

01;03

Влияние релаксации заряда на капиллярные колебания вязкой заряженной сфероидальной капли

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Послупило в Редакцию 9 февраля 1998 г.)

Выведено дисперсионное уравнение для спектра капиллярных колебаний заряженной сфероидальной капли вязкой жидкости с учетом эффекта релаксации заряда. Показано, что конечность скорости переноса заряда приводит к снижению инкрементов неустойчивости для различных мод капиллярных колебаний сфероидальной капли маловязкой жидкости. С увеличением деформации капли величина абсолютного изменения инкремента, вызванного конечностью скорости перераспределения заряда, снижается.

Задача о капиллярных колебаниях и устойчивости заряженной вязкой капли, имеющей форму вытянутого сфероида, с учетом эффекта релаксации электрического заряда представляет интерес в связи с исследованиями механизма реализации неустойчивости сильно заряженной сферической капли по отношению к собственному заряду. Такой же физический объект, как заряженная капля, встречается в весьма широком круге задач технической физики, геофизики, научного приборостроения и химической технологии. В этой связи изучению капиллярных колебаний и устойчивости заряженной капли, имеющей форму вытянутого сфероида, посвящено значительное количество работ [1–8]. Тем не менее вопрос о влиянии конечности скорости перераспределения заряда в жидкости на закономерности развития неустойчивости сфероидальной капли до сих пор не рассмотрен, хотя такое влияние может быть существенным [9–11].

1. Будем решать в сферической системе координат с началом в центре капли задачу об осесимметричных капиллярных колебаниях в вакууме заряженной вытянутой сфероидальной капли вязкой жидкости конечной проводимости, полагая, что сфероидальность формы капли обусловлена действием неких сторонних сил не электрической природы. Примем, что при колебаниях капли перераспределение электрического заряда происходит только по ее поверхности, в то время как объемная плотность заряда равна нулю. Кроме того, будем полагать, что вещество капли и внешней среды характеризуются постоянными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 .

Решение проведем в безразмерных переменных, в которых радиус исходной сферической формы капли R , плотность жидкости в капле ρ и коэффициент поверхностного натяжения α равны единице $R = 1$, $\rho = 1$, $\alpha = 1$.

Уравнение возмущенной капиллярным волновым движением поверхности вытянутого сфероида в сферических координатах в приближении, линейном по e^2 -квadrату эксцентриситета сфероида, имеет вид

$$r = r(\Theta) + \xi(\Theta, t) \approx 1 + e^2 h(\Theta) + \xi(\Theta, t);$$

$$r(\Theta) = (1 - e^2)^{1/6} (1 - e^2 \cos^2 \Theta)^{-1/2};$$

$$h(\Theta) = \frac{1}{6} (3 \cos^2 \Theta - 1),$$

e — эксцентриситет сфероида; $\xi(\Theta, t)$ — осесимметричное возмущение равновесной сфероидальной поверхности капли, вызванное капиллярными колебаниями, происходящими из-за теплового движения молекул и имеющими амплитуду $\sim \sqrt{kT/\alpha}$ (здесь k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура).

Отметим также, что для большинства жидкостей амплитуда таких тепловых капиллярных колебаний порядка десятых долей нанометра.

Нижеследующий анализ проведем в рамках теории возмущений путем разложения по малым параметрам e^2 и ξ с точностью до членов $\sim \xi$ и $e^2 \xi$, т.е. линейном приближении по ξ . Отметим, что малые параметры e^2 и ξ являются независимыми, причем принимается, что $e^2 \ll \xi$. В этой связи казалось бы, что, сохраняя слагаемые $\sim e^2 \xi$, мы должны учесть и слагаемые $\sim e^4$. Но, как будет видно ниже, вклад в искомое дисперсионное уравнение внесут лишь слагаемые $\sim \xi$ и $e^2 \xi$, а слагаемые $\sim e^2$, e^4 исчезнут при учете кинематического граничного условия (содержащего частную производную по времени). В этой связи удержание в расчетах слагаемых $\sim e^4$ привело бы лишь к неоправданному увеличению громоздкости математической записи проводимых рассуждений.

Зависимости поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, поля давлений $p_1(\mathbf{U}, t)$ внутри жидкости и возмущения свободной поверхности $\xi(\Theta, t)$ от времени t будем принимать экспоненциальными $\sim \exp(st)$, где s — комплексная частота.

Выпишем систему уравнений гидродинамики, описывающих движение вязкой жидкости в капле, вызванное малым возмущением формы ее равновесной поверхности $\xi(\Theta, t)$ и потому характеризующее полем скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, имеющим тот же порядок малости, что и ξ . Система состоит из уравнения Навье-Стокса и условия несжимаемости жидкости [12]

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

ν — коэффициент кинематической вязкости.

Система уравнений электростатики решаемой задачи имеет вид [13]

$$\Delta \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

индекс 1 относится к жидкости, а индекс 2 — к внешней среде; Φ_j — электрические потенциалы.

На возмущенной слабосфероидальной поверхности капли

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - [1 + e^2 h(\Theta) + \xi(\Theta, t)] = 0 \quad (3)$$

должны выполняться граничные условия [10–13]

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla F(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (4)$$

$$(\Pi_\tau^{(2)} - \Pi_\tau^{(1)}) - \nu [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U}] = 0;$$

$$\Pi_\tau^{(j)} = \frac{\varepsilon_j}{4\pi} E_{jn} E_{j\tau}; \quad (5)$$

$$-(p_1 - p_2) + 2\nu \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} - p_E + p_\alpha = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} - \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1 + \operatorname{div}_\Sigma (\mu \mathbf{U}_\tau + \mu b \mathbf{E}_{1\tau}) = 0; \quad \Phi_1 = \Phi_2; \quad (7)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_2 \rightarrow 0; \quad r \rightarrow 0: \quad \Phi_1 \rightarrow \text{const.} \quad (8)$$

