01;03

Точное решение задачи о равновесной конфигурации двумерной заряженной жидкометаллической капли

© *Н.М. Зубарев*

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург

Поступило в Редакцию 13 июля 1999 г.

С использованием метода конформных отображений получены точные решения задачи о равновесной форме заряженной двумерной жидкометаллической капли. Оказалось, что при достижении амплитудами возмущений некоторых критических значений занятая жидкостью область теряет односвязность, что соответствует делению капли на части.

Задача о равновесной конфигурации заряженной жидкометаллической капли играет важную роль в понимании условий жесткого возбуждения неустойчивости, приводящей к ее распаду [1,2]. В силу нелинейности соответствующих уравнений их аналитическое исследование проводилось либо в приближении малости возмущений поверхности, либо не самосогласованно (см., например, [3,4] и ссылки там). В настоящей работе показывается, что для специального случая двумерной капли, когда все величины зависят только от пары независимых переменных x и y, использование метода конформных отображений позволяет найти широкий класс точных решений этой задачи (с математической точки зрения наиболее близкий подход использовался для решения задачи о профиле капиллярной волны на поверхности идеальной жидкости [5]).

Итак, пусть заряженная проводящая жидкость со свободной поверхностью S занимает в плоскости $\{x, y\}$ некоторую ограниченную односвязную область (в 3D-пространстве проводник занимает объем, ограниченный прямой цилиндрической поверхностью). Распределение потенциала электрического поля φ (напряженность поля задается соотношением $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$) в отсутствие пространственных зарядов описывается уравнением Лапласа:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,$$

Его следует рассматривать совместно с условием эквипотенциальности поверхности проводника $\varphi|_S = 0$, а также условием того, что на бесконечности поле заряженного проводника будет совпадать с полем, создаваемым точечным зарядом:

$$\varphi \to -2q\ln x, \qquad E = |\mathbf{E}| \to 2q/x, \qquad r \to \infty, \tag{1}$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, а q — электрический заряд проводника.

Равновесный рельеф границы жидкого металла определяется условием баланса сил, действующих на поверхность [2]:

$$p + \frac{E^2}{8\pi}\bigg|_S + \frac{\alpha}{R} = 0, \tag{2}$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, p — разность между давлением жидкости и внешним давлением, а R — радиус кривизны поверхности. Заметим, что кривизна эквипотенциальной поверхности S может быть выражена через величины E и φ следующим образом: $R^{-1} = -(\partial E/\partial\varphi)\big|_S$.

Перейдем для удобства к безразмерным величинам:

$$\mathbf{E} \to 4\pi\alpha q^{-1}\mathbf{E}, \quad \mathbf{r} \to q^2(2\pi\alpha)^{-1}\mathbf{r}, \quad \varphi \to 2q\varphi, \quad p \to 2\pi\alpha^2 q^{-2} p.$$

Далее, введем в рассмотрение вспомогательную функцию ψ, для которой $\mathbf{E} = \{\partial\psi/\partial y, -\partial\psi/\partial x\}$. Комплексное выражение $w = \varphi - i\psi$ (так называемый комплексный потенциал) является аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Тогда аналитической функцией также будет

$$f - i\theta \equiv \ln(-dw/dz) = \ln E - i\arctan(\varphi_y/\varphi_x) \tag{3}$$

— аналог функции Жуковского в теории плоского потенциального течения несжимаемой жидкости.

