

01

## Управление пространственно-временным хаосом в цепочке бистабильных осцилляторов

© Б.П. Безручко, М.Д. Прохоров

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

Поступило в Редакцию 17 ноября 1998 г.

Рассматриваются процессы в связанных осцилляторах и управление ими при условии бистабильности. Показана возможность стабилизации пространственно-однородных состояний.

1. Процессы в пространственно развитых (многомерных) колебательных системах часто моделируют с помощью осцилляторов, связанных между собой в цепочки или решетки. Подобные ансамбли успешно используются и как модели распределенных сред. Замкнутая в кольцо цепочка идентичных диссипативных осцилляторов, которые синфазно возбуждаются периодической внешней силой, используется нами для анализа возможностей управления хаосом. Элементы цепочки нелинейны, способны совершать регулярные и хаотические колебания и бистабильны. Последнее означает возможность реализации при фиксированном значении параметров двух различных видов установившихся движений. Бистабильность типична для неавтономных колебательных систем в области нелинейного резонанса, где при изменении параметров имеет место гистерезис. Связь между элементами цепочки симметрична и локальна, элементы взаимодействуют лишь с соседями, а также диффузионна (диссипативна). Задача управления пространственно-временным хаосом рассматривается в ее классической трактовке — стабилизации с помощью малых изменений управляющего параметра движений на неустойчивом предельном цикле, встроенном в хаотический аттрактор [1–5]. Продемонстрированы возможность стабилизации пространственно-однородных состояний ансамбля бистабильных элементов с помощью процедуры поэлементного регулирования [6] и работоспособность этого подхода при наличии шумов.

2. Исследовалась дискретная модель при условии идентичности элементов цепочки и синфазности их возбуждения, имеющая вид:

$$x_{n+1}^m = (1 - 2k)f(x_n^m) + k[f(x_n^{m+1}) + f(x_n^{m-1})], \quad (1)$$

где  $x$  — динамическая переменная,  $n = 0, 1, 2, \dots$  — дискретное время,  $m$  — номер элемента цепочки,  $k$  — коэффициент связи, граничные условия периодические  $x_n^1 = x_n^{M+1}$ , где  $M$  — число элементов в цепочке. Базовый элемент цепочки  $f(x_n^m)$  — отображение, отражающее временную динамику осциллятора. Нами использовалось мультимодальное многопараметрическое отображение

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n \exp[-d/N] \cos\left[\frac{2\pi}{N(1 + \beta x_n)}\right] + A, \quad (2)$$

параметры которого характеризуют:  $A$  — амплитуду,  $N$  — нормированную частоту внешнего периодического воздействия,  $d$  — диссипацию,  $\beta$  — нелинейность. Отображение (2) имеет как регулярные, так и хаотические решения, качественно описывает временную динамику нелинейного диссипативного осциллятора и структуру его бифуркационных множеств в области существования и эволюции к хаосу субгармонических колебаний, а также отражает такие нелинейные феномены, как гистерезис, би- и мультистабильность [7,8]. Вид установившегося мультистабильного колебательного состояния определяется начальными условиями.

При некоторых значениях параметров система (1), (2) переходит в режим развитого пространственно-временного хаоса [9,10]; аттракторы, соответствующие таким состояниям, включают в себя множество седловых периодических орбит, которые могут быть стабилизированы с помощью управляющего воздействия на параметры системы.

3. Стабилизация пространственно однородных состояний цепочки проводилась нами для двух типичных случаев: при значениях параметров, соответствующих отсутствию гистерезиса и связанной с ним бистабильности в элементах цепочки, и при наличии бистабильности одиночного элемента. В соответствии с используемой методикой управления [6] управляющее воздействие прикладывается к параметру  $A$  каждого из связанных осцилляторов. Таким образом, параметр  $A$  зависит и от момента времени, и от номера элемента  $m$  и может быть записан

в виде

$$A = A_n^m = A_0 + \tilde{A}_n^m, \quad (3)$$

где  $A_0$  — постоянная, а  $\tilde{A}_n^m$  — переменная составляющие. Процедуре управления последовательно подвергается каждый из элементов цепочки по мере вхождения его динамической переменной  $x_n^m$  в окрестность стабилизируемого состояния.

