

01;03;12

## Сверхсферическая кумуляция. Сходящиеся ударные волны, интенсивность которых нарастает быстрее, чем при сферической кумуляции

© П.А. Войнович<sup>1</sup>, М.О. Мдивнишвили<sup>2</sup>, И.В. Соколов<sup>3</sup>, М.И. Тактакишвили<sup>2</sup><sup>1</sup> Центр перспективных технологий и разработок,

194156 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Институт физики АН Грузии,

380077 Тбилиси, Грузия

<sup>3</sup> Институт общей физики РАН,

117942 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 14 октября 1996 г.)

Экспериментально, численно и теоретически исследовано течение газа, созданное импульсным сильно-точным разрядом в осесимметричной полости, которая ограничена сферической линзой, соприкасающейся с плоской пластинкой. Показано, что возникающая при разряде и сходящаяся к оси ударная волна ускоряется и усиливается по мере схождения. Интенсивность ударной волны нарастает быстрее, чем для случая сферической сходящейся ударной волны.

### Введение

Нестационарные течения со сходящимися ударными волнами (УВ) уже много лет привлекают внимание исследователей. Когда площадь фронта сходящейся УВ уменьшается во времени и обращается в нуль, в течениях за фронтом резко возрастает плотность гидродинамической энергии, т.е. происходит гидродинамическая кумуляция [1], представляющая значительный научный и практический интерес. Гудерлей, Ландау, Станюкович показали [1–3], что за фронтом сходящейся сферической (или цилиндрической) сильной УВ течение является автомодельным и давление за фронтом  $P$  возрастает по мере уменьшения радиуса фронта  $r$  по степенному закону

$$P \sim r^{-2\delta}, \quad (1)$$

где  $\delta = \text{const}$ .

Для сферической волны величина показателя  $\delta$  приблизительно в два раза больше, чем для цилиндрической [4], так что зависимость давления от площади фронта  $S$  в обоих этих случаях с хорошей точностью можно считать одинаковой.

Честер предложил приближенную теорию (изложена в [4]) усиления нестационарной ударной волны, распространяющейся в сужающемся канале. Теория основана на предположении, что извлекаемая из автомодельных решений для цилиндрической и сферической сходящихся УВ зависимость  $P(S)$  применима и для описания усиления нестационарной УВ в канале сужающегося сечения, если в качестве  $S$  подставлять сечение канала. Развитие теории Чизнеллом и Уиземом привело к так называемой геометрической динамике УВ [4] (теория CCW), которая кратко изложена и используется ниже. Обзор известных нам теоретических и экспериментальных работ по сходящимся УВ в газах приведен в [5]

(по состоянию на конец 80-х). Отметим, что в лабораторных экспериментах по цилиндрическим сходящимся УВ обычно не стремятся создать протяженную вдоль оси симметрии УВ и исследуют фрагмент сходящейся волны, ограниченный двумя плоскими стенками (рис. 1), которые используют как оптические окна или зеркала. Именно таким способом Перри и Кантровиц [6] впервые получили тенеграмму сходящейся цилиндрической волны, а в [7] и последующих работах тех же авторов были получены замечательные, вошедшие в "парады течений" фотографии фронта волны и его неустойчивостей.

Естественным обобщением такого подхода представляется создание сходящихся ударных волн в осесимметричных каналах типа представленных на рис. 2, 3, т.е. ограниченных поверхностями

$$z = \text{const } r^{m-1}, \quad (2)$$

где  $r, z, \varphi$  — цилиндрические координаты;  $m = 1, 2, 3$  для каналов, изображенных на рис. 1–3 соответственно.

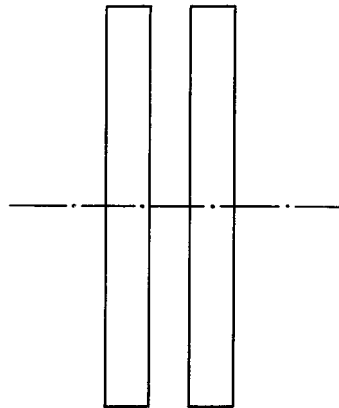
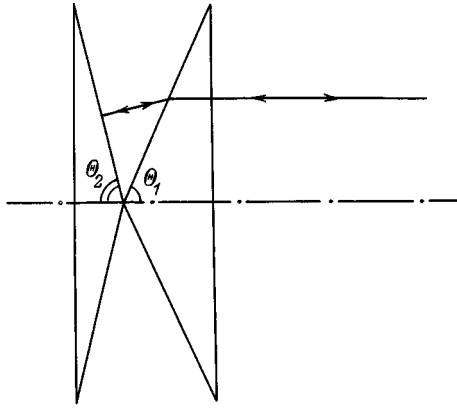
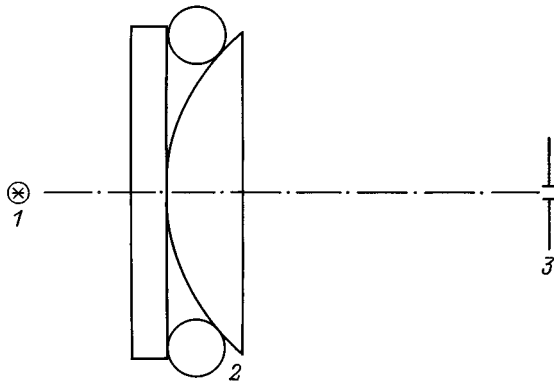


Рис. 1. Геометрия канала для регистрации цилиндрической кумуляции.