Здесь

$$\mu(\Theta, t) = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n})$$

— поверхностная плотность электрического заряда; $\mathbf{E}_j = -\nabla \Phi_j$; \mathbf{U}_τ — касательная к поверхности (3) компонента вектора скорости; $\operatorname{div}_\Sigma \mathbf{A}$ — поверхностная дивергенция; σ — удельная электропроводность жидкости капли; b — подвижность носителей заряда в жидкости; E_n, E_τ — нормальная и касательная компоненты вектора напряженности электрического поля; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — орты нормали и касательной к свободной поверхности; p_2 — давление внешней среды; p_E и p_α — давления электрических сил и сил поверхностного натяжения. Потребуем также выполнения условий: постоянства объема капли

$$\int_V dV = \frac{4}{3} \pi, \quad (9)$$

неподвижности ее центра масс

$$\int_V \mathbf{r} dV = 0, \quad (10)$$

сохранения полного заряда капли Q при колебаниях ее поверхности

$$\int_S \mu(\Theta, t) dS = Q. \quad (11)$$

В (9), (10) интегрирование ведется по всему объему капли, а в (11) — по поверхности капли.

2. В линейном по \mathbf{U} и ξ приближении уравнения (1) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla(p_1(\mathbf{U}, t)) + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (12)$$

где $p_1(\mathbf{U}, t)$ — добавка к давлению внутри жидкости, имеющая первый порядок малости по U (т.е. по ξ).

Отметим, что при решении в приближении первого порядка малости по U и ξ линеаризованные граничные условия (4)–(7) достаточно взять на невозмущенной поверхности сфероидальной капли $r = r(\Theta) \approx 1 + e^2 h(\Theta)$.

Перепишем условия (4)–(6) в терминах проекций вектора скорости $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ на орты сферической системы координат $(U_r, U_\Theta, U_\varphi)$. В результате кинематическое граничное условие (4) примет вид

$$r = r(\Theta): \quad -\frac{\partial \xi(\Theta, t)}{\partial t} + U_r + U_\Theta e^2 \sin \Theta \cos \Theta = 0. \quad (13)$$

Динамическое граничное условие для касательной составляющей тензора напряжений (5) распадается на два, поскольку в плоскости, касательной к поверхности капли в данной точке, можно выбрать два взаимно перпендикулярных орта: $\boldsymbol{\tau}_\varphi$ и $\boldsymbol{\tau}_\Theta$. В результате из (5) получим условия, 1) когда в качестве орта касательной выбран орт $\boldsymbol{\tau}_\varphi$

$$r = r(\Theta): \quad \left(\pi_{\tau_\varphi}^{(2)} - \Pi_{\tau_\varphi}^{(1)} \right) - \nu \left\{ \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\varphi + e^2 \sin \Theta \cos \Theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \Theta} - \frac{1}{r} \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} U_\varphi \right] \right\} = 0; \quad (14)$$

2) когда в качестве орта касательной выбран орт $\boldsymbol{\tau}_\Theta$

$$r = r(\Theta): \quad \left(\pi_{\tau_\Theta}^{(2)} - \Pi_{\tau_\Theta}^{(1)} \right) - \nu \left\{ \frac{\partial U_\Theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \Theta} - \frac{1}{r} U_\Theta + e^2 2 \sin \Theta \cos \Theta \left[\frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\Theta}{\partial \Theta} - \frac{\partial U_r}{\partial r} \right] \right\} = 0. \quad (15)$$

Граничное условие (6) для нормальной компоненты тензора напряжений примет вид

$$r = r(\Theta): \quad \left\{ -p_1(\mathbf{U}, t) + 2\nu \left[\frac{\partial U_r}{\partial r} + e^2 \sin \Theta \cos \Theta \left(\frac{\partial U_\Theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \Theta} \right) \right] - p_E(\xi) + p_\alpha(\xi) \right\} = 0, \quad (16)$$

где $p_E(\xi), p_\alpha(\xi)$ — добавки к соответствующим давлениям, имеющие первый порядок малости по ξ .

Так как в (9), (10) интегрирование выполняется по всему объему капли, то в линейном по ξ приближении эти условия можно записать в виде

$$\int_0^\pi \xi(\Theta, t) \sin \Theta d\Theta = 0; \quad (17)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \xi(\Theta, t) \mathbf{e}_r \sin \Theta d\Theta d\varphi = 0. \quad (18)$$

Таким образом, система векторных гидродинамических уравнений (12) с граничными условиями (13)–(16) и дополнительными условиями (17), (18), а также система уравнений (2) для электрических потенциалов с граничными условиями (7), (8) и дополнительным условием (11) представляют собой полную математическую формулировку поставленной задачи.

3. Будем решать сформулированную задачу методом скаляризации, подробно изложенным в [14], обобщая его в линейном по квадрату эксцентриситета приближении на случай наимпростейшей для сферической системы координат сфероидальной области [6]. Для этого представим поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ в виде разложения

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{N}}_1 \Phi_1(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_2 \Phi_2(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_3 \Phi_3(\mathbf{r}, t), \quad (19)$$

где $\Phi_k(\mathbf{r}, t)$ — скалярные функции; $\hat{\mathbf{N}}_k$ — дифференциальные векторные операторы, имеющие в сферической системе координат вид

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \cdot \mathbf{r}; \quad \hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{r}).$$

Учитывая разложение (19), несложно систему векторных уравнений (12) для функций $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, а $p_1(\mathbf{U}, t)$ привести к системе скалярных уравнений для скалярных функций $\Phi_k(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta \Phi_k(\mathbf{r}, t) - \frac{s}{\nu} (1 - \delta_{k1}) \Phi_k(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (k = 1, 2, 3);$$

$$p_1(\mathbf{U}, t) = -s \Phi_1(\mathbf{r}, t), \quad (20)$$

δ_{kj} — символ Кронекера.

