

01;04;09;10

Нелинейная теория канализации излучения ленточным потоком циклотронных осцилляторов

© Н.С. Гинзбург, И.В. Зотова, А.С. Сергеев

Институт прикладной физики РАН,
603600 Нижний Новгород, Россия

(Поступило в Редакцию 13 октября 1997 г.)

Теоретически исследованы особенности нелинейной стадии излучения поперечно ограниченных магнитонаправленных винтовых и прямолинейных электронных потоков в однородной среде и вакууме в условиях нормального и аномального эффектов Доплера. Исследована эволюция поперечного распределения излучаемого поля и показано канализующее влияние электронного потока. При излучении винтового потока в плазмopodobной среде показана возможность достижения практически полной трансформации энергии вращательного движения электронов в энергию электромагнитных колебаний за счет автоподстройки угла излучения.

Введение

В последнее время значительный интерес вызывает исследование особенностей индуцированного излучения поперечно ограниченных потоков релятивистских электронов в свободном пространстве или в однородных средах. В ряде работ [1–12] было показано, что такие потоки могут не только усиливать электромагнитное излучение, но и формировать пространственную структуру поля (в частности, канализировать излучаемую волну), выступая в роли активных волноводов. Было также продемонстрировано, что эффективность излучения электронных потоков в свободное пространство может превосходить эффективность излучения в традиционных условиях, когда поперечная структура излучения формируется внешними электродинамическими системами. Это обусловлено тем, что самосогласованная структура поля оказывается более благоприятной для эффективного торможения электронов вследствие автоматической подстройки условий синхронизма за счет изменения угла, под которым излучается волна.

Эффекты канализации могут реализоваться для различных типов индуцированного излучения (ондуляторного, черенковского, циклотронного). При этом наряду с универсальными свойствами каждому механизму излучения даже при идентичной геометрии пучка присущи специфические особенности, обусловленные поляризацией излучаемых волн, механизмами группировки электронов и т.д.

Настоящая работа посвящена исследованию циклотронного излучения ленточного электронного потока в однородном магнитном поле в условиях нормального и аномального эффекта Доплера. Линейная стадия таких процессов рассмотрена в [13]. В данной работе исследуется нелинейная стадия взаимодействия. Показано, что при циклотронном излучении поперечно ограниченных электронных потоков в однородной (плазмopodobной) среде в условиях нормального эффекта Доплера возможна практически полная трансформация энергии вращательного движения электронов в энергию электро-

магнитных колебаний. В условиях аномального эффекта Доплера излучение на начальной стадии сопровождается увеличением поперечного импульса электронов. Однако если в системах с фиксированной поперечной структурой поля процесс носит обратимый характер, при котором имеет место периодическая трансформация энергии поступательного движения в энергию поперечного движения и энергию излучения, а затем в обратном направлении [14], то в открытой системе за счет выноса электромагнитной энергии из области взаимодействия процесс теряет периодичность.

Модель и основные уравнения

Пусть электронный поток, имеющий толщину d в направлении оси x и безграничный в y -направлении, состоит из электронов, двигающихся по винтовым траекториям в однородном магнитном поле $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{z}$, причем толщина пучка существенно превышает ларморовский радиус электронов. Поле, излучаемое таким потоком, может быть представлено в виде квазиоптического волнового пучка, задаваемого вектор-потенциалом

$$\mathbf{A} = \text{Re} \{ (\mathbf{x}_0 + iy_0) A(x, z) \exp(i\omega t - ihz) \}, \quad (1)$$

где $h = n\omega/c$ (n — показатель преломления среды, c — скорость света); $A(x, z)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда поля.

Предположим также, что выполнено условие циклотронного резонанса

$$\omega - hV_{\parallel} = \omega_H, \quad (2)$$

где $\omega_H = eH_0/mc\gamma$ — гирочастота, V_{\parallel} — поступательная скорость частиц, γ — релятивистский масс-фактор.