Стабилизируемыми состояниями в нашей работе являлись неподвижные точки  $\bar{x}$  отображения (2). Тогда при попадании  $x_n^m$  в малую окрестность  $\bar{x}$  можно записать:

$$x_{n+1}^m = \bar{x} + \tilde{x}_{n+1}^m, \quad x_n^m = \bar{x} + \tilde{x}_n^m, \quad (4)$$

где  $\tilde{x}_{n+1}^m$  и  $\tilde{x}_n^m$  — малые возмущения. Подставляя (3) и (4) в (1) и линеаризуя полученное выражение, получаем уравнение для неподвижной точки

$$\bar{x} = A_0 + \bar{x} \exp[-d/N] \cos\left[\frac{2\pi}{N(1 + \beta\bar{x})}\right] \quad (5)$$

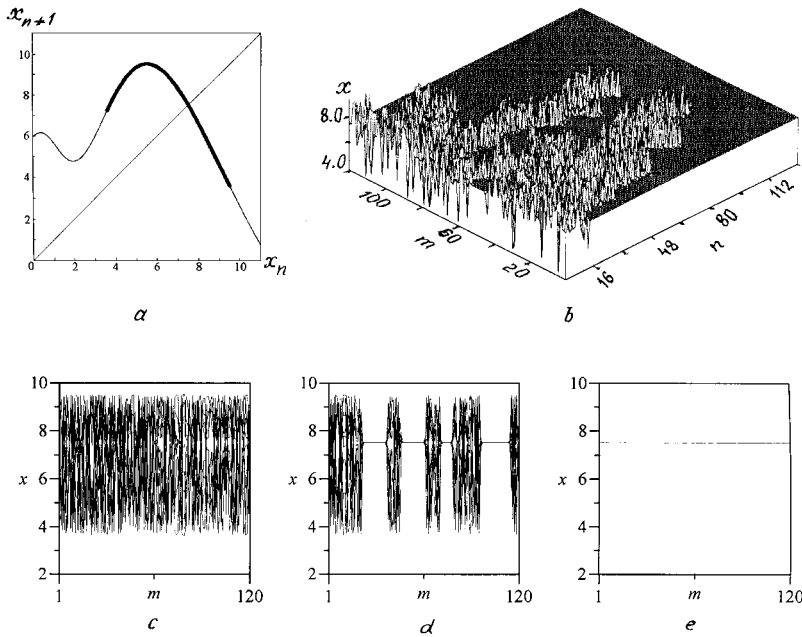
и линеаризованное уравнение для возмущений  $\tilde{x}_{n+1}^m$ , из которого находим значение  $\tilde{A}_n^m$ , при котором это возмущение  $\tilde{x}_{n+1}^m$  становится равным нулю:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n^m = - \exp[-d/N] & \left\{ (1 - 2k)(x_n^m - \bar{x}) \left( \bar{x} \sin\left[\frac{2\pi}{N(1 + \beta\bar{x})}\right] \right. \right. \\ & \times \frac{2\pi\beta}{N(1 + \beta\bar{x})^2} + \cos\left[\frac{2\pi}{N(1 + \beta\bar{x})}\right] \left. \right) \\ & + k \left( x_n^{m+1} \cos\left[\frac{2\pi}{N(1 + \beta x_n^{m+1})}\right] + x_n^{m-v} \cos\left[\frac{2\pi}{N(1 + \beta x_n^{m-1})}\right] \right. \\ & \left. \left. - 2\bar{x} \cos\left[\frac{2\pi}{N(1 + \beta\bar{x})}\right] \right) \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Управляющее воздействие включалось при одновременном выполнении двух условий:  $|x_n^m - \bar{x}| < \varepsilon$  и

$$\begin{aligned} & \left| k \left\{ \left( x_n^{m+1} \cos\left[\frac{2\pi}{N(1 + \beta x_n^{m+1})}\right] - \bar{x} \cos\left[\frac{2\pi}{N(1 + \beta\bar{x})}\right] \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( x_n^{m-1} \cos\left[\frac{2\pi}{N(1 + \beta x_n^{m-1})}\right] - \bar{x} \cos\left[\frac{2\pi}{N(1 + \beta\bar{x})}\right] \right) \right\} \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. при относительной малости обоих слагаемых в (6).