Перепишем в терминах скалярных функций $\Phi_k(\mathbf{r}, t)$ и граничные условия (13)–(16): кинематическое граничное условие

$$r = r(\Theta): \quad s\xi \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \Delta_{\Omega} \Phi_3 \right] - e^2 \sin \Theta \cos \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[\frac{\Phi_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi_3) \right] = 0; \quad (21)$$

динамические граничные условия для касательных компонент тензора напряжений

$$\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \left(\Pi_{\tau\varphi}^{(2)} - \Pi_{\tau\varphi}^{(1)} \right) + \nu \left\{ \Delta_{\Omega} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} - \Phi_2 \right] + e^2 \left[h(\Theta) \Delta_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + 3\Phi_2 \right) - \frac{2}{3} \Delta_{\Omega}(\Phi_2) - \sin \Theta \cos \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} - (3 + \Delta_{\Omega}) \Phi_2 \right) \right] \right\} = 0; \quad (22)$$

$$\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \left(\Pi_{\tau\Theta}^{(2)} - \Pi_{\tau\Theta}^{(1)} \right) + \nu \left\{ \Delta_{\Omega} \left[2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \Phi_1 \right) + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} - (2 + \Delta_{\Omega}) \Phi_3 \right] - e^2 \left(h(\Theta) \left[2(6 - \Delta_{\Omega}) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - 4(3 - \Delta_{\Omega}) \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - 16 \Delta_{\Omega} \Phi_1 - \Delta_{\Omega} \left(\frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r^3} + (22 - \Delta_{\Omega}) \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} - 2(4 - \Delta_{\Omega}) \Phi_3 \right) \right] + \sin \Theta \cos \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[2 \left(2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - 3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \Delta_{\Omega} \Phi_1 \right) + \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r^3} - (6 + 5 \Delta_{\Omega}) \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} + 4 \Delta_{\Omega} \Phi_3 \right] + 2 \cos^2 \Theta \Delta_{\Omega} \left[\Phi_1 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} + \Phi_3 \right] \right\} = 0; \quad (23)$$

динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений

$$r = r(\Theta): \quad s \Phi_1 + 2\nu \left\{ \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - \Delta_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi_3}{r} \right) \right) \right] + e^2 \sin \Theta \cos \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{\Phi_1}{r^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi_3}{r} \right) - \Delta_{\Omega} \left(\frac{\Phi_3}{r^2} \right) \right] \right\} - p_E(\xi) + p_{\alpha}(\xi) = 0;$$

$$\Delta_{\Omega} \equiv \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right). \quad (24)$$

Из вида уравнений (20) ясно, что в сферической системе координат зависимость функций $\Phi_k(\mathbf{r}, t)$ от угла Θ определяется сферическими функциями $Y_m^0(\Theta)$. Поэтому решения системы (20), регулярные в точке $r = 0$, запишутся в виде

$$\Phi_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^1 r^m Y_m^0(\Theta) \exp(st);$$

$$\Phi_{2,3}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{2,3} i_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} r \right) Y_m^0(\Theta) \exp(st), \quad (25)$$

$i_m(x)$ — модифицированные сферические функции Бесселя, C_m^k — константы.

Поскольку функция $\xi(\Theta, t)$ связана с функциями $\Phi_k(\mathbf{r}, t)$ кинематическим граничным условием, то логично и ее представить в виде разложения по сферическим функциям

$$\xi(\Theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m Y_m^0(\Theta) \exp(st), \quad (26)$$

$C_m^1, C_m^{2,3}$, и Z_m — константы.

Дополнительные условия (17), (18) позволяют уточнить пределы изменения индекса m в разложениях (25), (26). Проектируя (18) на оси декартовой системы координат, из (17) и (18) несложно найти, что $Z_0 = Z_1 = 0$. Поэтому и в разложениях (25), (26) минимальным значением индекса m должно быть значение $m = 2$.

4. Связь неизвестных констант C_m^k ($k = 1, 2, 3$) в разложениях (25) с коэффициентами Z_m разложения функции возмущения $\xi(\Theta, t)$, а также выражение для комплексной частоты капиллярных колебаний s определяются из граничных условий (21)–(24).

Прежде всего отметим, что в случае осесимметричных колебаний граничное условие (22) для функций $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$ полностью автономно, т.е. не содержит больше никакую другую неизвестную функцию, т.е. функция $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$ не влияет на колебания поверхности капли и поэтому в дальнейшем рассматриваться не будет. Сосредоточим свое внимание на граничных условиях (21), (23), (24) для функций $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_3(\mathbf{r}, t)$, $\xi(\Theta, t)$.

Подставим решения (25) и (26) в условие (21) и, используя рекуррентные соотношения для $i_m(x)$ и $Y_m^0(\Theta)$ [15], ортонормированность сферических функций и пренебрегая взаимодействием мод капиллярных колебаний, в линейном по e^2 приближении получим уравнение вида

$$C_m^1 \left[m + e^2 \varkappa_m \gamma_1 \right] + D_m^3 \left(m(m+1) + e^2 \varkappa_m \left[m(m+1) \gamma_1 + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \gamma_2 \right] \right) - s Z_m = 0. \quad (27)$$