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти в систему координат, где роль независимых переменных будут играть величины φ и ψ. Как следствие аналитичности (3) функция f в новых переменных будет удовлетворять уравнению Лапласа

$$f_{\varphi\varphi} + f_{\psi\psi} = 0 \tag{4}$$

с условием на границе проводника, следующим из (2):

$$\partial f/\partial\varphi = pe^{-f} + e^{f}, \qquad \varphi = 0, \tag{5}$$

а также условием на бесконечности:

$$f \to \varphi, \qquad \varphi \to -\infty, \tag{6}$$

получаемым из (1) исключением пространственной переменной r. Учитывая, что в пределе $|z| \to \infty$ для комплексного потенциала справедливо [2]: $w \to -\ln z$, и, следовательно, замкнутая поверхность соответствует изменению ψ на 2π, добавим условие периодичности f по переменной ψ:

$$f(\varphi, \psi) = f(\varphi, \psi + 2\pi). \tag{7}$$

Таким образом, задача нахождения стационарного профиля заряженной 2D жидкометаллической капли сводится к рассмотрению краевой задачи (4)–(7) на полуплоскости $\varphi \le 0$.

Будем искать решение задачи (4)–(7) в виде

$$f(\varphi, \psi) = C + \varphi + \ln\left(\frac{Z_\varphi - Z + Y}{Z_\varphi + Z - Y}\right), \tag{8}$$

где C — некоторая постоянная, Y — неизвестная функция переменной ψ, а Z — неизвестная функция переменной φ. Подставляя выражение (8) в рассматриваемые уравнения, обнаруживаем, что должны выполняться следующие соотношения:

$$Z(\varphi) = \sinh(k\varphi + \ln d),$$

$$Y(\psi) = \sqrt{k^2 - 1}\cos(k\psi),$$

$$C = \ln(l/2 - 1/2),$$

где $k = 2, 3, 4\ldots$ — целочисленный параметр, задающий количество ветвей соответствующей кривой в координатах x и y, $l = (1-4p)^{1/2}$ (выполняется неравенство $1 < l < k$), и, наконец, $d = (k-l)^{1/2}(k+l)^{-1/2}$.

Подставляя найденные нами выражения для Z и Y в (8) и учитывая, что $E = \exp f$, получим для абсолютного значения напряженности электрического поля на поверхности проводника:

$$E\big|_{\varphi=0} = \frac{1 + a^2d^2 + 2ad\cos(k\psi)}{a^2 + d^2 - 2ad\cos(k\psi)}\exp C, \tag{9}$$

где мы ввели обозначение $a = (k-1)^{1/2}(k+1)^{-1/2}$.

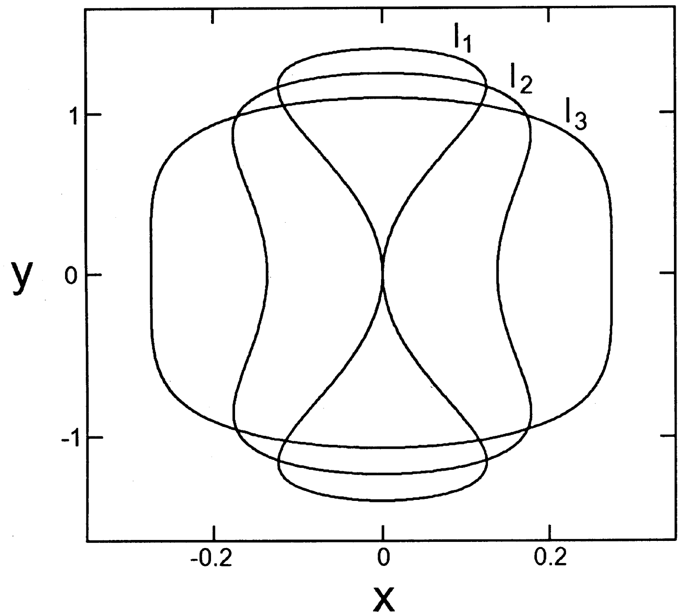

Рис. 1. Равновесные конфигурации заряженной 2D жидкометаллической капли при $k = 2$ для трех значений параметра l ($l_1 = 1.86$, $l_2 = 1.90$ и $l_3 = 1.94$).