В квазиоптическом приближении самосогласованная система уравнений, описывающая взаимодействие электронного потока с полем излучения, состоит из уравнений движения электронов и параболического уравнения

для амплитуды волнового пучка

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dZ} &= -\frac{\hat{p}_\perp}{\hat{p}_\parallel} \operatorname{Re} (ia \exp(i\theta)), \\ \frac{d\theta}{dZ} &= \frac{\Delta + \mu w - nq}{\beta_\parallel} - \frac{1 - \beta_\parallel n}{\hat{p}_\perp \hat{p}_\parallel} \operatorname{Re} (a \exp(i\theta)), \\ \frac{dq}{dZ} &= -\frac{\hat{p}_\perp}{\hat{p}_\parallel} \operatorname{Re} \left(i \frac{da}{dZ} \exp(i\theta) \right), \\ \frac{i}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial X^2} + \frac{\partial a}{\partial Z} &= i \frac{\omega_b^2}{2\omega^2 n} F(X) \frac{1}{2\pi} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{\hat{p}_\perp}{\hat{p}_\parallel} \exp(-i\theta) d\theta_0 \quad (3) \end{aligned}$$

с граничными условиями $w|_{Z=0} = 0$, $\theta|_{Z=0} = \theta_0 + r \cos \theta_0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, ($r \ll 1$), $q|_{Z=0} = 0$, $a|_{Z=0} = a(X)$. Здесь использованы следующие безразмерные переменные: $\omega_b = (4\pi e^2 N_0 / m \gamma_0)^{1/2}$ — плазменная "поперечная" частота; N_0 — невозмущенная плотность электронного потока; $Z = (\omega/c)z$; $X = (\omega/c)x$; $w = 1 - (\varepsilon/\varepsilon_0)$, $\varepsilon = mc^2 \gamma$ — энергия электронов; $\theta = \omega t - hz - \int_0^t \omega_H dt - \arg(p_x + p_y)$; $a = (eA)/(mc^2 \gamma_0)$; $\mu = n^2 - 1$ — параметр инерционной группировки, $\Delta = 1 - n\beta_{\parallel 0} - (\omega_{H_0}/\omega)$ — начальная расстройка циклотронного резонанса;

$$\hat{p}_\parallel = \frac{p_\parallel}{mc} = \beta_{\parallel 0} - nw,$$

$$\hat{p}_\perp = \frac{p_\perp}{mc} = \left(\beta_{\perp 0}^2 - 2(1 - n\beta_{\parallel 0})w + \mu w^2 \right)^{1/2}$$

— продольный и поперечный импульсы электронов; $q = [c(p_\parallel - p_{\parallel 0}) - n(\varepsilon - \varepsilon_0)]/mc^2$ — величина, характеризующая нарушение интеграла движения $n\varepsilon - cp_\parallel = \text{const}$ вследствие влияния электронного потока на соотношения между электрической и магнитной компонентами поля (см. подробнее [14,15]).

В рамках линейной теории [13] были выделены три случая, а именно излучение потока циклотронных осцилляторов в плазмподобной среде с показателем преломления $n < 1$ в условиях нормального эффекта Доплера, излучение такого потока в вакууме ($n = 1$), когда имеет место эффект авторезонанса [16–18], а также излучение первоначально прямолинейного электронного пучка в однородной среде в условиях аномального эффекта Доплера ($n > 1$). Было показано, что во всех этих случаях на начальной стадии возбуждаемое электромагнитное поле имеет вид усиливающейся локализованной волны, которая экспоненциально нарастает вдоль оси z , одновременно экспоненциально спадает в поперечном направлении от оси системы. При этом такая волна обладает поперечным потоком электромагнитной энергии, направленным от пучка к периферии.

В данной работе с помощью численного моделирования исследуется нелинейная стадия взаимодействия

электронов с электромагнитным полем для указанных выше случаев. При этом, как и в [13], будем предполагать, что электронный слой является тонким в масштабе параметра Френеля $d^2/\lambda L \ll 1$ (здесь L — характерная длина области взаимодействия). Это позволяет представить функцию $F(X)$, описывающую поперечное распределение плотности пучка, в виде $F(X) = D\delta(X)$, где $D = (\omega/c)d$.