Прежде чем преобразовать граничные условия (23), (24), необходимо рассмотреть электрическую краевую задачу (2), (7), (8), (11). Решение этой задачи искалось методом разложения потенциалов Φ_j , граничных условий (7), (8) и дополнительного условия (11) по малым величинам $\sim e^2$, ξ и $e^2 \xi$. При рассмотрении условия перераспределения заряда по поверхности капли (7), использовались решения для гидродинамических потенциалов $\Phi_j(\mathbf{r}, t)$ ($j = 1, 2, 3$) в виде (25). В результате весьма громоздких расчетов удалось получить решение для электрических потенциалов и, используя их, выписать электрическую часть касательной компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \left(\Pi_{\tau_\Theta}^{(2)} - \Pi_{\tau_\Theta}^{(1)} \right) \\ & \approx 4W \frac{m}{L_m} \left\{ \varepsilon_2 (m+1) \left[m(m+1) + e^2 \varkappa_m g_m^2(\lambda) \right] C_m^1 \right. \\ & + \varepsilon_2 (m+1) \left[m(m+1)^2 + e^2 \varkappa_m \left(\gamma_2 \frac{s}{\nu} + g_m^3(\lambda) \right) \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) m(m+1) (1 + e^2 \varkappa_m \zeta_m(\lambda)) \right] D_m^3 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left[(m^2 - 1) \lambda_2 + e^2 \varkappa_m (m+1) g_m^1(\lambda) \right] Z_m \left. \right\} \\ & \times Y_m^0(\Theta) \exp(st) \end{aligned} \quad (28)$$

и выражение для добавки к давлению электрических сил

$$\begin{aligned} p_E(\xi) \Big|_{r=r(\Theta)} & \approx \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{L_m} \left\{ \left[m(m-1) \left(\lambda_1 + (m+1) \right. \right. \right. \\ & \times 4b\sqrt{\pi\varepsilon_2 W} \left. \left. \left. \right) + e^2 \varkappa_m \left((m-4)L_m - 3(m-1)\lambda_2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (m+1)g_m^{(1)}(\lambda) \right) \right] Z_m + \varepsilon^2 (m+1) \left[m(m+1) \right. \right. \\ & \left. \left. + e^2 \varkappa_m (3m + g_m^{(2)}(\lambda)) \right] C_m^1 + \varepsilon_2 (m+1) \left[m(m+1) \right. \right. \\ & \times \left((m+1) + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \right) + e^2 \varkappa_m \left(\gamma_2 \frac{s}{\nu} + 3m(m+1) \right. \\ & \left. \left. + g_m^{(3)}(\lambda) + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) (3m + m(m+1)\zeta_m(\lambda)) \right) \right] D_m^3 \left. \right\} \\ & \times Y_m^0(\Theta) \exp(st). \end{aligned} \quad (29)$$

Используя выражение (28) и подставляя решения (25), (26) в динамическое граничное условие для касательной компоненты тензора напряжений (23), получим

$$\begin{aligned} & C_m^1 \left\{ 2(m-1)\nu + 4W\varepsilon_2 \frac{m(m+1)}{L_m} \right. \\ & \left. + e^2 \varkappa_m \left[\beta_1 \nu + 4W\varepsilon_2 \frac{1}{L_m} g_m^{(2)}(\lambda) \right] \right\} + D_m^3 \left\{ \left[s + 2(m^2 - 1)\nu \right. \right. \\ & \left. \left. + 4W\varepsilon_2 \frac{m(m+1)^2}{L_m} \right] - \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \left[2\nu - 4W\varepsilon_2 \frac{m(m+1)}{L_m} \right] \right. \\ & \left. + e^2 \varkappa_m \left[\beta_2 s + \beta_3 \nu + 4W\varepsilon_2 \frac{1}{L_m} \left(\gamma_2 \frac{s}{\nu} + g_m^{(3)}(\lambda) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \left[\beta_4 s + \beta_3 \nu + 4W\varepsilon_2 \frac{1}{L_m} m(m+1) \zeta_m(\lambda) \right] \right] \right\} \\ & - \frac{4W}{L_m} \left\{ (m-1)\lambda_2 + e^2 \varkappa_m g_m^{(1)}(\lambda) \right\} Z_m = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Чтобы выписать динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений, необходимо воспользоваться выражениями для добавки к давлению электрических сил $p_E(\xi)$ (29) и добавки к давлению сил поверхностного натяжения $p_\alpha(\xi)$, имеющей для осесимметричного случая вид [7]

$$\begin{aligned} p_\alpha(\xi) & \approx \sum_{m=2}^{\infty} \left[(m-1)(m+2) + e^2 2(m^2 + m + 4) \varkappa_m \right] \\ & \times Z_m Y_m^0(\Theta) \exp(st). \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя (25), (29), (31) в (24), получим

$$\begin{aligned}
& C_m^4 \left\{ \left[s + \gamma_3 \nu - 4W\varepsilon_2 \frac{m(m+1)^2}{L_m} \right] + e^2 \varkappa_m \left[ms + \gamma_4 \nu \right. \right. \\
& \left. \left. - 4W\varepsilon_2 \frac{(m+1)}{L_m} \left(3m + g_m^{(2)}(\lambda) \right) \right] \right\} + D_m^3 \left\{ m(m+1) \right. \\
& \times \left[2(m-1)\nu - 4W\varepsilon_2 \frac{(m+1)^2}{L_m} \right] + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \\
& \times m(m+1) \left[2\nu - 4W\varepsilon_2 \frac{(m+1)}{L_m} \right] + e^2 \varkappa_m \left[2s\gamma_2 \right. \\
& \left. + (m+1)\gamma_4 \nu - 4W\varepsilon_2 \frac{(m+1)}{L_m} \left(\gamma_2 \frac{s}{\nu} + 3m(m+1) \right) \right. \\
& \left. + g_m^{(3)}(\lambda) - \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \left(2\gamma_5 \nu + 4W\varepsilon_2 \frac{m(m+1)}{L_m} \right) \right. \\
& \left. \times \left(3 + (m+1)\zeta_m(\lambda) \right) \right] \right\} + Z_m \left\{ (m-1)(m+2) \right. \\
& \times \left[1 - \frac{4W}{(m+2)} \frac{m}{L_m} \left(\lambda_1 + (m+1)4b\sqrt{\pi\varepsilon_2 W} \right) \right] \\
& \left. - e^2 \varkappa_m \left[\gamma_6 + 4W(m-4) - 4W \frac{1}{L_m} \left(3(m-1)\lambda_2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + (m+1)g_m^{(1)}(\lambda) \right) \right] \right\} = 0. \quad (32)
\end{aligned}$$

