

01;09;10

Анализ сценариев перехода к хаосу в дискретной двухмодовой модели лазера на свободных электронах

© А.П. Кузнецов, А.П. Широков

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

Поступило в Редакцию 2 марта 1999 г.

Приведены результаты исследования дискретного двухпараметрического двумерного отображения, описывающего динамику двух мод в ЛСЭ, методами нелинейной динамики.

При использовании лазера на свободных электронах (ЛСЭ) в качестве генератора когерентного электромагнитного излучения важным является вопрос о характере взаимодействия продольных мод, а также о различных путях возникновения многочастотного режима. Для решения этой задачи оказывается возможным применение дискретного приближения, состоящего в том, чтобы учитывать взаимодействие электронов с электромагнитной волной только на концах пространства взаимодействия ЛСЭ [1,2]. Предполагая, что в полосу усиления генератора попадает много не эквидистантно расположенных продольных мод, можно считать, что усиление каждой паразитной моды определяется только полем основной и слабо зависит от других паразитных мод. В рамках этого приближения в [3] получено следующее дискретное отображение, описывающее динамику двух мод в ЛСЭ:

$$\begin{aligned} R^{-1}x_{n+1} - x_n &= L^3 |J_0(y_n)J_1(x_n)|, \\ R^{-1}y_{n+1} - y_n &= L^3 |J_0(x_n)J_1(y_n)|, \end{aligned} \quad (1)$$

где x_n, y_n — приведенные амплитуды основной и паразитной мод; n — дискретное время; R — коэффициент передачи, равный произведению коэффициента отражения от зеркал; L — нормированная длина пространства взаимодействия; J_0 и J_1 — функции Бесселя. В рамках двухмодовой модели возбуждение основной моды в отсутствие конкурента описывается функцией J_1 , а влияние на нее конкурента — функцией J_0 .

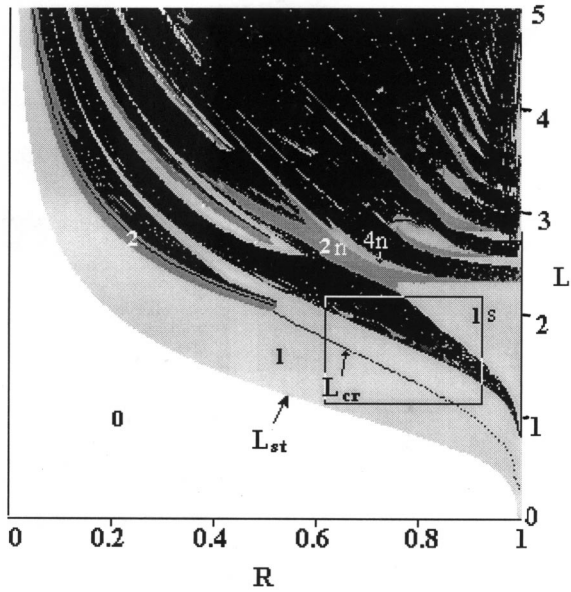


Рис. 1.

Как показано в [3], на плоскости параметров коэффициент передачи R — нормированная длина пространства взаимодействия L существуют две линии: L_{st} — соответствующая значениям параметра L , при которых происходит возбуждение генератора на одной основной моде, и L_{cr} — отвечающая возбуждению паразитной моды. При небольшой надкритичности $L > L_{cr}$ имеет место установившийся режим с генерацией главным образом двух продольных мод.

Соотношение (1), однако, заслуживает более детального изучения. С точки зрения теории динамических систем оно представляет собой дискретное двухпараметрическое двумерное отображение. В настоящей работе приведены результаты исследования этого отображения методами нелинейной динамики.

Карта динамических режимов на плоскости L, R и один ее увеличенный фрагмент приведены на рис. 1, 2. На этих рисунках различными оттенками серого цвета показаны периодические режимы,

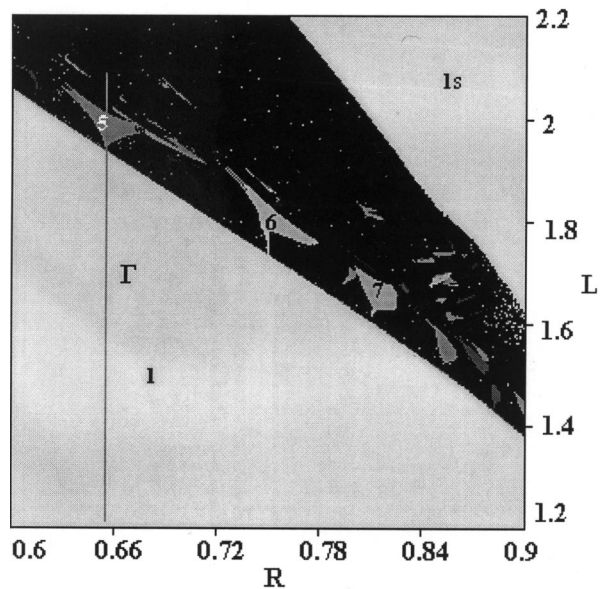


Рис. 2.