Винтовой электронный пучок в среде (плазме) с показателем преломления $n < 1$

Для численного моделирования введем новую переменную $P = \sqrt{1 - u} \exp(i\theta)$, где

$$u = w \frac{2}{\beta_{\perp 0}^2} (1 - n\beta_{\parallel 0}).$$

Тогда система уравнений (3) сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dZ} + \frac{iP}{1 - b(1 - P^2)} (\hat{\Delta} - 1 + |P|^2 - b\hat{q}) \\ = \frac{i\hat{a}}{1 - b(1 - |P|^2)}, \quad (4a) \end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{q}}{dZ} = -2 \frac{\operatorname{Re} \left(P^* \frac{d\hat{a}}{dZ} \right)}{1 - b(1 - |P|^2)}, \quad (4b)$$

$$i \frac{\partial^2 \hat{a}}{\partial X^2} + \frac{\partial \hat{a}}{\partial Z} = 2iI \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Pd\theta_0}{1 - b(1 - |P|^2)} \delta(\hat{X}) \quad (4c)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} P|_{Z=0} = \exp(i\theta_0), \quad \theta|_{Z=0} = \theta_0 + r \cos \theta_0, \\ \theta_0 \in [0, 2\pi], \quad (r \ll 1), \quad \hat{q}|_{Z=0} = 0, \quad a|_{Z=0} = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= Z \frac{\beta_{\perp 0}^2 |\mu|}{2\beta_{\parallel 0} (1 - n\beta_{\parallel 0})}, & \hat{X} &= X \sqrt{\frac{\beta_{\perp 0}^2 |\mu|}{2\beta_{\parallel 0} (1 - n\beta_{\parallel 0})}}, \\ \hat{a} &= a \frac{2(1 - n\beta_{\parallel 0})^2}{\beta_{\perp 0}^3 |\mu|}, & \hat{q} &= q \frac{4\beta_{\parallel 0} (1 - n\beta_{\parallel 0})^2}{\beta_{\perp 0}^4 |\mu|}, \\ \hat{\Delta} &= \Delta \frac{2(1 - n\beta_{\parallel 0})}{\beta_{\perp 0}^2 \mu}, & b &= \frac{\beta_{\perp 0}^2}{2\beta_{\parallel 0} n (1 - n\beta_{\parallel 0})}, \\ I &= \frac{1}{2} \frac{\omega_b^2 d}{\omega^2 c} \frac{\beta_{\parallel 0}^{1/2} (1 - n\beta_{\parallel 0})^{5/2}}{\beta_{\perp 0}^3 n^{1/2} |\mu|^{3/2}}. \end{aligned}$$

Результаты численного моделирования системы уравнений (4) представлены на рис. 1, 2. Анализ пространственного распределения излучаемого поля показывает, что на линейной стадии взаимодействия независимо от начальных условий на достаточном удалении от входного

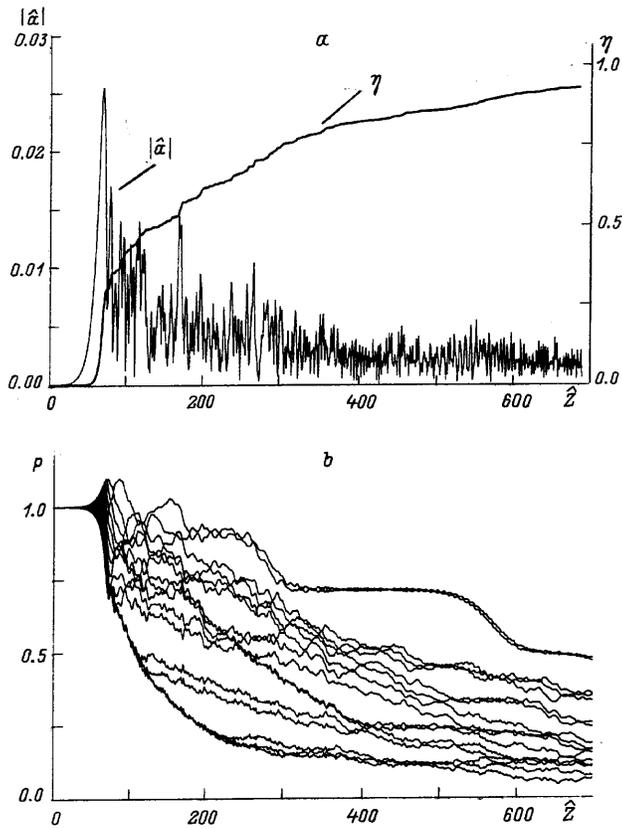


Рис. 1. Зависимость от продольной координаты амплитуды излучаемой волны $|\hat{a}|_{\hat{x}=0}$ и электронного КПД $\eta(a)$, а также поперечного импульса электронов при излучении электронного пучка в среде с показателем преломления $n < 1$ (b) ($I = 0.001$, $b = 0.5$, $\Delta = 0$).