В выражениях (27)–(32) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) &\equiv \frac{i_{m+1} \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)}{i_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right)}; & D_m^3 &\equiv C_m^3 i_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right); \\
\lambda_1 &\equiv s\varepsilon_1 + 4\pi\sigma; \\
\lambda_2 &\equiv s\varepsilon_2; & W &\equiv \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_2}; \\
L_m &\equiv m\lambda_1 + (m+1)\lambda_2 + m(m+1)4\sqrt{\pi\varepsilon_2 W} b; \\
\varkappa_m &\equiv \frac{m(m+1)}{3(2m-1)(2m+3)}; \\
\beta_1 &= 2 \left(m^2 - 3m - 1 + \frac{3}{m} \right); & \beta_2 &= (m-2) \left(1 - \frac{3}{m(m+1)} \right); \\
\beta_3 &= 2 \left(m^3 - 2m^2 - 4m + 2 + \frac{3}{m} \right); & \beta_4 &= \left(1 - \frac{3}{m(m+1)} \right); \\
\beta_5 &= 2(m^2 + m - 1) + \frac{6}{m(m+1)}; \\
\gamma_1 &= m(m-1) - 3; & \gamma_2 &= m(m+1) - 3; & \gamma_3 &= 2m(m-1); \\
\gamma_4 &= 2(m^3 - 3m^2 - 4m + 3); \\
\gamma_5 &= 4m(m+1) - 3; & \gamma_6 &= 2(m(m+1) + 4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_m^{(1)}(\lambda) &= \lambda_2 \left[(m-4) + (m-1)\zeta_m(\lambda) \right]; \\
g_m^{(2)}(\lambda) &= m(m+1) \left[(m+2) + \zeta_m(\lambda) \right] - 6; \\
g_m^{(3)}(\lambda) &= m(m+1)^2 \left[m + \zeta_m(\lambda) \right]; \\
\zeta_m(\lambda) &= \frac{3}{L_m} (\lambda_1 - \lambda_2).
\end{aligned}$$

Приравнявая нулю определитель системы уравнений (27), (30), (32), получим дисперсионное уравнение решаемой задачи в линейном по e^2 приближении

$$\begin{aligned}
& s \left\{ s^2 + 2(m-1)(2m+1)\nu s + m(m-1)(m+2)\alpha_m \right\} \\
& - \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \left\{ \left(2\nu - m(m+1) \frac{4W}{L_m} \right) \right. \\
& \times \left(s^2 + 2m(m-1)(m+2)\nu s + m(m-1)(m+2)\alpha_m \right) \\
& \left. + \frac{4W}{L_m} 2\nu m(m^4 - 1)s \right\} + e^2 \varkappa_m \left\{ s \left(\left[s^2 + m(m-1)(m+2)\alpha_m \right] \right. \right. \\
& \times \left[2(m-1) - \frac{3(m-2)}{m(m+1)} + \left(1 - \frac{3}{m(m+1)} \right) \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \right] \\
& \left. - 3 \left[(2m-1)(m+2)\alpha_m + m^3 \right] \right\} + \frac{4W}{L_m} \left\{ \frac{s}{\nu} \left(m(m+1) \right. \right. \\
& \left. \left. - 3 \right) \left[s^2 + m(m-1)(m+2)\alpha_m \right] + 2 \left(m(m+1) - 3 \right) \right. \\
& \times \left[2m(m-2)s - m(m-1)(m+1)(m+2)\alpha_m \right] \\
& \left. - \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \left(s^2(m^2 - 2m - 3) + 4m^2(m+1) \right) \right. \\
& \times \left(m^2 + m + 1 \right) - 4Wm^2(m+1)(m+2) \\
& \left. - \zeta_m(\lambda)m(m+1) \left(m(m-1)(m+2)\alpha_m + s^2 \right) \right\} \\
& + 2\nu \left[s^2 \left(2m^3 - 8m^2 + m - 1 + \frac{3}{m} - \frac{3(m-2)(m-1)}{(m+1)} \right) \right. \\
& \left. + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \left[s^2 \left(2m^2 - m - 4 + \frac{3(2m+1)}{m(m+1)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \left(m^2 + \frac{(m-1)}{(m+1)} \right) (m+2)\alpha_m + 3m^3 \right] \right] \\
& - 2\nu s \frac{4W}{L_m} \left\{ 2(m+1) \left[m(m+1) - 3 \right] \left[2m^2 - m - 1 \right] \right. \\
& \left. + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \left(m(m+1)(m-1)(8m+5) - 9(m-1) \right. \right. \\
& \left. \left. - \zeta_m(\lambda)m(m+1)(m-1)(2m-1) \right) \right\} + 4\nu^2 s \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_m \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \\
& \times \left[5m^3 + 5m^2 - 4m - \frac{6}{(m+1)} \right] \left. \right\} = 0. \quad (33)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\alpha_m \equiv 1 - \frac{4}{(m+2)} W.$$

Положив в (33) $e^2 = 0$, т.е. отбросив всю фигурную скобку, получим дисперсионное уравнение для частот колебаний заряженной сферической капли вязкой жидкости конечной проводимости [10].

В нижеследующем изложении при численном анализе уравнения (33) будем принимать $\varepsilon_2 = 1$ и положим $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon$.