**Рис. 2.** Геометрия канала для регистрации фрагмента сферической кумуляции.



**Рис. 3.** Геометрия канала и схема регистрации сверхсферической кумуляции: 1 — лампа-вспышка, 2 — источник кольцевой ударной волны, 3 — щель.

С учетом уже известных преимуществ конфигурации, представленной на рис. 1, кратко обсудим возможности экспериментального исследования сходящихся УВ в каналах, показанных на рис. 2, 3. В полости, ограниченной двумя коническими поверхностями, может создаваться сходящаяся УВ, которая по своей форме близка к фрагменту сходящейся сферической УВ. В принципе одной из стенок канала может служить прозрачный конический рефрактор (показатель преломления  $n$ ) с углом полураствора  $\theta_1$ , а другой — конический отражатель с углом полураствора

$$\Theta_2 = \arccos(\cos \Theta_1 (n \sin \Theta_1 - \sqrt{1 - n^2 \cos^2 \Theta_1})), \quad (3)$$

подобраным так, что если входящий оптический луч параллелен оптической оси, то и выходящий луч также ей параллелен, как показано на рис. 2. При этом становится возможным применение некоторых оптических методик. Однако экспериментальные ограничения, возникающие из-за неточности оптического изображения точечных световых источников в конических оптических элементах, достаточно серьезны.

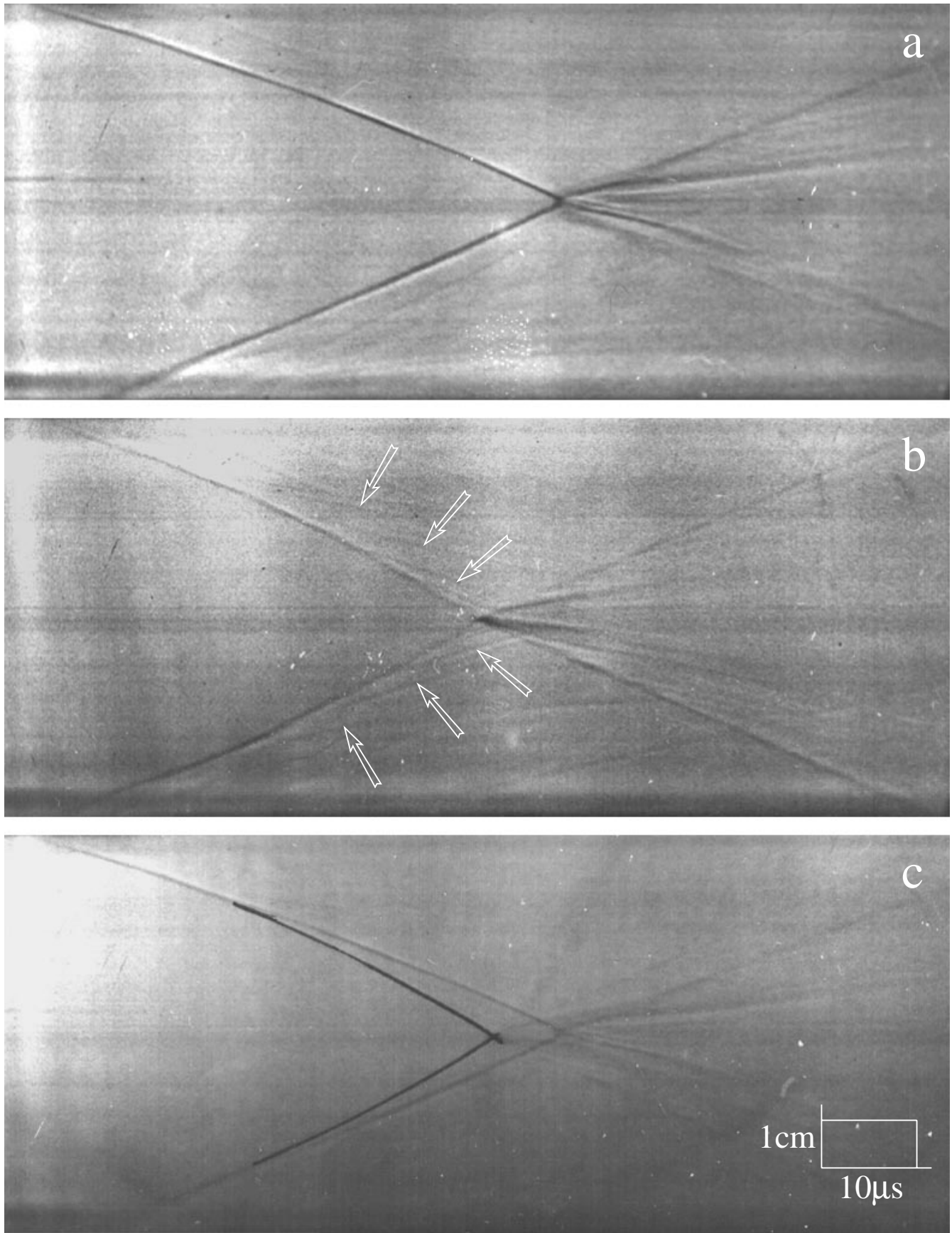
Наоборот, полость на рис. 3 образована соприкасающимися стенками, имеющими наиболее естественную для оптики форму — сферической линзы и плоской (или сферической) стенки, которая может использоваться как оптическое окно или плоское зеркало. При этом сходящаяся УВ в такой системе не только представляют собой удобный для экспериментального исследования объект, но и интересны для теории, поскольку эффект кумуляции для них выражен даже сильнее, чем для сферической УВ (далее мы называем его для краткости сверхсферической кумуляцией). Анализ этого течения и составляет предмет настоящей работы. Краткий вариант работы, содержащий некоторые из приведенных здесь результатов, опубликован в [8].

