01;03

Влияние релаксации вязкости на величину инкремента неустойчивости Тонкса–Френкеля

© *С.О. Ширяева, О.А. Григорьев*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Поступило в Редакцию 20 апреля 1998 г.

Численным анализом дисперсионного уравнения для капиллярных движений вязкоупругой жидкости показано, что величина инкремента неустойчивости заряженной свободной поверхности жидкости существенно растет с увеличением характерного времени релаксации вязких напряжений и величины параметра Тонкса–Френкеля. Сама неустойчивость реализуется в ограниченном диапазоне волновых чисел, ширина которого также определяется величиной параметра Тонкса–Френкеля.

Проведенный ранее [1–3] анализ влияния эффекта релаксации вязкости на закономерности реализации капиллярного движения жидкости с заряженной свободной поверхностью носит преимущественно качественный характер, поскольку проведен либо асимптотическими методами, либо численными, ориентированными на выявление качественных зависимостей. В последнем случае речь идет о способах обезразмеривания дисперсионного уравнения перед проведением численных расчетов. В численном анализе, проведенном в [1–3], частота, инкременты и декременты капиллярных движений жидкости обезразмеривались либо на частоту волновых движений в идеальной жидкости с заряженной свободной поверхностью, либо на характерный декремент затухания капилллярных волн. В обеих ситуациях преследовалась одна цель: уменьшить количество безразмерных физических параметров, характеризующих капиллярные движения жидкости в рассматриваемой системе. В качестве же изменяющегося аргумента искомых комплексных частот использовался безразмерный параметр, зависящих от волнового числа, капиллярного давления и давления электрического поля на свободную поверхность жидкости и через них от физических характеристик жидкости: плотности, капиллярной постоянной, коэффициента поверхностного натяжения, коэффициента вязкости и от поверхностной плотности электрического заряда. Это обстоятельство затруднило выявление в численном анализе [1–3] конкретных зависимостей характеристик капиллярного движения жидкости от таких величин, как волновое число k, параметр Тонкса–Френкеля W. В нижеследующем рассмотрении исследуем вопрос о влиянии волнового числа k, параметра Тонкса–Френкеля W и характерного времени релаксации вязких напряжений в жидкости t_0 на величину инкремента неустойчивости Тонкса–Френкеля.

Рассмотрим задачу о расчете спектра капиллярных движений в идеально проводящей вязкоупругой жидкости бесконечной глубины, находящейся в поле тяжести $\mathbf{g}$ и в нормальном к свободной поверхности электростатическом поле $\mathbf{E}$, индуцирующем на плоской свободной поверхности жидкости поверхностный заряд, однородно распределенный с поверхностной плотностью $\varkappa$. Пусть жидкость имеет плотность ρ, кинематическую вязкость ν и коэффициент поверхностного натяжения σ.

Рассматривая вязкость как функцию частоты в соответствии с формулой Максвелла [4]: $\nu = \nu_0/(1 - i\omega t_0)$, где ω — комплексная частота, и повторяя рассуждения [1–3], несложно получить дисперсионное соотношение для капиллярных движений вязкоупругой жидкости с заряженной свободной поверхностью, в размерном виде [1–3]:

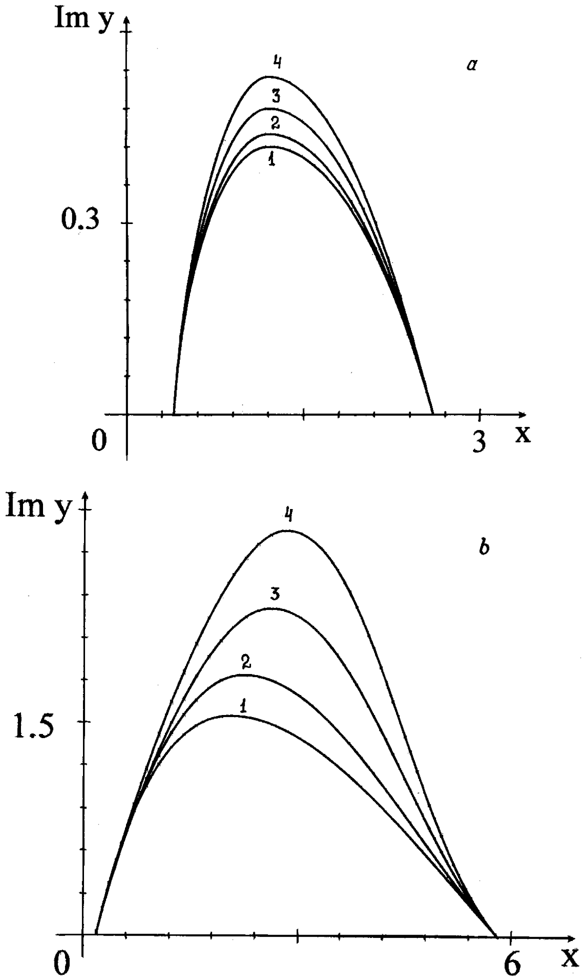
$$\left(\omega + \frac{\nu_0 2ik^2}{(1 - i\omega t_0)}\right)^2 + \frac{4\nu_0^2 k^4}{(1 - i\omega t_0)^2}\sqrt{1 - \frac{i\omega(1 - i\omega t_0)}{\nu_0 k^2}} = \omega_0^2;$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\rho}\left(g\rho + \sigma k^2 - 4\pi\varkappa^2 k\right).$$

Вводя безразмерные переменные:

$$x = ka; \quad a = \sqrt{\sigma/\rho g}, \quad y = \frac{\omega a^2}{\nu_0},$$

$$\tau = \frac{t_0 \nu_0}{a^2}, \quad \beta = \frac{\sigma a}{\rho \nu_0^2}, \quad W = \frac{4\pi\varkappa^2 a}{\sigma},$$



a — зависимость величины безразмерного инкремента неустойчивости заряженной свободной поверхности вязкоупругой жидкости от безразмерного волнового числа, рассчитанная при $W = 3$, $\beta = 1$ и различных значениях характерного безразмерного времени релаксации упругих напряжений: *1* — $\tau = 0.11$, *2* — $\tau = 0.3$, *3* — $\tau = 0.6$, *4* — $\tau = 1$. *b* — зависимость, аналогичная приведенной на рис. 1, *a*, рассчитанная при $W = 6$.

можно переписать дисперсионное уравнение в виде

$$\left[y(1-iy\tau)+2ix^2\right]^2+4x^4\sqrt{1-\frac{iy(1-iy\tau)}{x^2}}$$
$$=\beta x\left[1+x^2-Wx\right](1-iy\tau)^2. \qquad (1)$$

Дисперсионное уравнение (1), обезразмеренное указанным способом, в отличие от ранее использовавшихся способов обезразмеривания (см. [1–3]) содержит параметры W, τ и волновое число x в явном виде, а не опосредованно через более сложные параметры, что позволяет исследовать зависимости от них инкремента неустойчивости свободной поверхности жидкости напрямую.

Зависимости инкрементов неустойчивости, определяемых мнимой положительной компонентой безразмерной частоты от безразмерного волнового числа x, рассчитанные по (1) при $\beta = 1$ и различных значениях величины характерного времени релаксации упругих напряжений в жидкости τ, представлены на рисунке, a (для $W = 3$) и рисунке, b (для $W = 6$). Несложно видеть, что в иссследованном диапазоне значений характерного безразмерного времени релаксации вязкости τ: $0.11 \geqslant \tau \geqslant 1$ — анализируемая зависимость является весьма заметной и достигает стопроцентного прироста величины инкремента для $W = 6$ при τ от $\tau = 0.11$ до $\tau = 1$. Диапазон волновых чисел x, в котором реализуется неустойчивость, не зависит от характерного времени релаксации вязких напряжений τ и определяется лишь величиной параметра Тонкса–Френкеля W, расширяясь с его увеличением как в сторону больших значений волновых чисел (в область капиллярных волн), так и в сторону малых значений волновых чисел (в область гравитационных волн).

Список литературы

[1] *Ширяева С.О., Григорьев О.А.* // ПЖТФ. 1995. Т. 21. N 9. С. 67–71.

[2] *Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 98–105.

[3] *Шиярева С.О., Григорьев О.А., Муничев М.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. N 10. С. 47–62.

[4] *Быковский Ю.А., Маныкин Э.А., Полуэктов П.П.* и др. // ЖТФ. 1976. Т. 46. № 11. С. 2211–2213.