сравнимой с величиной восприимчивости медной подсистемы ВТСП

материалов, из неявного относительного  $\hat{\Omega}$  уравнения (32) при учете (33) следует комплексное решение  $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}(\hat{Q}) = \text{Re}\hat{\Omega}(\hat{Q}) + i\text{Im}\hat{\Omega}(\hat{Q})$  с малой отрицательной мнимой частью, удовлетворяющей условию

$$|\text{Im}\hat{\Omega}(\hat{Q})|\text{Re}\hat{\Omega}(\hat{Q}) \ll 1. \quad (34)$$

Это указывает на наличие затухания малоамплитудных электромагнитных возбуждений, обусловленного влиянием магнитной подсистемы. При этом малая доля энергии электромагнитных волн, перекачиваясь в энергию явления диффузии спиновых волн, необратимо рассеивается. Нарастающих решений в таком процессе не обнаружено. На рис. 1 приведены перенормированный магнитной подсистемой спектр электромагнитных волн и декремент затухания в джозефсоновском переходе для значений волнового вектора  $0 \leq \hat{Q} \leq 1$  при следующих значениях параметров:  $\chi_0 = 10^{-3}$ ,  $l = 1$ ,  $\eta = 10^3$ . На рис. 2 при тех же значениях параметров изображены спектр и декремент затухания малоамплитудных электромагнитных волн для волновых векторов в интервале  $1 \leq \hat{Q} \leq 100$ .

### 3. Пленка трехмерного магнитного сверхпроводника

Теперь будем предполагать, что рассматриваемая система все же трехмерна по своим магнитным свойствам, когда магнитная проницаемость пленки  $\hat{\mu}$  зависит от трех координат и времени,  $\hat{\mu} = \mu(r - r', t - t')$ .

Тогда магнитное поле  $\mathbf{H}(r, t)$  будет связано с магнитной индукцией  $\mathbf{B}(r, t)$  интегральным материальным соотношением

$$\mathbf{H}(r, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dr' \mu^{-1}(r - r', t - t') \mathbf{B}(r', t'). \quad (35)$$

Из системы соотношений (7), (35) получаем уравнение для векторного потенциала

$$\begin{aligned} \text{rot} \left\{ \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dr' \mu^{-1}(r - r', t - t') \text{rot} \mathbf{A}(r', t') \right\} \\ = \lambda_{\text{eff}}^{-1} [\mathbf{S}(\rho, t) - \mathbf{A}(\rho, z, t)] \delta(z), \end{aligned} \quad (36)$$

выражающее его через поле источника  $\mathbf{S}(\rho, t)$ .

Введем Фурье-трансформанты для  $\mathbf{A}(r, t)$ ,  $\mathbf{S}(\rho, t)$  (18), (19). Функцию  $\mu^{-1}(r, t)$  представим в виде

$$\begin{aligned} \mu^{-1}(r, t) = \int \frac{d^2 q d p d \omega}{(2\pi)^4} \\ \times \exp(iq\rho + iqz - i\omega t) \mu^{-1}(q, p, \omega). \end{aligned} \quad (37)$$

Решения уравнений (36) теперь представимы в виде

$$\mathbf{A}(q, p, \omega) = \lambda_{\text{eff}}^{-1} \frac{\mu(q, p, \omega)}{(p^2 + q^2)} [\mathbf{S}(q, \omega) - \mathbf{A}(q, \omega)]. \quad (38)$$

Как следует из (22) и (38), соотношения между  $\mathbf{S}(q, \omega)$  и  $\mathbf{A}(q, \omega)$  можно записать так

$$\mathbf{A}(q, \omega) = \left(1 + \frac{\lambda_{\text{eff}}}{R(q, \omega)}\right)^{-1} \mathbf{S}(q, \omega), \quad (39)$$

где  $R(q, \omega)$  определяется интегралом

$$R(q, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{\mu(q, p, \omega)}{p^2 + q^2}, \quad (40)$$

и поэтому

$$S_y(q, \omega) - A_y(q, \omega) = \frac{\lambda_{\text{eff}}}{R(q, \omega) + \lambda_{\text{eff}}} S_y(q, \omega). \quad (41)$$

Комбинируя выражения (27), (41), (21) и (16), получаем интегродифференциальное уравнение динамики разности фаз на джозефсоновском переходе при любом типе магнитного упорядочения в тонкой пленке трехмерного магнитного сверхпроводника,

$$\begin{aligned} \sin \varphi(x, t) + \frac{\beta}{\omega_J^2} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} \\ = l_J \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t-t'\right) \frac{\partial^2 \varphi(x', t')}{\partial x'^2}, \end{aligned} \quad (42)$$