## Исследование сходящейся УВ оптическими методами

Динамика сходящейся и отраженной волны в полости (рис. 3) изучалась с помощью теневой фотохронографии со щелевой разверткой. УВ создавалась в воздухе атмосферного давления с помощью газоразрядного кольцевого источника, описанного в [9]. Такой источник позволяет инициировать сильноточный шнуровой газовой разряд, причем шнур разряда в данном случае имел форму тонкого тороида с большим радиусом  $R_0 = 50 \text{ mm}$ . Время разряда  $\sim 20 \mu\text{s}$ , полный энерговыход  $\sim 300 \text{ J}$ . Источник кольцевой УВ зажимался между плоской прозрачной пластиной из оргстекла и тонкой сферической линзой из оптического стекла. Зазор между линзой и пластиной составлял  $10 \text{ mm}$  в месте разряда (генерирующего УВ) и  $< 1 \text{ mm}$  в центре системы. Подсветка течения осуществлялась с помощью лампы-вспышки, размещенной со стороны плоской пластины (с левой стороны, если следовать рис. 3). На оптической оси системы располагалась щель, формирующая теневое изображение на фотопленке. Временная развертка производилась с помощью прибора SFR-7. При этом на фотопленке фиксируется положение фронта сходящейся (а затем расходящейся) ударной волны — ХТ-диаграмма.

Для сравнения проводилась регистрация ХТ-диаграмм для цилиндрической ударной волны. С этой целью сферическая линза заменялась второй плоской пластинкой, так что источник УВ оказывался зажатым между двумя дисками. Реперные измерения показали, что относительное изменение оптического коэффициента увеличения при такой замене не превышало 2%, так что приведенные ниже различия на тенеграммах для цилиндрической и сверхсферической кумуляции связаны с различной динамикой УВ, а не с изменением свойств оптической системы.

Тенеграммы для цилиндрической и сверхсферической кумуляции представлены на рис. 4, *a* и *b* соответственно. Для удобства сравнения на рис. 4, *c* приведен снимок, являющийся результатом совмещения отпечатков рис. 4, *a* и *b* (частично ретушированный, чтобы ком-



**Рис. 4.** Экспериментальные фотохронограммы цилиндрической (а) и сверхсферической кумуляции (b) и их суперпозиция (c).

пенсировать различие в контрастности снимков). Вертикальная координата — пространственная, расстояние по вертикали между линиями на рис. 4 (траекториями фронтов) соответствует расстоянию между сходящимися и расходящимися фронтами. Горизонтальная ось — временная. Тангенс угла наклона траектории фронта по отношению к горизонтальной оси пропорционален скорости фронта. На рис. 4 пространственный масштаб представлен по вертикальной оси, а временной — по горизонтальной.

Траектории фронтов УВ от левого края рисунка до точки пересечения фронтов (геометрического центра системы) соответствуют сходящейся к центру УВ, а от точки пересечения к правому краю рисунка — расходящейся УВ. На рис. 4, *a* и *b* хорошо заметно увеличение угла между траекторией фронта УВ на диаграмме и осью симметрии, что означает ускорение сходящегося фронта. Поскольку скорость фронта сильной УВ непосредственно связана с плотностью гидродинамической энергии за фронтом, то ускорение фронта демонстрирует рост плотности энергии, т.е. эффект кумуляции.

Сравнение траекторий фронтов для сверхсферической и цилиндрической кумуляции (рис. 4, *c*) приводит к двум выводам. Во-первых, вплоть до расстояний  $\sim 0.4R_0 - 20\text{ mm}$  от центра динамика сходящейся УВ в обоих случаях практически одинакова, так как траектории фронтов с хорошей точностью совпадают. Это означает, что различия в экспериментальных условиях генерации УВ, связанные с различной конфигурацией стенок полости, можно считать несущественными. Наоборот, на расстояниях менее  $0.4R_0$ , как ясно видно из рис. 4, *c*, ускорение фронта в случае сверхсферической кумуляции заметно превышает ускорение при цилиндрической кумуляции. Различия в ускорениях проявляется в более резко увеличении угла между траекторией фронта УВ и осью симметрии, и, как следствие, имеется различие времен схождения фронта к оси на  $5\text{ }\mu\text{s} \pm 50\%$ .

Различия в скорости УВ, измеренных по тангенсу угла наклона траектории фронта к горизонтальной оси на расстоянии  $0.1R_0 = 5\text{ mm}$ , составляет  $1.3 \cdot 10^5\text{ cm/s} \pm 20\%$  для сверхсферической кумуляции и  $0.9 \cdot 10^5 \pm 15\%$  для цилиндрической кумуляции. На меньших расстояниях от центра измерения скорости ненадежны.

Эти результаты мы рассматриваем как экспериментальное доказательство вывода о том, что сверхсферическая кумуляция приводит к более резкому росту плотности энергии по сравнению с цилиндрической кумуляцией. Этот вывод вполне согласуется с приведенными далее результатами численных расчетов и аналитической теории, показывающих, что по степени концентрирования энергии даже сферическая кумуляция не может конкурировать со сверхсферической.