Качественный вид движений жидкости (ветвей дисперсионного уравнения), полученных численным расчетом по (33), при ненулевом эксцентриситете мало отличается от полученных для сферической капли [10] и проиллюстрирован рис. 1, где в виде зависимостей $Re s(W)$ и $Im s(W)$ представлен общий вид ветвей дисперсионного уравнения (33) для основной моды капли плохо проводящей жидкости ($m = 2; e^2 = 0.1; \nu = 0.03; \sigma = 0.1; \varepsilon = 10; b = 0.1$). Кривые 1-3 определяют капиллярные движения жидкости в капле; кривые 1-Р, 2-Р, 3-Р характеризуют релаксационно-конвекционные затухающие движения, вызванные переносом заряда за счет выравнивания электрического потенциала и его переносом потоками жидкости. Кривая 1-КП характеризует капиллярно-полоидальное затухающее периодическое движение жидкости, появляющееся при взаимодействии

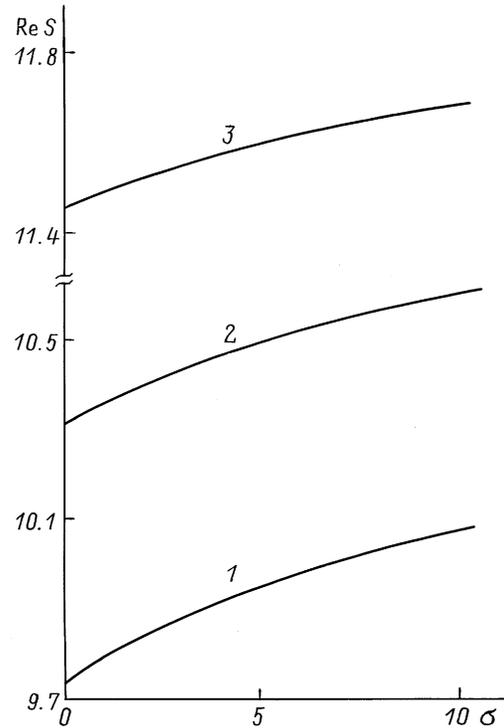


Рис. 2. Зависимость величины инкремента неустойчивости десятой моды от безразмерной электропроводности жидкости.

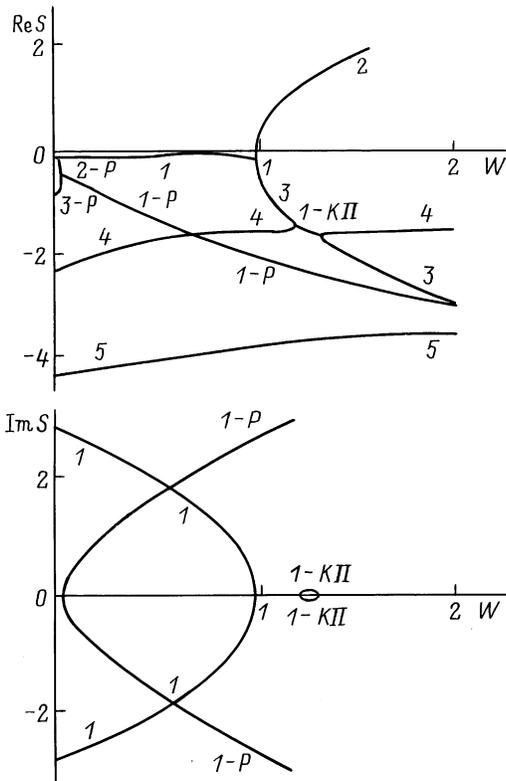


Рис. 1. Зависимости вещественной и мнимой компонент комплексной частоты от безразмерного параметра W , характеризующего устойчивость капли по отношению к собственному заряду.

ветви 3 затухающего гармонически-капиллярного движения с ветвью 4 затухающего вихревого полоидального. Интересно отметить, что взаимодействие гармонически-капиллярного движения с полоидальным проявилось только при учете эффекта релаксации заряда, а для идеально проводящей жидкости эти два вида движений не взаимодействуют [16]. Кривые 4 и 5 характеризуют аperiodические затухающие полоидальные движения (на самом деле полоидальных вихревых движений имеется бесчисленное множество [10,16], но на рисунке приведены лишь те, декременты затухания которых попали на плоскость $(Re s, W)$ в принятом масштабе). Вещественная часть кривой 2 в области $Re s > 0$ характеризует инкремент неустойчивости капли по отношению к собственному заряду.

Как показали численные расчеты, учет конечности величины электропроводности жидкости и подвижности носителей заряда приводит к уменьшению инкремента неустойчивости по сравнению с идеальнопроводящей жидкостью, для которой эти величины бесконечно велики. Для маловязких жидкостей $\nu \ll 1$ качественные зависимости величины инкремента неустойчивости от величины проводимости и подвижности носителей заряда для ненулевого эксцентриситета сходны с аналогичными зависимостями для сферической капли [10]. На рис. 2 представлены зависимости величины инкремента неустойчивости десятой моды ($m = 10$) от электропроводности σ для жидкости типа дибутилфталата ($b = 0.1, \varepsilon = 10, \nu = 0.1, W = 4$) при различных

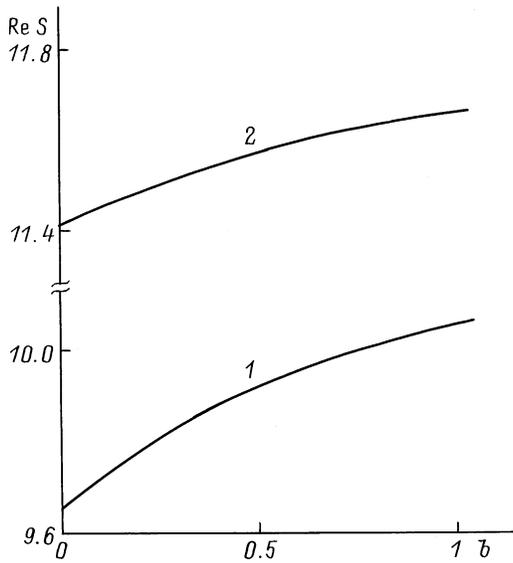


Рис. 3. Зависимость величины инкремента неустойчивости десятой моды от безразмерной подвижности носителей заряда в жидкости.