где нелокальное по пространственной и временной переменным интегральное ядро  $K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t-t'\right)$  имеет вид

$$\begin{aligned} K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t-t'\right) = \int_0^{\infty} \frac{dq}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \\ \times \frac{\lambda_{\text{eff}} J_0[q(x-x')] \exp[-i\omega(t-t')]}{q[R(q, \omega) + \lambda_{\text{eff}}]}. \end{aligned} \quad (43)$$

Нелокальность уравнения (42) по времени обусловлена частотной дисперсией магнитной проницаемости  $\mu(q, p, \omega)$  (через посредство функции  $R(q, \omega)$ ).

Здесь, как и в предыдущем разделе, при  $\lambda \gg a$  естественно использовать гидродинамическое описание магнитной подсистемы. Ограничиваясь также парамагнитной областью температур, для магнитной проницаемости имеем выражение

$$\mu(q, p, \omega) = 1 + i4\pi \frac{\chi_0 D_3 (q^2 + p^2)}{\omega + iD_3 (q^2 + p^2)}, \quad (44)$$

где  $D_3$  — коэффициент спиновой диффузии для трехмерных гейзенберговских магнетиков.

Согласно формуле (40), с учетом выражения (44) функция  $R(q, \omega)$  приобретает вид

$$R(q, \omega) = \frac{f_0(q, \omega) + i4\pi\chi_0 q}{2qf_0(q, \omega)}, \quad (45)$$

где  $f_0(q, \omega)$  равно

$$\begin{aligned} f_0(q, \omega) = [(q^4 + \omega^2/D_3^2)^{1/2}/2 - q^2/2]^{1/2} \\ + i[(q^4 + \omega^2/D_3^2)^{1/2}/2 + q^2/2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Рассмотрим спектр малоамплитудных электромагнитных возбуждений (31), распространяющихся вдоль джозефсоновского перехода с волновым вектором  $Q$  и частотой  $\Omega$ .

Из уравнения (42) с учетом (43), (45), (46) и (31) в бездиссипативном пределе (при  $\beta = 0$ ) и в отсутствие транспортного тока и внешнего поля следует дисперсионное уравнение  $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}(\hat{Q})$

$$\hat{\Omega}^2 = 1 + \frac{2}{\pi} l \hat{Q} I(\hat{Q}, \hat{\Omega}), \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} I(\hat{Q}, \hat{\Omega}) \\ = \int_0^{\infty} \frac{dx F_0(\hat{Q} \text{ch} x, \hat{\Omega})}{F_0(\hat{Q} \text{ch} x, \hat{\Omega}) (1 + \hat{Q} \text{ch} x) + i4\pi\chi_0 \hat{Q} \text{ch} x} \end{aligned} \quad (48)$$

и

$$\begin{aligned} F_0(x, y) = [(x^4 + \eta^2 y^2)^{1/2}/2 - x^2/2]^{1/2} \\ + i[(x^4 + \eta^2 y^2)^{1/2}/2 + x^2/2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (49)$$

а также, как выше, введены безразмерные величины

$$\hat{Q} = 2\lambda_{\text{eff}} Q, \quad \hat{\Omega} = \Omega/\omega_J$$

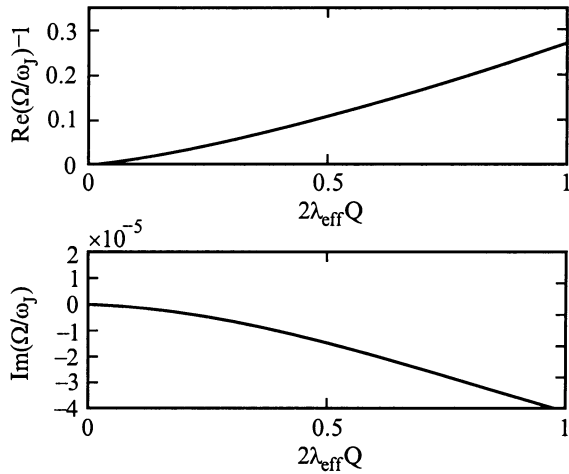
и использованы следующие обозначения:

$$l = l_J/2\lambda_{\text{eff}}, \quad \eta = \omega_J/\Omega_{\text{eff}}, \quad \Omega_{\text{eff}} = D_3/(2\lambda_{\text{eff}})^2.$$