Нам понадобится также зависимость функции θ, задающей угол наклона напряженности электрического поля к направлению оси x, от переменной ψ на границе жидкого металла. Используя условие Коши–Римана $\partial\theta/\partial\psi = \partial f/\partial\varphi$, получим из уравнения (5):

$$\theta\big|_{\varphi=0} = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\psi} (E + p/E)\big|_{\varphi=0} d\psi. \qquad (10)$$

Построим теперь равновесные профили свободной поверхности жидкого металла в координатах x и y. Рассматривая соотношение (3) как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции z, получаем интегрированием: $z = -\int \exp(-f + i\theta)dw$. Учитывая, что на границе $w = -i\psi$, находим, что искомые поверхности

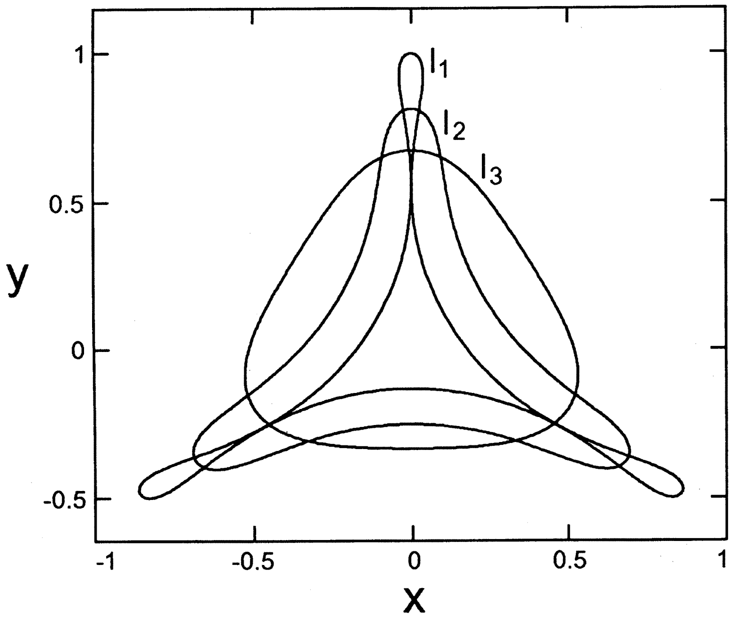

Рис. 2. Равновесные конфигурации заряженной 2D жидкометаллической капли при $k = 3$ ($l_1 = 2.53$, $l_2 = 2.75$ и $l_3 = 2.97$).

задаются параметрически следующим образом:

$$y = y_0 + \int_0^{\psi} \frac{\cos\left(\theta|_{\varphi=0}\right)}{E\big|_{\varphi=0}} d\psi, \quad x = x_0 - \int_0^{\psi} \frac{\sin\left(\theta|_{\varphi=0}\right)}{E\big|_{\varphi=0}} d\psi, \tag{11}$$

где параметр ψ пробегает интервал $0 \le \psi < 2\pi$, а в подынтегральных выражениях следует использовать формулы (9) и (10). Постоянные x_0 и y_0 удобно выбрать таким образом, чтобы геометрический центр кривой совпадал с началом координат.

На рис. 1 и 2 приведены характерные стационарные конфигурации жидкого металла для $k = 2$ и соответственно $k = 3$, определяемые соотношениями (9)–(11). Из рисунков видно, что при уменьшении параметра l амплитуды возмущений поверхности возрастают (в качестве невозмущенных поверхностей рассматриваем цилиндрические, соответствующие пределам $l \to k$), причем при некоторых, зависящих от k критических значениях параметра l занятая жидкостью область теряет односвязность — формируются отдельные жидкометаллические капли.

Автор признателен Е.А. Кузнецову за стимулирующие обсуждения, а также А.М. Искольдскому и Н.Б. Волкову за интерес к работе.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 97–02–16177.

Список литературы

[1] *Rayleigh* // Phil. Mag. 1982. V. 14. P. 184.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[3] *Щукин С.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. В. 11. С. 48.
[4] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. В. 9. С. 39.
[5] *Crapper G.D.* // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 532.