сечения (рис. 2, $Z \sim 60$) структура излучаемого поля близка к структуре локализованной моды [13]. Таким образом, на линейной стадии взаимодействия реализуется режим усиления и канализации излучения электронным потоком. На нелинейной стадии возникает расширение волнового пучка, сопровождающееся постепенным высвечиванием энергии во внешнее пространство. На этой стадии реализуется механизм стохастического торможения электронов, при котором энергия частиц трансформируется в энергию излучения, представляющего собой ансамбль волн, имеющих одинаковую частоту и отличающихся волновыми числами, т.е. углами распространения по отношению к оси системы (см. поперечный спектр поля

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a \exp(i_x X) dX,$$

рис. 2). Механизм стохастического торможения в данном случае реализуется уже при точном начальном синхронизме $\Delta = 0$ в отличие, например, от лазера на свободных электронах (ЛСЭ) [10]. Дело в том, что если в устройствах черенковского типа [11] и ЛСЭ

при фиксированной частоте излучения по мере торможения частицы синхронно взаимодействуют с волнами, распространяющимися под все меньшими углами, то в данном случае, наоборот, по мере торможения становится возможным синхронное взаимодействие с волнами, излучающимися под все большими углами к оси системы (ср. с [12]). Действительно, нетрудно видеть, что приращение угла $\Delta\psi^2$, под которым излучается синхронная волна, связано с изменением энергии электронов $\Delta\gamma$ соотношением

$$\Delta\psi^2 = \frac{2\mu}{n\beta_{\parallel}} \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}. \tag{6}$$

В данном случае ($n < 1$) $\mu < 0$ и, следовательно, при $\Delta\gamma < 0$ $\Delta\psi > 0$. Отсюда становится понятным и характер эволюции спектра на рис. 2. Если в ЛСЭ на нелинейной стадии происходит заполнение спектра компонентами с малыми поперечными волновыми числами χ , то здесь, напротив, по мере торможения электронов угловой спектр расширяется. В результате, как видно из рис. 2, имеет место практически полная перекачка поперечной энергии электронов в энергию излучения, т.е. электронный КПД

$$\eta = 1 - 1/2\pi \int_0^{2\pi} |P|^2 d\theta_0$$

стремится к единице (ср. также с [12]).

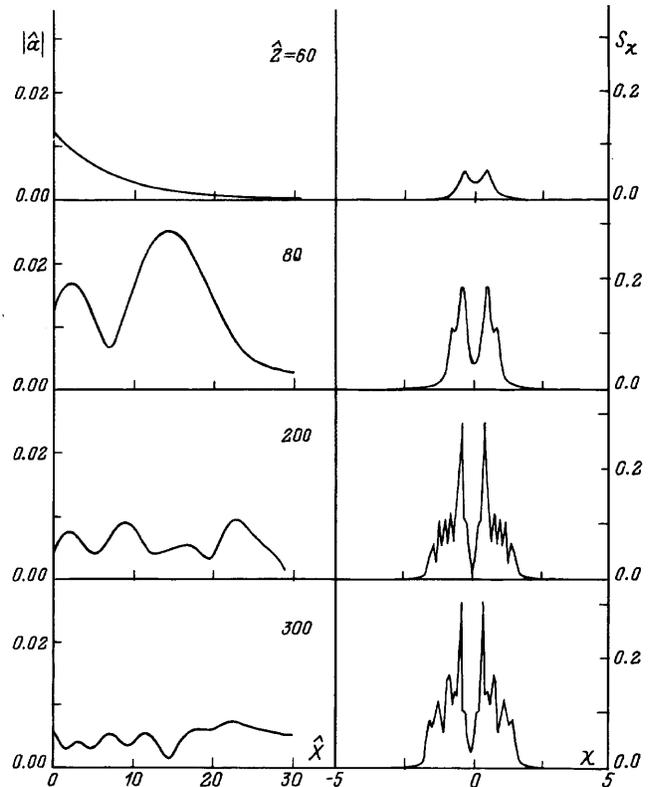


Рис. 2. Эволюция поперечного распределения модуля амплитуды электромагнитного поля $|\hat{a}|$ и углового спектра S_x при излучении в среде с показателем преломления $n < 1$.