значениях квадрата эксцентриситета (кривая 1 получена для $e^2 = 0$, кривая 2 — для $e^2 = 0.1$, кривая 3 — для $e^2 = 0.5$). Видно, что рост σ приводит к увеличению инкремента неустойчивости. Причем несложно заметить, что с ростом величины квадрата эксцентриситета величина абсолютного изменения инкремента уменьшается. Аналогичные тенденции отмечаются и при изменении подвижности носителей заряда, что видно из рис. 3 ($m = 10$, $\sigma = 0.1$, $\varepsilon = 10$, $\nu = 0.1$, $W = 4$; кривая 1 соответствует $e^2 = 0$, кривая 2 — $e^2 = 0.5$): при увеличении эксцентриситета величина абсолютного изменения инкремента уменьшается, т.е. с ростом величины деформации ослабляется влияние эффекта конечности скорости выравнивания потенциала, проявляющегося в увеличении времени развития неустойчивости. Подобное явление на качественном уровне можно объяснить уменьшением средней поверхностной плотности заряда при деформации капли и изменением характерных расстояний, на которые должен переноситься заряд для выравнивания электрического потенциала.

Численные расчеты также показывают, что большой вязкости (при $\nu = 0.8$) учет конечности электропроводности и подвижности носителей заряда для деформированной капли приводит к зависимостям противоположным по отношению к представленным на рис. 2 и 3: с увеличением σ и b инкремент неустойчивости той же десятой моды уменьшается. По-видимому, это связано с тем, что механические напряжения, возникающие при перераспределении заряда по поверхности хорошо проводящих жидкостей, характеризуются весьма малыми релаксационными временами и при больших вязкостях эффективно гасятся вязкостью, не реализуясь в увеличении инкремента неустойчивости соответству-

ющей моды, но приводя к дополнительной диссипации энергии капиллярных движений жидкости.

При ненулевом эксцентриситете увеличение диэлектрической проницаемости жидкости также приводит к снижению инкремента неустойчивости сфероидальной капли.

Интересно также выяснить, как зависят инкременты неустойчивости нескольких первых мод капиллярных колебаний сфероидальных капель у различных жидкостей от величины эксцентриситета. На рис. 4 представлены зависимости величины инкремента неустойчивости от квадрата эксцентриситета для второй, шестой, десятой и двенадцатой мод (кривые на рисунке соответствуют номерам мод) для хорошо проводящей жидкости типа морской воды, которой соответствуют безразмерные величины $\sigma = 10^5$, $b = 1$, $\varepsilon = 80$, $\nu = 0.1$ при $W = 4$ (критическое для реализации неустойчивости капли, т.е. для потери устойчивости основной модой, значение параметра Рэлея $W = 1$). На рис. 5 зависимости, аналогичные приведенным на рис. 4, рассчитаны для плохо проводящей жидкости типа дибутилфталата ($\sigma = 0.1$, $b = 0.1$, $\varepsilon = 10$; $\nu = 0.1$ при $W = 4$). Из приведенных графиков видно, что с ростом e^2 величина инкремента основной моды уменьшается (что, вообще говоря, согласуется с принципом Ле Шателье). Для более высоких мод рост e^2 приводит к увеличению инкрементов за счет увеличения поверхностной плотности заряда на вершинах сфероида [4]. Численные расчеты, проведенные при различных малых значениях безразмерной

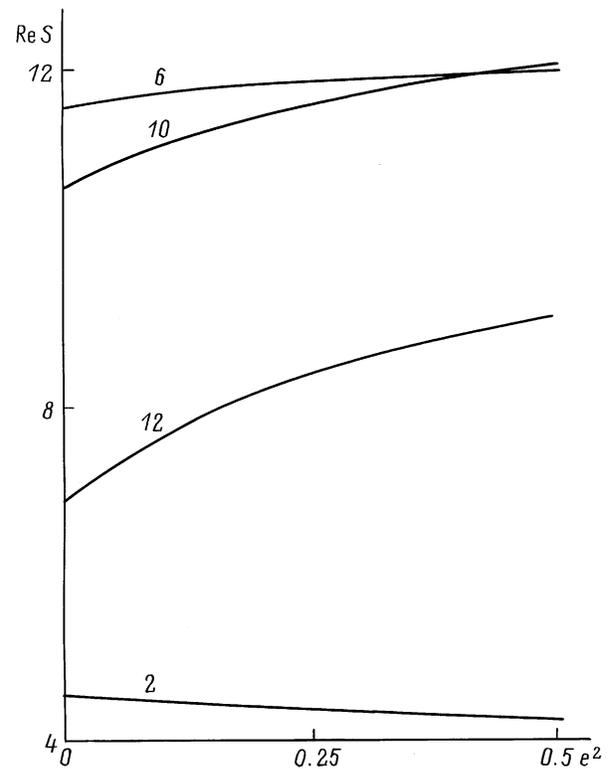


Рис. 4. Зависимости величины инкремента различных мод от величины квадрата эксцентриситета.

вязкости, показывают, что для малых вязкостей влияние конечности скорости переноса заряда слабее сказывается на величине инкремента неустойчивости различных мод, чем для сильно вязких жидкостей.

При больших значениях вязкости демпфирующее влияние вязкости наиболее сильно сказывается на быстрых движениях жидкости (вызванных большими инкрементами высоких мод). Это приводит к тому, что время развития неустойчивости для малых мод становится меньше времени развития неустойчивости высоких мод, в результате чего в отличие от механизма распада с эмиссией сотен высокодисперсных дочерних капелек, описанного в [4], капля приобретает тенденцию к распаду на несколько частей сравнимых размеров [17]. При малых значениях эксцентриситета $e^2 < 0.1$ такая тенденция у плохо проводящей жидкости выражена более сильно, чем у хорошо проводящей. При большом значении эксцентриситета, напротив, тенденция к делению капли на части сравнимых размеров выражена более сильно у хорошо проводящей жидкости. Это видно из рис. 6, где приведены результаты расчетов для двенадцатой моды ($m = 12$) при $W = 4$; $\nu = 0.1$ для различных жидкостей, используемых в экспериментах по электродиспергированию жидкости [18]: кривая 1 соответствует жидкости типа морской воды ($\sigma = 10^5$, $b = 1$, $\epsilon = 80$); кривая 2 — жидкости типа глицерина ($\sigma = 50$, $b = 0.1$, $\epsilon = 50$); кривая 3 — жидкости типа этилового спирта ($\sigma = 10$, $b = 0.1$, $\epsilon = 25$); кривая 4 — жидкости типа дистиллированной воды ($\sigma = 1$, $b = 1$, $\epsilon = 80$);