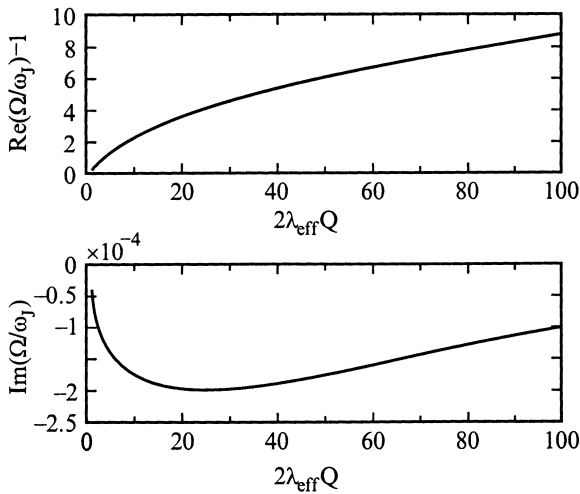
При  $\chi_0 = 0$  (случай немагнитного сверхпроводника) уравнение (47) с учетом (48) приводит к известному спектру малоамплитудных электромагнитных волн, рассчитанному в работе [12] для длинноволновой и коротковолновой областей. При этом частота  $\hat{\Omega}$  является вещественной функцией волнового вектора  $\hat{Q}$  и затухание мод в бездиссипативном пределе отсутствует. Иная ситуация наблюдается для магнитного сверхпроводника при  $\chi_0 \neq 0$ . Типичное для антиферромагнетиков значение  $\chi_0 \propto 10^{-3} - 10^{-5}$ . Численный анализ показал, что при величине  $\chi_0 = 10^{-3}$ , сравнимой с величиной магнитной восприимчивости медной подсистемы ВТСП материалов,  $l = 1$  и  $\eta = 10^3$  из неявного относительно  $\hat{\Omega}$  уравнения (47) при учете (48) и (49) следует комплексное решение  $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}(\hat{Q}) = \text{Re}\hat{\Omega}(\hat{Q}) + i\text{Im}\hat{\Omega}(\hat{Q})$  с малой отрицательной мнимой частью, удовлетворяющей условию

$$|\text{Im}\hat{\Omega}(\hat{Q})|/\text{Re}\hat{\Omega}(\hat{Q}) \ll 1. \quad (50)$$

Это указывает на наличие затухания малоамплитудных электромагнитных возбуждений, обусловленного влиянием магнитной подсистемы, когда малая доля энергии электромагнитных волн необратимо рассеивается благодаря механизму диффузии спиновых волн. Нарастающих решений при этом не обнаружено. На рис. 3 и 4 для значений волнового вектора  $0 \leq Q \leq 1$  и  $1 \leq \hat{Q} \leq 100$  соответственно приведены перенормированный магнитной подсистемой спектр и декремент затухания электромагнитных волн в джозефсоновском переходе.



**Рис. 3.** Перенормированный магнитной подсистемой спектр и декремент затухания малоамплитудных электромагнитных волн в джозефсоновском переходе в тонкой пленке трехмерного магнитного сверхпроводника для волновых векторов в интервале  $1 \leq \hat{Q} \leq 1$ .



**Рис. 4.** Перенормированный магнитной подсистемой спектр и декремент затухания линейных электромагнитных возбуждений в джозефсоновском контакте в тонкой пленке трехмерного магнитного сверхпроводника для значений волнового вектора  $1 \leq \hat{Q} \leq 100$ .

Из вышеизложенного ясно, что для джозефсоновской электродинамики тонких пленок как двумерных, так и трехмерных магнитных сверхпроводников нелокальность по пространственным переменным очень существенна и становится главным и определяющим ее специфику фактором.

Нелокальность по времени электродинамики Джозефсона тонких пленок магнитных сверхпроводников в двумерном и трехмерном случаях связана с частотной дисперсией магнитной проницаемости сред, которая в конечном счете порождается процессами запаздывания.

Согласно выражениям (30) и (44), затухание электромагнитных возбуждений в джозефсоновском переходе в тонких пленках магнитных сверхпроводников связано с комплексностью функций магнитных проницаемостей сред, а физическим механизмом такого затухания является процесс спиновой диффузии с конечным временем релаксации, при котором небольшая доля энергии электромагнитного поля необратимо рассеивается. Само отсутствие или наличие затухания линейных электромагнитных волн в джозефсоновском переходе (в бездиссипативном пределе) может дать информацию о том, имеем мы дело с немагнитным или магнитным сверхпроводником.