Винтовой электронный пучок в вакууме ($n = 1$)

В этом случае, как известно, имеет место эффект авторезонанса [16–18], при котором происходит взаимная компенсация основных механизмов инерционной группировки — азимутальной и продольной, обусловленных соответственно зависимостью от энергии гирочастоты и поступательной скорости электронов. В результате параметр инерционной группировки μ обращается в нуль. Возможность излучения при этом обеспечивается дополнительными механизмами, например, перестройкой структуры волны, за счет чего эффект авторезонанса нарушается [14,15].

Полагая в общей системе уравнений (3) $\mu = 0$, приведем уравнение для поперечного импульса к виду

$$\frac{dP}{dZ} + \frac{iP}{1 - b(1 - P^2)} (\hat{\Delta} - b\hat{q}) = \frac{i\hat{a}}{1 - b(1 - |P|^2)}.$$

Остальные уравнения и граничные условия совпадают по форме с (4a)–(4c), (5), где под нормализованными переменными следует понимать

$$\hat{Z} = Z \frac{\beta_{\perp 0}^2}{2\beta_{\parallel 0}(1 - \beta_{\parallel 0})}, \quad \hat{X} = X \sqrt{\frac{\beta_{\perp 0}^2}{2\beta_{\parallel 0}(1 - \beta_{\parallel 0})}},$$

$$\hat{a} = a \frac{2(1 - \beta_{\parallel 0})^2}{\beta_{\perp 0}^3}, \quad \hat{q} = q \frac{4\beta_{\parallel 0}(1 - \beta_{\parallel 0})^2}{\beta_{\perp 0}^4},$$

$$\hat{\Delta} = \Delta \frac{2\beta_{\parallel 0}(1 - \beta_{\parallel 0})}{\beta_{\perp 0}^2}, \quad b = \frac{\beta_{\perp 0}^2}{2\beta_{\parallel 0}(1 - \beta_{\parallel 0})},$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{\omega_b^2 d}{\omega c} \frac{\beta_{\parallel 0}^{1/2} (1 - \beta_{\parallel 0})^{5/2}}{\beta_{\perp 0}^3}.$$

Численное исследование показало, что, несмотря на взаимную компенсацию основных механизмов инерционной группировки за счет дополнительных механизмов, процесс усиления и канализации излучения винтовым электронным потоком в действительности имеет место при достаточно большой начальной поперечной скорости электронов, когда выполнено условие $b > 0.5$, полученное в рамках линейного анализа [13]. Соответственно, на начальной линейной стадии происходит формирование усиливающейся локализованной моды (рис. 3, 4), параметры которой (инкремент и масштаб поперечного спада поля) хорошо совпадают с результатами линейной теории. Однако, как видно из сравнения рис. 1, а и 3, а, данном случае процесс развивается значительно медленнее. Действительно, при большем токе инжекции и начальной вращательной скорости электронов на одинаковой нормализованной длине взаимодействия ~ 700 поперечный КПД достигает в данном случае только 30% по сравнению с 90% в случае $n < 1$. Тем не менее, как показывает численное моделирование, в условиях авторезонанса на больших длинах взаимодействия КПД также асимптотически стремится к единице. Интересной