Интересно отметить также, что на тенеграмме рис. 4, *b* хорошо заметны следы гидродинамических возмущений (отмечены стрелками) за фронтом сходящейся УВ, обладающих следующими свойствами: траектории возмущений начинаются на траектории фронта (т.е. они

генерируются на фронте сходящейся УВ); возмущения движутся к центру со скоростью, несколько меньшей, чем скорость УВ (и, скорее всего, они сносятся к центру со скоростью потока газа за фронтом УВ); наконец, возмущения присутствуют на тенеграмме рис. 4, *b* практически во всем поле зрения, но отсутствуют на тенеграмме рис. 4, *a*, т.е. их наличие характерно именно для сверхсферической кумуляции. Естественно предположить, что эти возмущения являются контактными разрывами, возникающими при последовательном нерегулярном взаимодействии сходящейся ударной волны со стенками полости. Такое взаимодействие УВ со стенками и связанное с ним ступенчатое нарастание давления являются, как показано в следующем разделе, важными характерными чертами сверхсферической кумуляции.

## Численное моделирование сверхсферической кумуляции

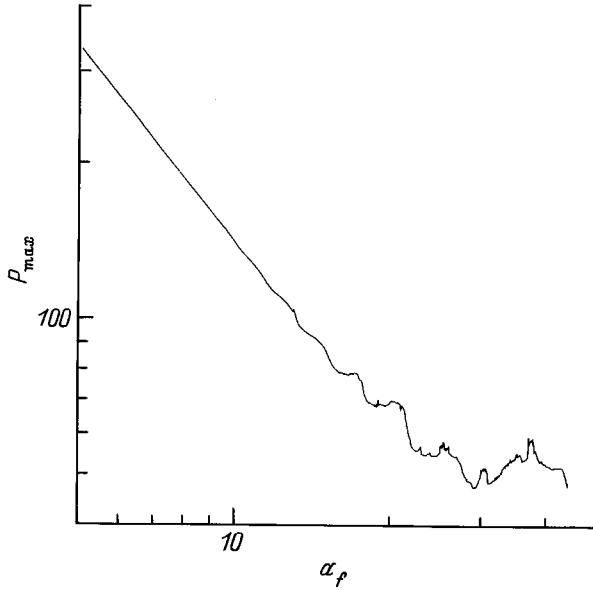
Было выполнено численное моделирование сходящейся ударной волны в полости, показанной на рис. 3. Размеры полости и энергетические параметры отличались от использованных в эксперименте. Сферическая стенка имела радиус  $250\text{ mm}$  и касалась плоской стенки. В радиальном направлении полость ограничивалась цилиндрической стенкой с радиусом  $R_{\text{max}} = 50\text{ mm}$ . Газ, заполняющий полость, имел начальное давление  $1\text{ atm}$  и показатель адиабаты  $\gamma = 7/5$ .

Источником энергии гидродинамического движения являлось заданное в начальный момент времени избыточное давление  $P_0 = 100\text{ atm}$  в объеме газа, ограниченном стенками и цилиндрической поверхностью  $R_1 = 47\text{ mm}$  (т.е.  $R_1 < r < R_{\text{max}}$ ). На границе этого объема при  $r = R_1$  возникала сильная ударная волна, которая затем сходилась к оси симметрии.

Возникшее течение рассчитывалось на неструктурированной, адаптирующей к течению сетке. Схема расчета, критерии и способы перестройки сетки описаны в [10]. Расчет проводился до достижения сходящейся ударной волны радиуса  $5\text{ mm}$ .

На начальной стадии сходящаяся ударная волна испытывала последовательное нерегулярное взаимодействие поочередно с плоской и сферической стенкой. Как результат, процесс усиления ударной волны происходил скачкообразно и сопровождался появлением газодинамических возмущений, распространяющихся в направлении, поперечном фронту сходящейся ударной волны, от стенки к стенке.

На рис. 5 представлена в логарифмическом масштабе зависимость максимального по течению давления  $P_{\text{max}}$ , в каждый момент времени от значения радиуса фронта  $a_f$  сходящейся волны в тот же момент времени. Из рис. 5 следует, что по мере схождения ударной волны скачки давления относительно ослабевают. При малых радиусах зависимость  $P_{\text{max}}(a_f)$  выходит на степенную (прямую в логарифмическом масштабе), что определенно ука-



**Рис. 5.** Зависимость рассчитанного давления за фронтом сходящейся ударной волны при сверхсферической кумуляции от ее радиуса (в а.е.).

зывает на автомодельный характер сверхсферической кумуляции на малых расстояниях от оси.

Угол наклона прямой на рис. 5 соответствует автомодельной зависимости  $P_{\max} \approx a_f^{-2\delta}$ , где  $\delta \approx 0.62$ . Последнее значение хорошо согласуется с приведенной ниже теорией, дающей  $\delta \approx 0.59$ . Полученный при численном расчете закон роста давления является более резким, чем для сферической ударной волны в газе с тем же показателем адиабаты.

Итак, численное моделирование демонстрирует быстрый рост давления при сверхсферической кумуляции, указывает на ее автомодельный характер и, возможно, объясняет наличие возмущений за фронтом сходящейся ударной волны, видных на экспериментальных тенеграммах.