Численные исследования показали слабое, но наблюдаемое отличие спектров  $\text{Re}\hat{\Omega}(\hat{Q})$  (в третьем знаке после запятой) линейных электромагнитных возбуждений в джозефсоновском переходе в тонких пленках двумерных и трехмерных магнитных сверхпроводников от аналогичного спектра волн  $\hat{\Omega}(\hat{Q})$  в немагнитном сверхпроводнике, что связано с малостью значения величины статической магнитной восприимчивости  $\chi_0$ .

Также, согласно численным расчетам, спектры малоамплитудных электромагнитных возбуждений  $\text{Re}\hat{\Omega}(\hat{Q})$ , распространяющихся вдоль перехода Джозефсона, мало различаются (только в четвертом знаке после запятой) между собой в двумерном (рис. 1, 2) и трехмерном (рис. 3, 4) магнитных сверхпроводниках. Существенное отличие наблюдается в зависимостях декрементов затухания  $\text{Im}\hat{\Omega}(\hat{Q})$  малоамплитудных электромагнитных волн для двумерных и трехмерных магнитных сверхпроводников. Это дает возможность в эксперименте определять размерность магнитного упорядочения в тонкой сверхпроводящей пленке.

Автор искренне признателен участникам семинара Ю.В. Медведева за критические замечания; А.С. Зельцеру — за помощь при проведении численных расчетов; В.Н. Криворучко, Ю.Е. Кузовлеву, Ю.Г. Пашкевичу и А.Э. Филиппову — за полезные дискуссии, внимание и поддержку.

### Список литературы

- [1] Ю.М. Алиев, В.П. Силин, С.А. Урюпин. Сверхпроводимость **5**, 2, 228 (1992).
- [2] A. Gurevich. Phys. Rev. **B46**, 5, 3187 (1992).
- [3] Ю.М. Алиев, В.П. Силин, С.А. Урюпин. Письма в ЖЭТФ **57**, 3, 187 (1993).
- [4] Ю.М. Алиев, В.П. Силин. ЖЭТФ **104**, 1(7), 2526 (1993).
- [5] Yu. M. Aliev, V.P. Silin. Phys. Lett. **A117**, 2, 259 (1993).
- [6] В.П. Силин. Письма в ЖЭТФ **58**, 9, 726 (1993).
- [7] Г.Л. Алфимов, В.П. Силин. ЖЭТФ **106**, 2(8), 671 (1994).
- [8] В.П. Силин. Письма в ЖЭТФ **60**, 6, 442 (1994).
- [9] Ю.М. Иванченко, Т.К. Соболева. Письма в ЖЭТФ **51**, 2, 100 (1990).
- [10] Yu.M. Ivanchenko, T.K. Soboleva. Phys. Lett. **A147**, 1, 65 (1990).

- [11] Ю.М. Иванченко, Т.К. Соболева. ФТТ **32**, 7, 2029 (1990); R.G. Mints, I.B. Snapiro. Phys. Rev. **B51**, 5, 3054 (1995).
- [12] И.О. Кулик, И.К. Янсон. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. Наука, М. (1970) 272 с.; Ю.Е. Кузовлев, А.И. Ломтев. ЖЭТФ **111**, 5, 803 (1997).
- [13] А.И. Ломтев. ЖЭТФ **113**, 6, 2256 (1998).
- [14] А.И. Буздин, Л.Н. Булаевский, М.Л. Кулич, С.В. Панюков. УФН **144**, 4, 597 (1984); А.И. Буздин, Л.Н. Булаевский. УФН *149*, 1, 45 (1986).
- [15] Ю.А. Изюмов, Н.М. Плакида, Ю.Н. Скрыбин. УФН **159**, 4, 621 (1989).
- [16] Сверхпроводимость тройных соединений / Под ред. М. Мейпла и Э. Фишера. Мир, М. (1985); Физические свойства высокотемпературных сверхпроводников / Под ред. Д.М. Гинзберга. Мир, М. (1990).
- [17] А.А. Абрикосов. Основы теории металлов: Наука, М. (1987).
- [18] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Статистическая физика. Наука, М. (1978).
- [19] Х. Умедзава, Х. Мацумото, М. Татики. Термополевая динамика и конденсированные состояния. Мир, М. (1985).
- [20] В.И. Halperin, P.C. Hohenberg. Phys. Rev. **188**, 2, 898 (1969).
- [21] P.M. Richards, M.V. Salamon. Phys. Rev. **B9**, 1, 32 (1974).
- [22] А.И. Буздин. Письма в ЖЭТФ **40**, 5, 193 (1984).