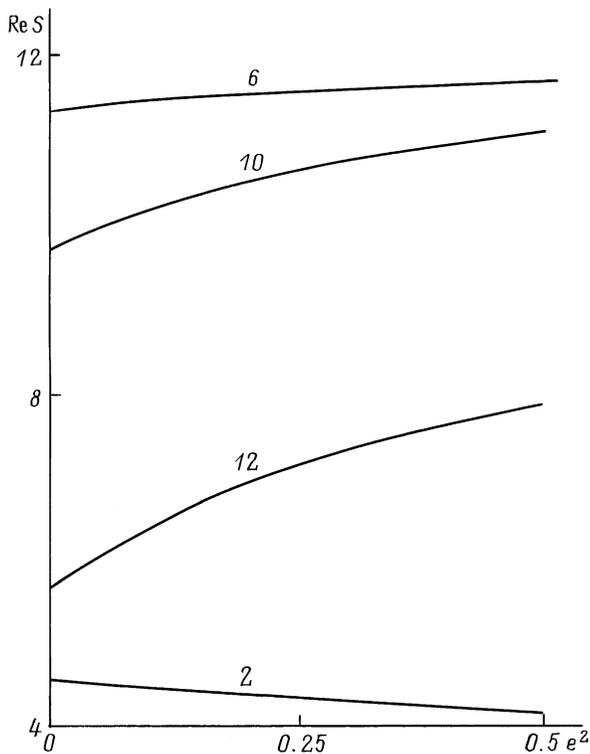


Рис. 5. Зависимости, аналогичные приведенным на рис. 4, но при других значениях σ , b и ϵ .

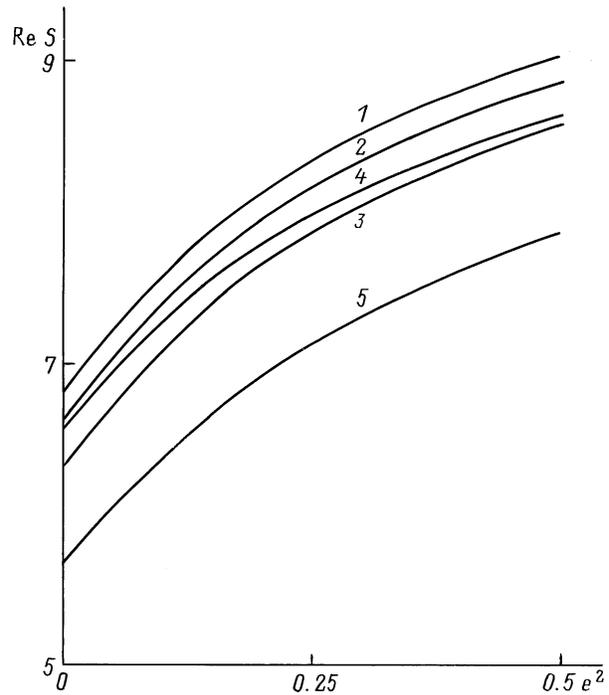


Рис. 6. Зависимости величины инкремента неустойчивости двенадцатой моды от величины квадрата эксцентриситета для различных жидкостей.

кривая 5 — жидкости типа дибутилфталата ($\sigma = 0.1$, $b = 0.1$, $\epsilon = 10$).

Следует отметить, что диапазон изменения e^2 от 0 до 0.5, использованный при построении графиков на рис. 2–6, взят только для наглядности и качественного предсказания возможного поведения инкрементов при увеличении сфероидальной деформации, так как уравнение (33) получено для области $e^2 \ll 1$, поэтому зависимости, соответствующие большим значениям эксцентриситета, имеют качественный характер.

Заключение

Для вытянутой сильно заряженной сфероидальной капли маловязкой жидкости учет конечности скорости выравнивания электрического потенциала приводит к снижению инкрементов неустойчивости. С увеличением деформации капли величина абсолютного изменения инкремента, вызванного конечностью скорости перераспределения заряда, снижается. Для капель сильно вязких жидкостей отмечается другая тенденция. Механические напряжения, возникающие при перераспределении заряда по поверхности хорошо проводящих жидкостей, характеризуются весьма малыми характерными релаксационными временами и в сильно вязких жидкостях эффективно гасятся, лишь в малой степени реализуясь в изменении инкремента неустойчивости соответствующей моды.

Автор выражает благодарность В.А. Коромыслову и М.И. Муничеву за помощь в численных расчетах.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
- [2] Cheng K.J. // Phys. Lett. 1985. Vol. 112A. N 11. P. 392–396.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [5] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ПЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 16. С. 17–21.
- [6] Ширяева С.О. // ПЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 4. С. 84–88.
- [7] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 12–20.
- [8] Коромыслов В.А., Рахманова Ю.Д., Ширяева С.О. // ПЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 14. С. 40–43.
- [9] Melcher J.R., Smith C.V. // Phys. Fluids. 1969. Vol. 12. N 4. P. 778–790.
- [10] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 107–118.
- [11] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 8. С. 34–41.
- [12] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [13] Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 539 с.
- [14] Ширяева С.О., Лазаряц А.Э. и др. Препринт ИМРАН. Ярославль. 1994. № 27. 126 с.
- [15] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [16] Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 7. С. 1–8.
- [17] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д. // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 2. С. 1–10.
- [18] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 3. С. 13–23.