### Одномерное приближение и автомодельное решение газодинамических уравнений, описывающих сверхсферическую кумуляцию.

Для выявления общности теоретического описания сверхсферической кумуляции со сферической и цилиндрической исследуем переход к одномерному приближению (когда движение зависит только от одной "радиальной" координаты) для всех трех случаев одновременно, рассматривая в (1) величину  $n = 1, 2, 3$  как параметр. Введем семейство координатных поверхностей

$$\beta = z/r^{m-1} \quad (4)$$

и сопряженную с  $\beta$  координату  $\alpha$

$$\alpha^2 = (n-1) \cdot z^2 + r^2, \quad (5)$$

так что  $\text{grad } \alpha \text{ grad } \beta = 0$ . Движение УВ к центру соответствует  $\alpha \rightarrow 0$ , границы полости являются координатными линиями  $\beta = \beta_1$  и  $\beta = \beta_2$ .

Квадрат длины  $dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2$  в ортогональных координатах  $\alpha, \beta, \varphi$  выражается через метрические коэффициенты

$$dl^2 = g_{\alpha\alpha} d\alpha^2 + g_{\beta\beta} d\beta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2, \quad (6)$$

где

$$g_{\alpha\alpha} = \alpha^2 / [\alpha^2 + (n-1)(n-2)\beta^2 r^{2m-2}], \quad (7)$$

$$g_{\beta\beta} = g_{\alpha\alpha} r^{2m} / \alpha^2, \quad (8)$$

$$g_{\varphi\varphi} = r^2, \quad (9)$$

где  $r$  для каждого заданного значения  $m$  должно быть выражено через  $\alpha, \beta$  с помощью уравнения

$$r^2 = \alpha^2 - (m-1)\beta^2 r^{2m-2}. \quad (10)$$

Уравнения неразрывности и Эйлера приведены в [11] для произвольной ортогональной системы координат. Полагая, что движение вдоль координаты  $\varphi$  не происходит и течение не зависит от  $\varphi$ , имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \frac{u_\beta}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} + \frac{\rho}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} g_{\varphi\varphi}}} \times \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sqrt{g_{\beta\beta} g_{\varphi\varphi}} \cdot u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (u_\beta \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\varphi\varphi}}) \right] = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_\beta}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \times \left( \frac{u_\alpha u_\beta}{g_{\alpha\alpha} \sqrt{g_{\beta\beta}}} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} - \frac{u_\beta^2}{g_{\beta\beta} \sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial \alpha} \right) = -\frac{1}{\rho \sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial P}{\partial \alpha}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial t} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} + \frac{u_\beta}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \times \left( \frac{u_\alpha u_\beta}{g_{\beta\beta} \sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha^2}{g_{\alpha\alpha} \sqrt{g_{\beta\beta}}} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} \right) = -\frac{1}{\rho \sqrt{g_{\beta\beta}}} \frac{\partial P}{\partial \beta}, \quad (13)$$

где  $u_\alpha, u_\beta$  — физические компоненты скорости;  $P$  и  $\rho$  — давление и плотность.

Уравнения (11)–(13) должны быть дополнены условием адиабатичности течения за фронтом УВ и граничными условиями

$$u_\beta|_{\beta=\beta_1, \beta_2} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим возможность отделения радиального движения по координате  $\alpha$ , т. е. возможность существования движения, зависящего только от  $\alpha$  и имеющего только компоненту скорости  $u_\alpha$ . Такое движение описывается уравнениями

$$\rho_t + u_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \frac{\rho}{\alpha^m} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^m u_\alpha) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \alpha}, \quad (16)$$

(14) выполняется автоматически. Переход от (11)–(13) к (15), (16) возможен при выполнении условий

$$g_{\alpha\alpha} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{r}{\alpha} \right) = 0.$$

При  $m = 1, 2$  тождественно выполняются соотношения

$$g_{\alpha\alpha} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{r}{\alpha} \right) = 0$$

и уравнения (15), (16) справедливы во всем пространстве и описывают соответственно цилиндрически и сферически симметричные течения. Случай  $m = 3$  сложнее, поскольку в выражениях для

$$g_{\alpha\alpha} - 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{r}{\alpha} \right)$$

появляются зависящие от  $\alpha$  и  $\beta$  члены. Однако нетрудно видеть, что эти дополнительные члены стремятся к нулю при  $\alpha \rightarrow 0$  (т. е. при неограниченно близком схождении УВ к центру). Таким образом, если в случае  $m = 1, 2$  отделение радиального движения возможно во всем пространстве, то при  $m = 3$  это отделение допустимо только как локальное, при  $\alpha \rightarrow 0$ . Отметим, что локальный характер одномерного приближения (15), (16) в случае  $m = 3$  не слишком ограничивает применимость получаемых ниже автомодельных решений уравнений (15), (16), поскольку и сами эти решения справедливы только при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Чтобы оценить погрешность одномерного приближения (15), (16) при  $\alpha \rightarrow 0$  и одновременно прояснить физический смысл дополнительных членов в  $g_{\alpha\alpha}$ , обратимся к (13). В этом уравнении помимо градиента давления в направлении координаты  $\beta$  действует обобщенная сила, плотность которой равна

$$f_\beta = \frac{1}{2} \frac{\rho u_\alpha^2}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \frac{\partial \ln g_{\alpha\alpha}}{\partial \beta}. \quad (17)$$

Величина  $(\partial/\partial\beta) \ln g_{\alpha\alpha}$  непосредственно связана с кривизной координатной линии  $\beta = \text{const}$ , вдоль которой происходит радиальное движение. Физически ясно, что движение вдоль искривленной линии приводит к появлению инерциальных сил в поперечном к траектории направлении, каковой и является сила (17).