цифры означают период реализующегося цикла, а буквы "s" или "n" обозначают соответственно синфазный или несинфазный режим. Компьютерное моделирование выявляет линии L_{st} и L_{cr} , которые в терминах дискретного отображения отвечают следующей смене режимов. При значениях $L < L_{st}$ существует единственная устойчивая неподвижная точка в начале координат фазовой плоскости $x = 0, y = 0$. На линии $L = L_{st}$ она становится неустойчивой, и возникает новая неподвижная точка, для которой $x > 0, y = 0$. При дальнейшем увеличении параметра L от L_{st} до L_{cr} величина x возрастает до определенного значения, и в момент $L = L_{cr}$ мягким образом появляется неподвижная точка, для которой $x > y > 0$. Это соответствует рождению второй паразитной моды.

Нетрудно видеть, однако, что такая картина, предсказанная в работе [3], имеет место лишь в правой части карты динамических режимов, т. е. при достаточно больших значениях коэффициента передачи R . При

небольших значениях R происходит следующее: неподвижная точка с координатами $x > 0$, $y = 0$ претерпевает бифуркацию удвоения периода, причем вторая мода остается по-прежнему невозмущенной, и лишь при дальнейшем увеличении параметра L происходит рождение паразитной моды. Таким образом в области параметров $R < 0.5$ из двух возможных механизмов потери устойчивости одночастотного режима — амплитудного (обусловленного модуляцией одной продольной моды) и частотного (вызванного конкуренцией разных мод) — в исследуемой двухмодовой модели ЛСЭ осуществляется первый.

Рассмотрим теперь поведение отображения (1) при превышении параметром L критического значения L_{cr} .

В области параметра $R < 0.5$ с ростом L на фазовой плоскости x, y происходит рождение двух инвариантных кривых из двух точек, принадлежащих ранее циклу периода 2. (В терминах исходного генератора имеет место автомодуляция рассматриваемых мод с несоизмеримыми частотами). Затем этот "2-тор" разрушается через потерю гладкости с образованием хаотического аттрактора.

Если увеличивать безразмерную длину пространства взаимодействия при $R > 0.5$, то мы обнаруживаем "линию нейтральности", к которой подходят многочисленные языки синхронизации. На увеличенном фрагменте карты на рис. 2 представлены языки, которым отвечают числа вращения $1/5$, $1/6$, $1/7$. При движении по плоскости параметров вдоль линии Γ с ростом параметра L компьютерное моделирование фазовых портретов выявляет синхронизации с образованием цикла периода 5. Затем из каждой из пяти точек цикла рождается инвариантная кривая. При дальнейшем увеличении параметра L на этих кривых образуются "углы" и формируется сложно устроенный аттрактор, для которого ляпуновский показатель положителен. Наконец, при еще большем росте L уже два ляпуновских показателя оказываются положительными, что свидетельствует о наличии в системе гиперхаоса. При движении по плоскости параметров вблизи левой границы языка синхронизации с числом вращения $1/5$ наблюдалась инвариантная кривая, которая теряла гладкость и разрушалась в соответствии с теоремой Афраймовича–Шильникова с образованием хаотического аттрактора.

На карте динамических режимов в ее правой части обнаруживается еще одна область существования устойчивой неподвижной точки. В этом случае реализуется режим синфазных колебаний, когда $x = y$ (т.е. в терминах исходной системы наблюдается генерация основной и пара-

зитной мод с равными амплитудами). На рис. 1 эта область обозначена 1 s. Такой режим при вариации параметров также становится неустойчивым, и происходит удвоение периода. Существенно, что рождающийся 2-цикл является несимметричным. Далее возникает несинфазный 4-цикл, 8-цикл, причем границы областей их устойчивости имеют сложную форму. После этого вновь возникают квазипериодические, хаотические и гиперхаотические режимы.

Отметим, что области гиперхаоса занимают значительную долю плоскости параметров, так что этот режим весьма типичен для отображения (1).

Наше рассмотрение обнаружило тонкие детали и интересные особенности сложных режимов модельного отображения, описывающего динамику ЛСЭ с низкодобротной электродинамической системой. Представленные здесь результаты, особенно карта динамических режимов, могут служить полезным "путеводителем" для компьютерного исследования исходных уравнений в частных производных.

Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову и Д.И. Трубецкову за полезное обсуждение и внимание к работе.

Работа поддержана грантами РФФИ № 97-02-16414 и № 96-15-96921.

Список литературы

- [1] Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. // Релятивистская высокочастотная электроника. Вып. 2. Горький, 1981. С. 101.
- [2] Кузнецов А.П., Широков А.П. // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5. № 6. С. 76.
- [3] Братман В.Л., Савилов А.В. // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2. № 6. С. 27.