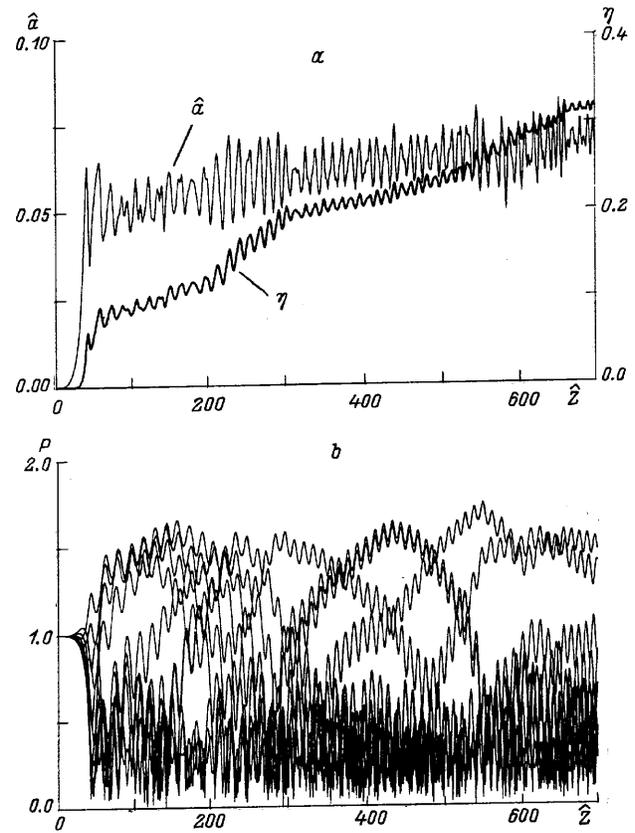


Рис. 3. То же, что на рис. 1, при излучении электронного слоя в вакууме ($n = 1$): $I = 0.1$, $b = 0.7$, $\Delta = 0$.

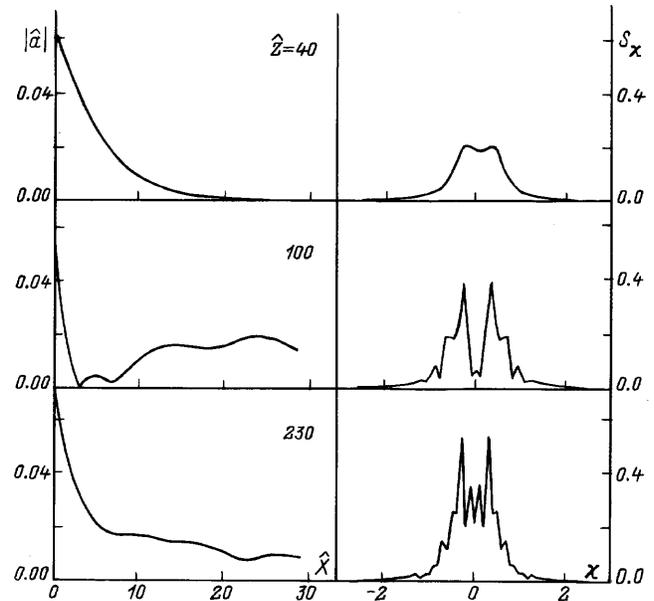


Рис. 4. То же, что на рис. 2, при излучении электронного слоя в вакууме в условиях авторезонанса.

особенностью данного режима являются сильные осцилляции поперечного импульса и соответственно энергии ряда электронных фракций. Эволюция поперечной структуры поля и спектра излучения показаны на рис. 4. Как

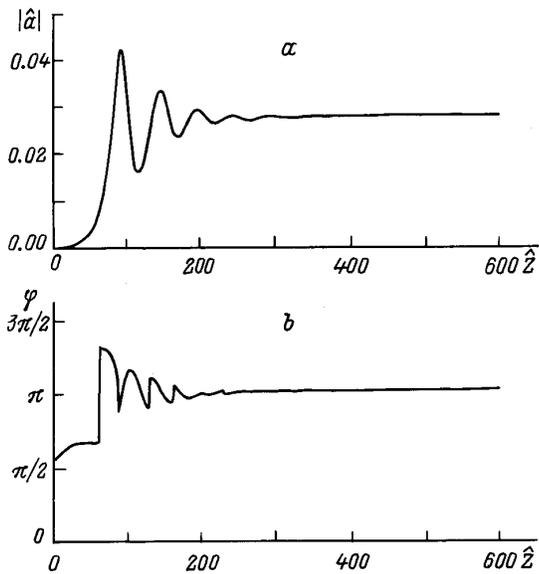


Рис. 5. Зависимость от продольной координаты амплитуды излучаемой волны (а), разностной фазы φ (б) при излучении прямолинейного электронного пучка в среде с показателем преломления $n > 1$ в условиях аномального эффекта Доплера: $I = 0.05$, $b = 0.2$, $\Delta = 0$.