Поскольку расстояние между стенками ( $\propto \alpha^2$ ) при  $m = 3$  убывает при  $\alpha \rightarrow 0$  быстрее, чем расстояние до центра ( $\propto \alpha$ ), то по мере схождения УВ

происходит быстрое затухание ограниченного стенками движения по координате  $\beta$  за фронтом УВ. В (13) при этом обращаются в нуль все члены, содержащие  $u_\beta$ , а обобщенная сила (17) уравнивается градиентом давления  $\partial P/\partial\beta$ . При этом возникает зависящая от  $\beta$  вариация давления

$$\delta P = \frac{1}{2} \rho u_\alpha^2 \ln g_{\alpha\alpha} \approx -\rho u_\alpha^2 \alpha^2 \beta^2. \quad (18)$$

В частности на плоской стенке (при  $\beta = \beta_2 \neq 0$ ) давление при одном и том же значении  $\alpha$  несколько выше, чем на сферической стенке (при  $\beta = \beta_1 = 0$ ). При  $\alpha \rightarrow 0$  и ограниченном  $\beta$  или в размерностных величинах на расстояниях до центра, малых по сравнению с радиусом сферической стенки, вариация давления (18) относительно мала  $\delta P \ll P \sim \rho u_\alpha^2$ . Это неравенство оправдывает переход к одномерному приближению и позволяет оценить погрешность приближения как  $0[\alpha^2\beta^2]$ .

Перейдем к отысканию автомодельных решений уравнений (15), (16) при  $m = 3$ , описывающих сверхсферическую кумуляцию. Интересно отметить, что эти уравнения при  $m = 3$  описывали бы сходящуюся, симметричную по трем полярным углам ударную волну в четырехмерном пространстве. Из-за более резкого убывания площади фронта при схождении волны ( $S \propto \alpha^m$ ) естественно ожидать более резкой кумуляции по сравнению с цилиндрическим случаем. Этот вывод подтвердился, более того, показатель автомодельности  $\delta$  (см. (1)) оказался в три (с отличной точностью) раза превышающим значение этого показателя для цилиндрической кумуляции и в полтора раза для сферической, т. е.  $\delta \propto m$ .

Порядок отыскания показателя автомодельности описан в [2] для сферической УВ. Поэтому здесь ограничимся тем, что, не изменяя использованных в [2] обозначений, приведем уравнение для функций — представителей  $z, v$ , справедливое для любых значений  $m$  (в [2]  $m = 2$ ),

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dv} &= \frac{z}{1-v} \\ &\times \left[ \frac{(((m+1)\gamma + 1 - m)v - 2\delta - 2)[z - (1-v)^2]}{v(1-v)(1+\delta-v) - z((m+1)v - \frac{2\delta}{\gamma})} \right. \\ &\left. + (\gamma - 1) \right], \quad (19) \end{aligned}$$

а также установим связь между введенным в [2] определением показателя автомодельности  $\alpha_{[2]}$  и фигурирующим в (1) показателем  $\delta$ :  $1 + \delta = 1/\alpha_{[2]}$ . После этого все рассуждения [2] могли бы быть здесь повторены для  $m = 3$ .

Численное интегрирование (19) позволяет найти  $\delta$ . Для политропного индекса  $\gamma = 7/5$  получается  $\delta \approx 0.59$ , и давление за фронтом УВ растет по закону

$$p \propto \alpha^{-1.17}, \quad (20)$$

что находится в хорошем согласии с результатами численных расчетов ( $P \propto \alpha^{-1.24}$ ). Для сферической волны было бы  $P \propto \alpha^{-0.78}$ , для цилиндрической<sup>1</sup>  $P \propto \alpha^{-0.39}$ .

Показатель автомодельности пропорционален  $m$ , или, что то же самое, функция  $P(S)$  одинакова для всех  $m$  с высокой точностью, что даже несколько обесценивает полученные в этом разделе результаты: универсальный характер зависимости  $P(S)$  фактически означает возможность применения теории ССВ к описанию сверхсферической кумуляции, а в этой теории переход к одномерному приближению выполняется проще (и даже строже), чем в чистой гидродинамике, после чего вычисление показателя  $\delta$  сводится к домножению известных величин на  $m$ .

## Применение теории ССВ к расчету устойчивости сверхсферической кумуляции

В теории ССВ [4] для описания динамики фронтов УВ используется функция  $\Phi(x, y, z)$  ( $x, y, z$  — координаты), такая что в каждый момент времени  $t$  поверхность фронта описывается уравнением

$$\Phi(x, y, z) + V_{s0} t = 0, \quad (21)$$

где  $V_{s0}$  — скорость звука в невозмущенном газе, по которому распространяется УВ.