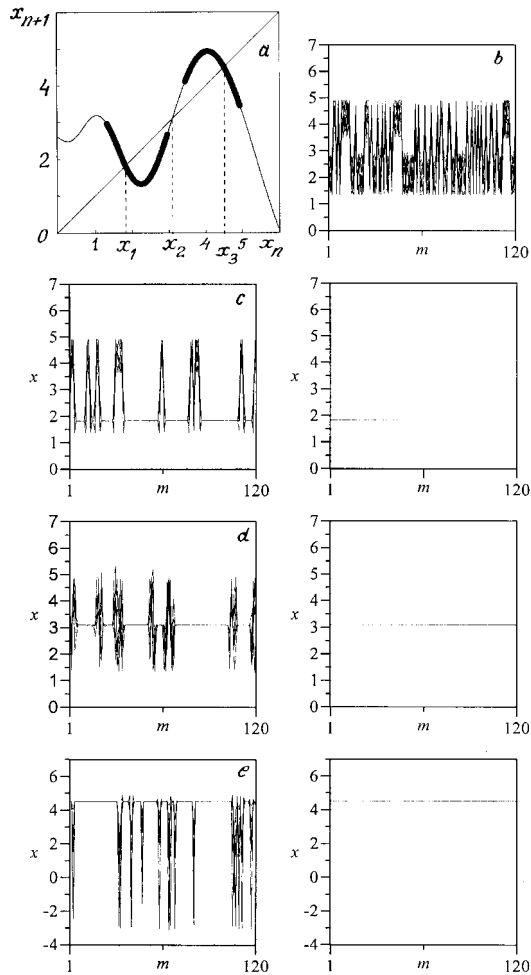
**Рис. 1.** *a* — график отображения (2) при  $A = 6$ ,  $d = 0.2$ ,  $N = 0.5$ ,  $\beta = 0.2$ , хаотический аттрактор выделен толстой линией; *b* — пространственно-временная диаграмма установления однородного режима периода 1; *c* — режим развитого пространственно-временного хаоса; *d-e* — управляемый переход к пространственно однородному режиму периода 1 (*e*); *d* — промежуточный этап перехода.

4. Рассмотрим сначала управляемый переход из режима пространственно-временного хаоса к пространственно-однородному режиму для значений параметров, при которых элементы цепочки имеют единственную неподвижную точку периода 1. График функции (2) для таких значений параметров и существующий при них хаотический аттрактор приведены на рис. 1, *a*. С помощью управляющего воздействия вида (6) по описанной выше схеме можно стабилизировать единственную при данных значениях параметров орбиту периода 1, входящую в хаотический аттрактор (рис. 1). Величина управляющего воздействия уменьшается со временем. Отметим, что стабилизация режимов во

времени и пространстве имеет место лишь при слабой связи между элементами цепочки. Например, для графиков на рис. 1,  $c - ek = 0.005$ . Это объясняется тем, что используемый алгоритм основан на методе последовательной стабилизации элементов цепочки, а чем слабее связь между элементами, тем дольше будет находиться элемент, на который подали управляющее воздействие, в окрестности неустойчивого стабилизируемого состояния, и, следовательно, повышается вероятность образования кластеров.