и в предшествующем случае, при насыщении поля в электронном канале происходит эффективное расширение области, занятой электромагнитным полем, за счет волн, излученных в предыдущих сечениях оси z .

Прямолинейный электронный пучок в среде с показателем преломления $n > 1$

Как показывает линейная теория, для прямолинейного электронного потока усиливающиеся локализованные моды существуют только в условиях аномального эффекта Доплера $n\beta > 1$. Вследствие того что в начальный момент фазы всех электронов прямолинейного пучка относительно электромагнитной волны θ одинаковы (в отличие от винтового пучка, где они принимают любые значения от 0 до 2π), система уравнений (3) существенно упрощается. Вместо бесконечного числа уравнений, описывающих движение различных фракций винтового пучка, движение потока первоначально прямолинейных электронов задается двумя уравнениями. Соответственно в уравнении возбуждения отсутствует усреднение по фазам влета и самосогласованная система уравнений (3) при $\beta_{\perp 0} = 0$ может быть приведена к виду

$$\frac{dP}{d\hat{z}} + \frac{iP}{1 - b|P|^2} (\hat{\Delta} + |P|^2 - b\hat{q}) = -\frac{i\hat{a}}{1 - b|P|^2},$$

$$\frac{d\hat{q}}{d\hat{z}} = -2 \frac{\text{Re} \left(P^* \frac{d\hat{a}}{d\hat{z}} \right)}{1 - b|P|^2},$$

$$i \frac{\partial^2 \hat{a}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \hat{a}}{\partial \hat{z}} = 2iI \frac{P}{1 - b|P|^2} \delta(\hat{x}) \quad (8)$$

с граничными условиями (ср. с (5))

$$P|_{z=0} = 0, \quad \hat{q}|_{z=0} = 0, \quad a|_{z=0} = a_0(\hat{x}). \quad (9)$$

Здесь

$$P = \sqrt{u} \exp(i\theta), \quad u = w \frac{2(n\beta_{\parallel 0} - 1)}{\beta_{\parallel 0}},$$

$$\hat{z} = Z \frac{\mu\beta_{\parallel 0}}{2(n\beta_{\parallel 0} - 1)}, \quad \hat{x} = X \sqrt{\frac{\beta_{\parallel 0}\mu}{2(n\beta_{\parallel 0} - 1)}},$$

$$\hat{a} = a \frac{2(n\beta_{\parallel 0} - 1)^2}{\beta_{\parallel 0}^3}, \quad \hat{q} = q \frac{4(n\beta_{\parallel 0} - 1)^2}{\beta_{\parallel 0}^3 \mu},$$

$$\hat{\Delta} = \Delta \frac{2(n\beta_{\parallel 0} - 1)}{\mu\beta_{\parallel 0}}, \quad b = \frac{n\beta_{\parallel 0}}{2(n\beta_{\parallel 0} - 1)},$$

$$I = \frac{\omega_b^2 d}{\omega c} \frac{(n\beta_{\parallel 0} - 1)^{3/2}}{\mu^{3/2} n^{1/2} \beta_{\parallel 0}^{5/2}}.$$

Структура поля, формирующаяся на начальной стадии, аналогична двум рассматриваемым ранее случаям, т. е. имеет место возбуждение усиливающейся локализованной моды (рис. 5, 6). Здесь интересно отметить, что на нелинейной стадии поведение системы существенно