Число Маха  $M$  при этом дается соотношением

$$M = \frac{1}{|\text{grad } \Phi|}. \quad (22)$$

Вводится система ортогональных к поверхностям (21) координатных линий — лучей и предполагается, что при движении каждого участка поверхности фронта УВ вдоль лучевой трубки изменение числа  $M$  определяется только изменением площади фронта и для сильной УВ ( $M \gg 1$ ) дается формулой

$$M \propto A^{-\delta_1}, \quad (23)$$

$$\delta_1 = 1 / \left( 1 + \frac{2}{\gamma} + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right). \quad (24)$$

Соотношения дифференциальной геометрии дают связь между  $A$  и  $\text{grad } \Phi$  и позволяют получить уравнение для  $\Phi$

$$\text{div}(M^{1+\delta_1} \text{grad } \Phi) = 0. \quad (25)$$

<sup>1</sup> Можно сказать, что сверхсферическая кумуляция так же сильна, как сферическая и цилиндрическая, вместе взятые ( $\alpha^{-1.17} = \alpha^{-0.78} \alpha^{-0.39}$ ).

В криволинейных координатах  $\alpha, \beta, \varphi$  с метрикой (7)–(9) уравнение (25) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \alpha^m \left( \frac{r}{\alpha} \right)^{m+1} M^{1+\delta_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right] + \alpha^{2-m} \frac{\partial}{\partial \beta} \\ & \times \left[ \left( \frac{r}{\alpha} \right)^{1-m} M^{1+\delta_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right] + g_{\alpha\alpha} \left( \frac{r}{\alpha} \right)^{m-1} \\ & \times \alpha^{m-2} \frac{\partial}{\partial \varphi} M^{1+\delta_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнение (26) для радиального движения есть

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \alpha^m \frac{\partial \Phi^{-1/\delta_1}}{\partial \alpha} \right) = 0, \quad (27)$$

причем для  $m = 1, 2$  переменные (и движение) разделяются строго, а при  $m = 3$  локально при  $\alpha \rightarrow 0$ , так как в последнем случае  $r/\alpha \rightarrow 1$  и  $g_{\alpha\alpha} \rightarrow 1$ . Решение (27) очевидно

$$\Phi_0 = c r^{1+m\delta_1}, \quad c = \text{const}. \quad (28)$$

Согласно (22) и (28) имеем

$$M \propto r^{-m\delta_1}, \quad (29)$$

и ранее введенный показатель автомодельности  $\delta$ , определенный так что  $P \approx M^2 \approx r^{-2\delta}$ , равен

$$\delta = m\delta_1. \quad (30)$$

Таким образом, полученный в предыдущем разделе результат  $\delta \propto m$  (разумеется, приближенный, хотя и с очень хорошей точностью) в теории ССВ получается как точное соотношение (30). Ввиду того что  $\delta_1$ , определенное по формуле (24) теории ССВ, практически совпадает с прямо вычисленным (исходя из гидродинамических уравнений) показателем автомодельности цилиндрической сходящейся УВ, теория ССВ предсказывает для сверхсферической кумуляции простое и очень точное выражение для показателя автомодельности  $\delta = 3\delta_1$ .

Теперь линеаризуем (26) относительно малой добавки  $\Phi_1$  к  $\Phi_0$ . Для  $m = 3$  одновременно учитываем наличие малых при  $\alpha \rightarrow 0$  добавок в метрических коэффициентах. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta_1} \left( \frac{r}{\alpha} \right)^{m+1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \alpha^{-m\delta_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \right] - \alpha^{2-2m-m\delta_1} \\ & \times \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \left( \frac{r}{\alpha} \right)^{1-m} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right] - \alpha^{-m\delta_1-2} \left( \frac{r}{\alpha} \right)^{m-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \\ & = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} \alpha^{-m\delta_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{r}{\alpha} \right)^{m+1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Граничное условие на стенках полости

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_1, \beta_2} = 0. \quad (32)$$

При  $m = 3$  правая часть (31) (которая обращается в нуль при  $m = 1, 2$ ) равна  $-8\alpha^{1-m\delta_2}\beta^2\frac{\partial\Phi_0}{\partial\alpha}$  и в рамках уравнения (31) становятся возможными две существенно различные постановки задачи. Во-первых, можно искать частное решение  $\Phi_{10}$  уравнения (31) с ненулевой правой частью, потребовав, чтобы для этого частного решения  $\Phi_{10} = 0[\Phi_0]$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Такое решение действительно существует, элементарную процедуру его построения в виде разложения по степеням  $\alpha$  мы здесь не приводим. Соответствующая малая поправка к  $\Phi_0$  является уточнением решения (28) и обеспечивает учет малых (вблизи центра) отклонений величин  $r/\alpha$  и  $g_{\alpha\alpha}$  от единицы. Существование решения  $\Phi_{10}$  с перечисленными свойствами означает корректность одномерного приближения  $\Phi_0$  в первом порядке теории возмущений по  $\alpha$ .

Совсем другой смысл имеет построение общего решения уравнения (31) с нулевой правой частью. Отыскание этих поправок и исследование их поведения при  $\alpha \rightarrow 0$  позволяет оценить устойчивость одномерного решения (28) по отношению к неодномерным возмущениям начальных данных.

Расчет поведения общего решения уравнения (31) с нулевой правой частью показывает, что при  $m = 1-3$  все неодномерные моды возмущений неустойчивы, так как при  $\alpha \rightarrow 0$  они убывают медленнее, чем  $\Phi_0$ . Это означает рост относительных отклонений формы УВ от симметричной.