Рассмотрим теперь стабилизацию пространственно однородных состояний периода 1 для второго типичного случая, при котором параметры системы таковы, что в элементах цепочки имеет место бистабильность и в них сосуществуют два хаотических аттрактора. График отображения (2), соответствующий этой ситуации, и виды хаотических аттракторов приведены на рис. 2, *a*. При выбранных значениях параметров в системе имеются три неустойчивые неподвижные точки, две из которых входят в хаотический аттрактор. Если начальные условия во всех элементах цепочки заданы в бассейне притяжения одного хаотического аттрактора, то такая ситуация аналогична рассмотренной выше для отсутствия бистабильности. При этом соответствующая орбита периода 1, входящая в аттрактор, стабилизируется в цепочке по описанной схеме. Если же начальные условия выбраны таким образом, что часть элементов цепочки совершает колебания на одном хаотическом аттракторе, а часть на другом, то для стабилизации любого из режимов периода 1 требуется достаточно широкое окно по  $\varepsilon$ , а следовательно, и большее значение управляющего воздействия. Это условие является принципиальным, так как независимо от величины связи между элементами колебания отдельного осциллятора могут совершаться в отсутствие управляющего воздействия лишь на одном из аттракторов. А значит, стабилизация неподвижной точки, входящей в другой аттрактор, возможна лишь при величине  $\varepsilon$ , большей интервала по  $x$  между границами хаотических аттракторов. Результаты, демонстрирующие управляемый переход к каждому из трех возможных пространственно однородных режимов периода 1, в том числе и не принадлежащему ни одному из аттракторов, приведены на рис. 2.

Величина управляющего воздействия, необходимого для перевода цепочки в пространственно однородный режим в области бистабильности, может быть существенно уменьшена, если на систему воздействовать случайным шумом. Благодаря наличию шума, становятся возможными переключения между бистабильными состояниями и колебания



**Рис. 2.** *a* — график отображения (2) при  $A = 2.6$ ,  $d = 0.15$ ,  $N = 0.28$ ,  $\beta = 0.2$ , сосуществующие хаотические аттракторы выделены толстыми линиями; *b* — режим развитого пространственно-временного хаоса в области бистабильности; *c–e* — управляемый переход к пространственно однородным режимам периода 1 (правый столбец) с амплитудой колебаний: *c* —  $x = x_1$ , *d* —  $x = x_2$ , *e* —  $x = x_3$  (левый столбец — промежуточный этап перехода).

отдельного осциллятора могут совершаться попеременно вблизи одного или другого хаотического аттрактора. Подавая на систему шум и одновременно воздействуя на нее управляющим сигналом, мы добиваемся того, что колебания всех элементов цепочки переводятся в окрестность лишь одного выбранного хаотического аттрактора. После чего шум может быть отключен и может быть легко достигнута стабилизация пространственно однородного режима периода  $I$ , входящего в этот аттрактор. Для случая, изображенного на рис. 2,  $b$ , воздействие на систему случайного шума с максимальной амплитудой  $\Delta = 0.2$  по абсолютной величине способствовало уменьшению управляющего сигнала и интервала  $\varepsilon$ , при попадании в который включалось управление, в 4 раза по абсолютной величине.

5. Используемый подход может быть применен для стабилизации пространственно однородных и пространственно периодических режимов с различным временным и пространственным периодом, а также для стабилизации пространственных режимов в двумерной решетке бистабильных осцилляторов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-02-16755, а также при поддержке ФЦП "Интеграция", грант № 696.3.

## Список литературы

- [1] Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 1196–1199.
- [2] Gang H., Zhilin Q. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. N 1. P. 68–71.
- [3] Auerbach D. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. N 8. P. 1184–1187.
- [4] Sole R.V., Prida L.M. // Phys. Lett. A. 1995. V. 199. P. 65–69.
- [5] Grigoriev R.O., Cross M.C., Shuster H.G. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. N 15. P. 2795–2798.
- [6] Astakhov V.V., Anishchenko V.S., Strelkova G.I., Shabunin A.V. // IEEE Trans. on Circuits and Systems. 1995. V. 42. N 6. P. 352–357.
- [7] Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. // Chaos, Solitons & Fractals. 1995. V. 5. N 11. P. 2095–2107.
- [8] Безручко Б.П., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П. // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. 10-я зимняя школа-семинар, Саратов, 1966. Кн. 2. С. 35–42.
- [9] Kaneko K. // Physica D. 1989. V. 34. P. 1–41.
- [10] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 10–12. С. 1079–1115.