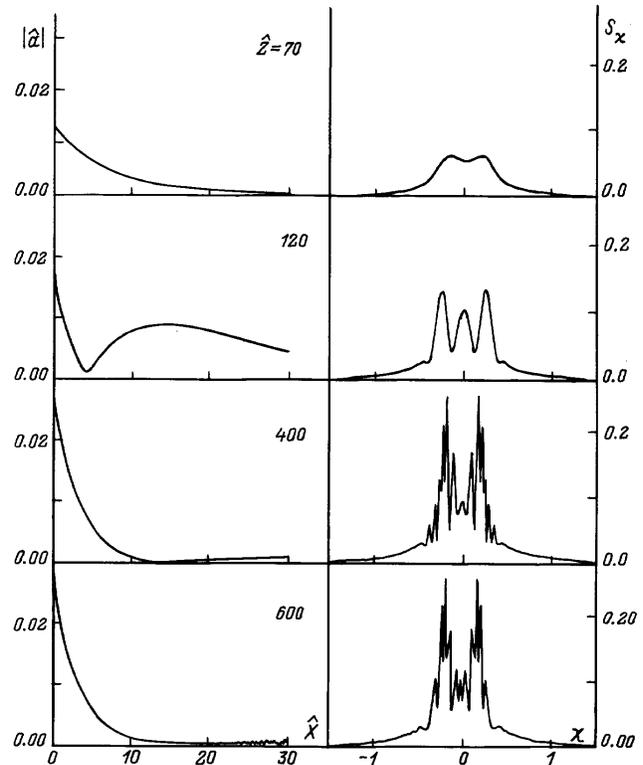


Рис. 6. Профиль волнового пучка и угловой спектр в зависимости от продольной координаты при излучении электронного пучка в условиях аномального эффекта Доплера.

отличается от исследованного ранее [14] излучения в условиях аномального эффекта Доплера в приближении фиксированной поперечной структуры поля, в частности при волноводном распространении излучения. В случае фиксированной поперечной структуры вначале происходит трансформация продольной энергии частиц в поперечную энергию и энергию электромагнитного поля, однако далее вследствие консервативности системы процесс идет в обратном направлении: энергия электромагнитного поля и поперечных электронных осцилляций убывает, а продольная энергия частиц растет, достигая первоначального значения. В результате имеет место периодическая перекачка энергии. В случае излучения ограниченного потока первоначально невозбужденных осцилляторов в однородной среде за счет выноса энергии из области взаимодействия происходит спадание амплитуды подобных колебаний (рис. 5). В конечном счете при достаточно большой длине рабочего пространства взаимодействие электронов с электромагнитным полем приобретает реактивный характер, т.е. фаза поля по отношению к фазе поперечного электронного тока φ стремится к π (рис. 5, *b*). При этом ограниченный электронный поток выступает в роли эффективного диэлектрика, канализируя излучение без его усиления. Соответственно формирующийся профиль поля при $Z > 400$ практически не трансформируется (рис. 6).

Список литературы

- [1] Ковалев Н.Ф., Петелин М.И. // Релятивистская высокочастотная электроника / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. Вып. 2. С. 63–75.
- [2] Tang C.M., Sprangle P. // Phys. Quant. Electron. Addison Wesley, 1982. Vol. 9. P. 849–855.
- [3] Кондратенко А.М., Салдин Е.Л. // ЖТФ. 1981. Т. 51. С. 1633–1640.
- [4] Канавец В.И., Корженевский А.В., Черепенин В.А. // РиЭ. 1985. Т. 30. С. 2202–2209.
- [5] Ginzburg N.S. // Opt. Commun. 1982. Vol. 43. P. 203–208.
- [6] Ginzburg N.S., Kovalev N.F., Rusov N.Yu. // Opt. Commun. 1983. Vol. 46. P. 300–309.
- [7] Гинзбург Н.С., Ковалев Н.Ф. // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. С. 234–242.
- [8] Sharlemann E.T., Sessler A.M., Wurtele I.S. // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. P. 1925–1929.
- [9] Moor G.T. // Nucl. Instr. and Meth. Phys. Res. 1986. Vol. A250. P. 381–386.
- [10] Гинзбург Н.С., Ковалев Н.Ф. // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. Вып. 5. С. 234–237.
- [11] Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С. // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. Вып. 6. С. 3940–3949.
- [12] Ginzburg N.S., Zotova I.V., Sergeev A.S. // Phys. Lett. 1994. Vol. A186. P. 235–238.
- [13] Гинзбург Н.С. // Физика плазмы. 1989. Т. 15 № 11. С. 1274–1282.
- [14] Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Нусинович Г.С. и др. // Релятивистская высокочастотная электроника / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. Вып. 1. С. 157–217.

- [15] Гинзбург Н.С., Зарницына И.Г., Нусинович Г.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. С. 481–493.
- [16] Коломенский А.А., Лебедев А.Н. // ДАН СССР. 1962. Т. 145. С. 1259–1264.
- [17] Давыдовский В.Я. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 886–891.
- [18] Гапонов А.В. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 326–342.