Скорость роста различных мод зависит от  $m$ . При схождении цилиндрической УВ преимущественно нарастают моды типа перетяжки (возмущения, зависящие от  $z$  и не зависящие от  $\varphi$ ). В сферической УВ все зависящие от полярных углов возмущения растут с одинаковой скоростью. Приведем здесь расчеты для устойчивости сверхсферической кумуляции ( $m = 3$ ).

Для возмущений, имеющих зависимость от  $\varphi$  и  $\beta$  типа

$$\Phi = A(\alpha)e^{il\varphi} \cos\left(\pi k \frac{\beta - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}\right) \quad (33)$$

( $l$  и  $k$  — целые,  $i^2 = -1$ ), уравнение для амплитуды имеет вид

$$\frac{1}{\delta_1} \frac{d^2 A}{d\alpha^2} - \frac{3}{\alpha} \frac{dA}{d\alpha} + l^2 \frac{A}{\alpha^2} + \frac{\pi^2 k^2}{(\beta_2 - \beta_1)^2} \frac{A}{\alpha^4} = 0. \quad (34)$$

При  $k \neq 0$  подставка  $u = 1/\alpha$  сводит (34) к уравнению

$$\frac{1}{\delta_1} \left( u^4 \frac{d^2 A}{du^2} + 2u^3 \frac{dA}{du} \right) + 3u^3 \frac{dA}{du} + u^2 l^2 A + \frac{\pi^2 k^2}{(\beta_2 - \beta_1)} u^4 A = 0. \quad (35)$$

Решение (35) выражается через бесселевы функции с мнимым индексом. Асимптотическое поведение при

$u \rightarrow \infty$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ) определяется множителем вида

$$A \propto u^{-(1+3\delta_{1/2})} \exp\left(i \frac{\pi k \sqrt{\delta_1}}{\beta_2 - \beta_1} u\right) = \alpha^{1+3\delta_{1/2}} \exp\left[\frac{i\pi k \sqrt{\delta_1}}{\alpha(\beta_2 - \beta_1)}\right], \quad (36)$$

т.е.  $\Phi_1$  осциллирует с амплитудой, стремящейся к нулю по закону  $|\Phi_1| \propto \alpha^{1+3\delta_{1/2}}$ . Относительная величина возмущения  $|\Phi_1/\Phi_0|$ , характеризующая изменение формы фронта, возрастает как

$$\left| \frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right| \propto \alpha^{-3\delta_{1/2}}. \quad (37)$$

Таким образом, возмущения, зависящие от  $\beta$ , приводят к искажению формы фронта, нарастающему как  $\alpha^{-0.3}$ . Однако значительно быстрее растут чисто азимутальные возмущения с  $k = 0$ , т.е. не зависящие от  $\beta$  и зависящие только от полярного угла  $\varphi$ . Подставляя  $k = 0$  в (34), получаем, что  $A = \text{const } \alpha^b$ , где

$$b = \frac{3\delta_1 + 1 \pm \sqrt{(3\delta_1 + 1)^2 - 4\delta_1 l^2}}{2}. \quad (38)$$

Моды с  $l \geq 2$  имеют скорость роста возмущения

$$\left| \frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right| \propto \alpha^{-3\delta_{1/2} - 1/2} \approx \alpha^{-0.8}. \quad (39)$$

Наконец, возмущение с  $l = 1$  расщепляется на две моды, одна из которых дает скорость роста

$$\left| \frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right| \propto \alpha^{-\frac{3\delta_1}{2} - \frac{1}{2}} - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \delta_1} \approx \alpha^{-1.5}. \quad (40)$$

Нетрудно понять, что исключительно быстрый рост этой моды соответствует ускоряющемуся по мере схождения УВ смещению центра симметрии фронта УВ по отношению к центру полости в некотором направлении, определяемом начальной формой возмущения. Действие этой неустойчивости значительно осложняет экспериментальные исследования сверхсферической кумуляции.

## Заключение

Результаты работы свидетельствуют о том, что в осесимметричных полостях специальной формы могут создаваться симметричные ударные волны, ускоряющиеся и усиливающиеся по мере их схождения. Интенсивность ударной волны при этом нарастает быстрее по сравнению со случаем сферической сходящейся ударной волны.

Работа финансировалась Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 94-02-06691.

Авторы признательны Э.М. Бархударову, И.А. Коссову, Е.В. Тимофееву за поддержку работы и Е.Л. Сатуниной, В.Е. Терехину за техническую помощь.



## Список литературы

- [1] *Забабахин Е.И., Забабахин И.Е.* Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.
- [2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1985.
- [3] *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехиздат, 1955.
- [4] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [5] *Соколов И.В.* // УФН. 1989. № 160(11). С. 143–166.
- [6] *Perry R.W., Kantrowitz A.* // J. Appl. Phys. 1954. Vol. 51. P. 3126.
- [7] *Такаута К., Kleine H., Groenig H.* // Exp. Fluids. 1987. Vol. 5. P. 315.
- [8] *Войнович П.А., Соколов И.В.* // Письма ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 13. С. 68–72.
- [9] *Sokolov I.V., Terekhin V.E.* // Proc. 1989. Intern. Conf. on Plasma Phys. / Ed. A. Sen, P.K. Kaw. Univ. of Delhi, 1989. P. 293.
- [10] *Fursenko A.A., Mende N.P., Oshima K.* et al. // Comp. Fluid Dyn. J. 1992. Vol. 2. N. 1. P. 1–36.
- [11] *Седов Л.И.* Механика сплошных сред. Т. 1. М.: Наука, 1976. С. 178–179.